

TRAITÉ
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

G. CAGNAC
E. RAMIS
J. COMMEAU

2

analyse

MASSON & C^{IE}

TRAITÉ
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

2

Analyse

TRAITÉ
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

PAR

G. CAGNAC

Inspecteur général de l'Instruction Publique.

E. RAMIS

*Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Louis-le-Grand.*

J. COMMEAU

*Professeur de Mathématiques Supérieures
au Lycée Kléber, à Strasbourg.*

2

Analyse

Classes Préparatoires et Enseignement Supérieur (1^{er} cycle)

(Programmes du 21 Janvier 1963, du 25 Mars 1964 et du 30 Juin 1966)

MASSON et C^{ie} ÉDITEURS

1972

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© Masson et C^{ie}, Paris 1972.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

ISBN : 2-225 70280-9

Imprimé en France

AVERTISSEMENT

DEPUIS que les programmes du 27 juin 1956 ont renouvelé l'enseignement des classes préparatoires aux Écoles Scientifiques, cet enseignement s'est progressivement rapproché de celui qui est donné dans le premier cycle des Facultés, et cette évolution s'est concrétisée dans les programmes du 21 janvier 1963 et du 25 mars 1964.

De son côté, l'enseignement des Facultés va lui-même évoluer, l'adoption des programmes du 30 juin 1966 répartissant sur deux ans l'enseignement du premier cycle de l'Enseignement Supérieur; entre les deux années, il est prévu une ventilation analogue à celle des programmes de première année et de seconde année des classes préparatoires.

Cette volonté d'harmonisation s'est concrétisée enfin dans l'Arrêté du 11 juillet 1966 relatif aux titres admis en équivalence du D. U. E. S. en vue de l'inscription dans le second cycle de l'Enseignement Supérieur.

Nous avons voulu en particulier que les étudiants des classes préparatoires puissent trouver dans notre ouvrage les quelques compléments qui leur permettront de se présenter aux examens du premier cycle des Facultés.

Ces compléments ne seront pas inutiles aux étudiants des classes préparatoires qui auront acquis le D. U. E. S. par équivalence : ils trouveront dans l'ouvrage qui leur aura servi au cours de leur préparation l'exposé de quelques questions qui, n'étant pas reprises dans l'enseignement du second cycle des Facultés, leur seront utiles pour la poursuite de leurs études.

Nous avons été ainsi amenés à compléter notre exposé par l'introduction :
1° de notions que la pratique des récents concours rend nécessaires dans les classes préparatoires;

2° de questions propres au nouveau programme M. P. du premier cycle de l'Enseignement Supérieur. Nous en avons profilé pour améliorer la rédaction sur un certain nombre de points.

Le programme A'2 se présentant sous une forme plus axiomatique que les programmes A1 et A2, le chapitre XXI (Introduction axiomatique des fonctions circulaires) répond à son exigence, mais nous avons conservé — à l'intention des autres étudiants — les démonstrations fondées sur l'introduction de ces fonctions à partir de la géométrie.

Les Écoles qui ont choisi le programme B ont souhaité que leurs candidats aient une première année de préparation sur le programme A1. Suivant les circonstances, les professeurs de Mathématiques Supérieures pourront développer plus ou moins ce programme, l'essentiel étant qu'à la fin de la première année, l'étudiant soit parvenu à une bonne assimilation des notions de base, sans laquelle aucun effort ne serait fructueux par la suite.

Les programmes B2 sont assez voisins, au moins dans leur teneur, de certaines parties des programmes A2 pour que notre traité puisse aussi convenir aux étudiants qui suivent les programmes B des classes préparatoires, et même le programme P. C. du premier cycle des Facultés.

Afin que notre ouvrage puisse être adapté aux exigences des divers programmes, nous avons été amenés

1) à prévoir des paragraphes destinés exclusivement aux étudiants de première année; au tome I nous avons même réservé deux chapitres à une initiation aux espaces vectoriels et à l'algèbre linéaire traitée d'un point de vue élémentaire (il va de soi que l'étude de ces deux chapitres ne s'adresse pas aux étudiants qui auraient déjà reçu une telle initiation);

2) à mettre en caractères fins, non seulement des exercices d'application ou des exemples numériques, mais aussi des questions théoriques constituant des compléments pour les étudiants de seconde année;

3) à indiquer par des astérisques des questions qui, bien que manifestement hors des programmes, sont susceptibles d'intéresser de futurs mathématiciens.

Nous avons réparti l'enseignement des diverses questions du programme en quatre tomes. Sachant les nombreuses façons dont peut s'organiser un cours de mathématiques, nous avons voulu respecter au maximum le choix des maîtres, et nous avons groupé dans chacun des tomes un ensemble cohérent auquel le lecteur pourra se reporter sans hésitation s'il a besoin d'un enseignement, d'une référence, d'une formule.

Nous n'avons pas hésité à faire des renvois d'un tome à l'autre, car nous sommes persuadés qu'au moins en première année, on aura intérêt à traiter les parties les plus simples de chacun des tomes avant l'étude complète de l'un d'entre eux.

Le tome I (Algèbre) comprend essentiellement l'étude des structures algébriques, du corps des rationnels et du corps des complexes, des polynômes, fractions rationnelles et équations algébriques, enfin de l'algèbre linéaire. La fin du cours d'Algèbre (formes quadratiques, hermitiennes,...) a été reportée au début du tome III.

Le tome II (Analyse) contient d'une part l'étude des fonctions réelles ou complexes d'une ou de plusieurs variables réelles, d'autre part celle de la partie théorique du programme de calcul différentiel et intégral. Un premier chapitre est consacré à une introduction du corps des réels; un dernier chapitre rassemble ce que les élèves ont à savoir sur les calculs numériques en vue des travaux pratiques.

Deux appendices, conformes au programme MP des Facultés, contiennent l'un, des notions de Topologie, l'autre une initiation aux fonctions holomorphes.

Le tome III (Géométrie) comprend deux parties. L'une est consacrée à des compléments d'Algèbre qui forment une suite naturelle du tome I, et à une introduction axiomatique de la Géométrie; l'autre, plus pratique, étudie les diverses généralisations et les représentations analytiques usuelles des courbes et des surfaces élémentaires.

Le tome IV (Applications de l'Analyse à la Géométrie) contient la géométrie différentielle, les intégrales multiples, les calculs de longueurs, aires, volumes, etc., l'analyse vectorielle et les applications géométriques des équations différentielles.

* * *

Nous avons numéroté les paragraphes tome par tome; les renvois sont indiqués par référence au tome (en chiffres romains) et au paragraphe (en chiffres arabes); ceux d'entre eux qui ne sont pas précédés d'un chiffre romain sont relatifs au tome étudié.

Chaque paragraphe est divisé en sous-paragraphes par des numéros 1^o, 2^o, 3^o...; chaque sous-paragraphe est divisé, le cas échéant, en alinéas par des lettres a), b), c),.... Nous espérons ainsi rendre service aux élèves en marquant bien la séparation des diverses idées.

Les formules encadrées dans le texte sont d'un usage courant; il est indispensable, sinon de les savoir par cœur, du moins de pouvoir les retrouver très rapidement.

* * *

MM. MASSON ET C^{ie}, ainsi que leurs collaborateurs, ont consenti pour la refonte de notre ouvrage et son adaptation aux nouveaux programmes un effort dont nous sentons tout le prix; nous sommes heureux de les en remercier particulièrement.

LES AUTEURS.

N.-B. — Nous avons représenté les ensembles fondamentaux des naturels, entiers, rationnels, réels, complexes, par les lettres

$N, Z, Q, R, C.$

Pour éviter des confusions, en particulier si un texte appelle les lettres précédentes à recevoir une autre signification, on pourra représenter les ensembles fondamentaux par les symboles

N, Z, Q, R, C

CHAPITRE PREMIER

LES NOMBRES RÉELS

I. COUPURES DANS L'ENSEMBLE Q DES NOMBRES RATIONNELS

1. **Introduction.** — Rappelons la marche suivie jusqu'ici dans la construction des nombres.

1° Nous avons admis la notion d'*entier naturel*. Les entiers naturels sont désignés par 0, 1; 2, . . . Ils forment l'ensemble N .

2° Nous avons construit (tome I, n° 34) l'ensemble Z des *entiers relatifs* en appliquant le théorème sur la symétrisation d'une loi associative, commutative et régulière à l'addition sur N . Z a été muni d'une structure d'anneau commutatif, unitaire, sans diviseur de zéro.

3° Nous avons étudié (I, 36), le corps Q des fractions de l'anneau Z sous le nom d'ensemble des *nombres rationnels*.

Nous allons maintenant définir un ensemble R que nous munirons d'une structure de corps, dont une partie R^* sera isomorphe à Q , ce qui permettra de l'identifier à Q . Pour cela nous utiliserons essentiellement la relation d'ordre strict $<$ définie sur Q au n° 36, 7° du tome I.

Nous serons amenés à utiliser le fait que le corps Q est archimédien (I, 36, 8°).

2. Coupure dans l'ensemble Q des nombres rationnels ⁽¹⁾. —

1° DÉFINITION. — On dit que l'on a effectué une coupure dans Q quand on a formé, par un procédé mathématique quelconque, deux sous-ensembles de Q non vides et disjoints, respectivement appelés classe inférieure (a) et classe supérieure (A) , qui possèdent les trois propriétés suivantes :

- α) tout nombre rationnel inférieur à un élément de (a) appartient à (a) ,
- β) tout nombre rationnel supérieur à un élément de (A) appartient à (A) ,
- γ) les deux classes sont adjacentes, ce qui signifie que, quel que soit le nombre rationnel positif ϵ , il existe un couple d'éléments a de (a) et A de (A) tel que $|A - a| < \epsilon$.

Dire que les sous-ensembles (a) et (A) sont disjoints, c'est dire (I, 4, 3°) qu'ils n'ont aucun élément commun.

(1) Dedekind (1872).

Une coupure n'est pas nécessairement une partition (I, 5, 4°) de Q , puisque tout nombre rationnel n'est pas forcément classé.

2° Conséquences de la définition. — a) Tout élément A_0 de (A) est supérieur à tout élément de (a) , sinon A_0 appartiendrait à (a) d'après la propriété (α) , ce qui serait en contradiction avec le fait que les deux classes sont disjointes.

b) Si un nombre rationnel r n'est pas classé, il est supérieur à tout élément de (a) à cause de (α) et inférieur à tout élément de (A) à cause de (β) .

c) Il ne peut exister deux nombres rationnels r et r' non classés. En effet, en supposant $r < r'$ pour fixer les idées, on aurait

$$\text{et} \quad \left. \begin{array}{l} a < r < r' < A \\ A - a > r' - r \end{array} \right\} \forall a \in (a) \quad \text{et} \quad \forall A \in (A).$$

ce qui est en contradiction avec la propriété (γ) .

3° THÉORÈME. — Si une partition de Q en deux classes non vides (a) et (A) d'éléments a et A , possède les deux propriétés :

$\alpha)$ tout nombre rationnel inférieur à un élément de (a) appartient à (a) ,

$\beta)$ tout nombre rationnel supérieur à un élément de (A) appartient à (A)

cette partition est une coupure.

Le mot *partition* implique, rappelons-le (I, 10, 3°), que (a) et (A) sont disjoints et que tout nombre rationnel est classé. Il s'agit de démontrer que la propriété (γ) est une conséquence des hypothèses.

Choisissons dans (A) , qui contient forcément des nombres rationnels positifs, un élément positif A_0 . Choisissons de même dans (a) un élément négatif a_0 . Le corps Q étant archimédien, il existe, quel que soit le nombre rationnel positif ε' , deux entiers naturels p et q tels que

$$p \varepsilon' > A_0 \quad \text{et} \quad q \varepsilon' > |a_0|.$$

Il en résulte que les nombres rationnels $p \varepsilon'$ et $(-q) \varepsilon'$ appartiennent respectivement à (A) et à (a) . Nous avons ainsi un nombre fini de rationnels

$$(-q) \varepsilon'; \quad (-q + 1) \varepsilon'; \quad (-q + 2) \varepsilon'; \quad \dots; \quad (p - 1) \varepsilon'; \quad p \varepsilon'$$

qui sont classés par hypothèse et ne sont pas tous dans la même classe. En utilisant les hypothèses (α) et (β) on en déduit qu'il existe un entier relatif $n \in [-q, p[$ tel que .

$$a_1 = n \varepsilon' \in (a) \quad \text{et} \quad A_1 = (n + 1) \varepsilon' \in (A); \quad \text{on a} \quad A_1 - a_1 = \varepsilon';$$

ε étant un rationnel positif arbitraire, il suffit de choisir pour ε' un rationnel inférieur à ε pour mettre en évidence l'existence d'un élément de (A) et d'un élément de (a) dont la différence est inférieure à ε .

3. Les divers types de coupures. — On peut concevoir *a priori* quatre cas possibles :

1^{er} TYPE : *il existe un nombre rationnel r non classé.* — Nous avons vu que tout nombre rationnel $\rho \neq r$ est alors classé. $\rho > r$ entraîne $\rho \in (A)$: en effet $\rho \notin (A)$ impliquerait $\rho \in (a)$ et $r \in (a)$, d'après la propriété (α). De même $\rho < r$ entraîne $\rho \in (a)$.

Inversement, en désignant par (a) et (A) les ensembles des nombres rationnels respectivement inférieurs et supérieurs au nombre rationnel donné r , on obtient visiblement une coupure du 1^{er} type.

Remarquons que l'ensemble (a) n'admet pas d'élément supérieur à tous les autres et que l'ensemble (A) n'admet pas d'élément inférieur à tous les autres (un rationnel pouvant toujours être intercalé entre r et tout élément de l'une des deux classes). Nous traduirons ce fait en disant qu'il s'agit d'une coupure *ouverte*.

2^e TYPE : *tous les rationnels sont classés et (A) admet un élément minimum r .* — Cela se produit si, et seulement si (a) est l'ensemble des rationnels inférieurs à r , (A) celui des rationnels supérieurs ou égaux à r . Une telle coupure est dite *fermée*.

3^e TYPE : *tous les rationnels sont classés et (a) admet un élément maximum r .* — Cela se produit si, et seulement si (a) est l'ensemble des rationnels inférieurs ou égaux à r , (A) celui des rationnels supérieurs à r . Une telle coupure est dite *fermée*.

Il y a une correspondance biunivoque entre les nombres rationnels et les coupures de l'un quelconque des trois premiers types qui, de ce fait, seront dites *banales*. Toute coupure banale fermée (2^e et 3^e types) sera systématiquement remplacée par la coupure banale ouverte (1^{er} type) qui est associée au même nombre rationnel.

4^e TYPE : *tous les rationnels sont classés, (A) n'admet pas d'élément minimum, (a) n'admet pas d'élément maximum.* — Montrons par un exemple qu'il existe de telles coupures.

Désignons par (A) l'ensemble des nombres rationnels positifs dont le carré est supérieur à 2 et par (a) l'ensemble formé par les nombres rationnels négatifs, 0 et les nombres rationnels positifs dont le carré est inférieur à 2. Les deux classes sont disjointes, ne sont pas vides puisque $0 \in (a)$ et $2 \in (A)$; d'autre part tout nombre rationnel est classé puisqu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est 2; les conditions (α) et (β) sont satisfaites. Nous avons donc effectué dans $\mathbb{Q}$ une coupure.

Cette coupure n'est pas ouverte banale puisque tout nombre rationnel est classé. Montrons qu'elle n'est pas fermée.

(A) n'a pas d'élément minimum; autrement dit, étant donné un nombre rationnel positif A tel que $A^2 > 2$, il existe un nombre rationnel positif h vérifiant les deux conditions

$$(1) \quad A - h > 0 \quad \text{et} \quad (A - h)^2 > 2 \quad \text{qui s'écrit} \quad h(2A - h) < A^2 - 2 \quad (2)$$

En effet, du fait que $h(2A - h) < 2Ah$

il résulte que l'inégalité (2) est une conséquence de l'inégalité

$$2Ah < A^2 - 2 \quad \text{qui s'écrit} \quad h < \frac{A^2 - 2}{2A}. \quad (3)$$

Or l'inégalité (1) est, elle aussi, une conséquence de l'inégalité (3), puisque $\frac{A^2 - 2}{2A}$ est inférieur à A . Ainsi les conditions (1) et (2) sont satisfaites par tout nombre rationnel positif h inférieur à $\frac{A^2 - 2}{2A}$.

(a) *n'a pas d'élément maximum*; un tel élément ne pourrait être que positif. Or, quel que soit le nombre rationnel positif a tel que $a^2 < 2$, il existe un nombre rationnel positif k vérifiant la condition

$$(a + k)^2 < 2, \quad \text{qui s'écrit} \quad k(2a + k) < 2 - a^2. \quad (4)$$

Pour les nombres k compris entre 0 et 1 on a en effet

$$k(2a + k) < k(2a + 1)$$

et l'inégalité (4) est une conséquence de l'inégalité

$$k(2a + 1) < 2 - a^2 \quad \text{qui s'écrit} \quad k < \frac{2 - a^2}{2a + 1}.$$

Ainsi l'inégalité (4) est satisfaite par tout nombre rationnel positif k tel que

$$k < \inf \left(1, \frac{2 - a^2}{2a + 1} \right).$$

Il résulte de cette étude que la coupure étudiée ne peut être que du 4^e type (*ouverte et non banale*).

II. LE CORPS R DES NOMBRES RÉELS

4. L'ensemble R des nombres réels. — DÉFINITION. — Toute coupure ouverte dans l'ensemble Q des nombres rationnels est dite nombre réel; en particulier toute coupure ouverte non banale est dite nombre irrationnel.

Une coupure fermée banale (2^e et 3^e types du n^o 3) n'est pas un nombre réel; mais une telle coupure détermine un nombre réel, la coupure ouverte banale qui lui a été associée.

NOTATION : $[a, A]$ désigne le nombre réel x déterminé par les classes (a) et (A) de nombres rationnels; dans le cas de la coupure ouverte banale associée à un nombre rationnel r (1^{er} type du n^o 3), on utilise aussi la notation $[r]$.

D'après la définition de l'égalité (I, 6), si $[a', A']$ désigne le nombre réel x' , on écrira $x = x'$ quand les classes (a) et (a') d'une part, et les classes (A) et (A') d'autre part coïncident.

Un nombre réel est un couple, convenablement choisi, de parties de $\mathbb{Q}$, donc un élément de l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{Q})$. On peut donc affirmer que les nombres réels constituent un ensemble; cet ensemble est désigné par $\mathbb{R}$.

Nous allons montrer qu'il est possible :

a) de définir sur $\mathbb{R}$ une addition et une multiplication choisies de façon à munir $\mathbb{R}$ d'une structure de corps et à assurer un isomorphisme entre le sous-ensemble $\mathbb{R}^*$ des nombres réels $[r]$ et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

b) de définir sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre qui, appliquée aux éléments de $\mathbb{R}^*$, redonne la relation d'ordre déjà connue sur $\mathbb{Q}$.

5. Addition sur $\mathbb{R}$. — 1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — Étant donnés deux nombres réels quelconques $x = [a, A]$ et $x' = [a', A']$, l'ensemble (a'') des sommes $a'' = a + a'$ d'un élément quelconque de la classe (a) et d'un élément quelconque de la classe (a') d'une part, l'ensemble (A'') des sommes $A'' = A + A'$ d'un élément quelconque de la classe (A) et d'un élément quelconque de la classe (A') d'autre part, déterminent une coupure ouverte. Le nombre réel $x'' = [a'', A'']$ est dit somme des nombres réels x et x' ; on note

$$x + x' = x'' \quad \text{ou} \quad [a, A] + [a', A'] = [a + a', A + A'] \quad (1)$$

Les classes (a) et (a') n'étant pas vides par hypothèse, il en est de même de (a'') . D'autre part $a_0 + a'_0$ étant un élément quelconque de (a'') , il existe dans (a) un élément $a_1 > a_0$ puisque les coupures données sont ouvertes; $a_1 + a'_0$ est ainsi un élément de (a'') supérieur à $a_0 + a'_0$; (a'') n'admet pas d'élément maximum. On montre de la même façon que (A'') n'est pas vide et n'admet pas d'élément minimum. Cela posé :

α) Soit b un nombre rationnel inférieur à un élément $a_0 + a'_0$ de (a'') .

On peut écrire $b = c + a'_0$, c étant un nombre rationnel inférieur à a_0 ; de ce fait, c appartient à (a) et b , qui est la somme d'un élément de (a) et d'un élément de (a') , appartient à (a'') .

β) se vérifie de la même façon que (α).

γ) A'' et a'' étant deux éléments quelconques de (A'') et (a'') on a

$$A'' - a'' = (A + A') - (a + a') = (A - a) + (A' - a').$$

Du fait que $A - a$ et $A' - a'$ sont positifs, on déduit que $A'' - a''$ est positif, ce qui prouve que (a'') et (A'') sont disjointes. D'autre part, ε étant un nombre rationnel positif donné, nous pouvons choisir a, A, a', A' de façon que :

$$A - a < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad A' - a' < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \text{il en résulte} \quad A'' - a'' < \varepsilon.$$

Nous avons ainsi prouvé que (a'') et (A'') définissent une coupure ouverte.

2° **Cas particuliers.** — α) $x = [r]$ et $x' = [r']$ sont les coupures ouvertes banales associées aux nombres rationnels r et r'

$$\left. \begin{array}{l} a < r < A, \quad \forall a \in (a) \quad \text{et} \quad \forall A \in (A) \\ a' < r' < A', \quad \forall a' \in (a') \quad \text{et} \quad \forall A' \in (A') \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a'' < r + r' < A'' \\ \forall a'' \in (a'') \quad \text{et} \quad \forall A'' \in (A''). \end{array} \right.$$

Le nombre rationnel $r + r'$ n'étant pas classé dans la coupure $[a'', A'']$, celle-ci ne peut être que la coupure ouverte banale $[r + r']$. Retenons :

$$(2) \quad [r] + [r'] = [r + r'].$$

b) x est un nombre réel quelconque, $x' = [r']$ est la coupure ouverte banale liée au nombre rationnel r' . Il est aisé de vérifier que les ensembles (e) des nombres rationnels $a + r'$ et (E) des nombres rationnels $A + r'$ définissent une coupure ouverte dans $\mathbb{Q}$. Montrons que cette coupure coïncide avec $x + x'$, c'est-à-dire que les ensembles (e) et (a'') d'une part, (E) et (A'') d'autre part coïncident.

Tout élément $a_0 + a'_0$ de (a'') étant inférieur à l'élément $a_0 + r'$ de (e) appartient à (e) . Inversement soit $a_1 + r'$ un élément quelconque de (e) ; la coupure x étant ouverte, il existe dans (a) un élément a_2 au moins vérifiant $a_2 > a_1$; écrivons $a_1 + r' = a_2 + \rho$; ρ est rationnel et est inférieur à r' ; ρ est ainsi un élément de (a') et $a_1 + r'$ est un élément de (a'') . Les ensembles (e) et (a'') sont confondus. On prouverait de la même façon que (E) et (A'') sont confondus. On a donc :

$$(3) \quad [a, A] + [r'] = [a + r', A + r'].$$

3° THÉORÈME. — L'ensemble R est un groupe additif abélien.

a) *Commutativité et associativité de l'addition sur R .* — Elles résultent de ce que dans la formule

$$(1) \quad [a, A] + [a', A'] = [a + a', A + A']$$

les sommes $a + a'$ et $A + A'$ de nombres rationnels sont commutatives et associatives.

b) *L'addition sur R admet pour élément neutre la coupure banale $[0]$, associée au nombre rationnel 0.* — En faisant $r' = 0$ dans la formule (3) et en utilisant la commutativité de l'addition, on a en effet, quel que soit le nombre réel $x = [a, A]$,

$$[a, A] + [0] = [0] + [a, A] = [a, A].$$

Rappelons qu'une loi interne ne peut admettre plus d'un élément neutre.

c) *Tout élément de R est symétrisable dans l'addition.* — Étant donné le nombre réel $x = [a, A]$, l'ensemble (a^*) des nombres rationnels opposés aux éléments de (A) et l'ensemble (A^*) des nombres rationnels opposés aux éléments de (a) satisfont aux conditions (α) , (β) , (γ) du n° 2 et définissent une coupure ouverte $x^* = [-A, -a]$.

Calculons $x + x^* = [b, B]$. Tous les éléments de (b) , de la forme $a - A$, sont négatifs, tous ceux de (B) , de la forme $A - a$, sont positifs; le nombre rationnel 0 n'étant pas classé dans la coupure $[b, B]$, c'est que celle-ci est la coupure ouverte banale $[0]$. Tout $x \in R$ admet ainsi dans l'addition au moins un symétrique x^* ; il n'y a pas d'autre symétrique puisque l'addition est associative (I, 24). Le symétrique de x est dit *opposé* de x (en abrégé opp x). On retiendra

$$\text{opp } [a, A] = [-A, -a]$$

REMARQUE. — L'opposé de la coupure ouverte banale $[r]$ est la coupure ouverte banale $[-r]$; en effet r n'étant classé ni dans (a) ni dans (A) , $(-r)$ n'est classé ni dans (A^*) ni dans (a^*) .

4° **Soustraction.** — De l'étude générale des groupes additifs (I, 31), il résulte que, x et x' étant deux éléments quelconques de R , il existe un élément y de R et un seul tel que $x = x' + y$. Ce nombre est la somme de x et de l'opposé de x' . On l'appelle *différence* entre x et x' ou *excès* de x sur x' ; on le note $y = x - x'$. On a donc

$$x - x' = x + \text{opp } x';$$

On retiendra

$$(4) \quad [a, A] - [a', A'] = [a, A] + [-A', -a'] \quad \text{ou} \quad [a - A', A - a'].$$

En particulier

$$x - x' = [0] \iff x + \text{opp } x' = [0] \iff x = \text{opp}(\text{opp } x') \iff x = x'$$

L'égalité $[0] - x = \text{opp } x$ justifie la notation pratique $\text{opp } x = -x$, si bien que $x - x' = x + (-x')$.

CAS PARTICULIERS. — En utilisant les formules (2) et (3) et le fait que l'opposé de $[r]$ est $[-r]$ on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (5) \quad & [r] - [r'] = [r - r'] \\ (6) \quad & [a, A] - [r] = [a - r, A - r] \\ (7) \quad & [r] - [a, A] = [r - A, r - a]. \end{aligned}$$

Pour des raisons de commodité, nous allons introduire la relation d'ordre sur R avant la multiplication.

6. **Relation d'ordre sur R .** — 1° DÉFINITION I. $x = [a, A]$ étant un nombre réel on écrit $x > [0]$, et on lit x supérieur à $[0]$ ou x positif, si et seulement si la classe inférieure (a) contient le nombre rationnel 0.

$$\text{Cas particulier :} \quad [r] > [0] \iff r > 0.$$

$$\text{THÉORÈME :} \quad x > [0] \quad \text{et} \quad x' > [0] \implies x + x' > [0].$$

La classe inférieure de $x + x'$ contient en effet la somme 0 des deux éléments des classes inférieures de x et x' égaux à 0.

2° DÉFINITION II. x et x' étant deux nombres réels, on écrit $x > x'$ ou $x' < x$, et on lit x supérieur à x' ou x' inférieur à x , si et seulement si $x - x' > [0]$.

CAS PARTICULIERS. — En utilisant la définition II et les formules (5), (6) (7) du n° 5 on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} (1) \quad & [r] > [r'] \iff r > r' \\ (2) \quad & [a, A] > [r] \iff r \in (a) \\ (3) \quad & [r] > [a, A] \iff r \in (A); \quad \text{en particulier } x < [0] \iff 0 \in (A) \end{aligned}$$

REMARQUE I. — Nous avons

$$\begin{aligned} x = [0] &\iff 0 \notin (a) & \text{et} & \quad 0 \notin (A); \\ x > [0] &\iff 0 \in (a); & x < [0] &\iff 0 \in (A). \end{aligned}$$

Il en résulte que tout nombre réel x vérifie une des trois relations $x = [0]$, $x > [0]$ ou $x < [0]$, mais qu'il n'en vérifie qu'une.

REMARQUE II. $(-a)$ désignant l'ensemble des nombres rationnels opposés aux éléments de (a) on constate que $0 \in (a) \iff 0 \in (-a)$.

Or $(-a)$ est la classe supérieure du nombre réel $(-x)$ opposé de x . Par conséquent

$$x > [0] \iff -x < [0].$$

REMARQUE III. — Nous avons

$$\begin{aligned} x = x' &\iff x - x' = [0]; & x > x' &\iff x - x' > [0]; \\ x < x' &\iff x' - x > [0] &\iff x - x' < [0] & \text{(Remarque II).} \end{aligned}$$

Il en résulte, d'après la remarque I, que tout couple (x, x') de nombres réels vérifie une des trois relations $x = x'$, $x > x'$ ou $x < x'$, mais qu'il n'en vérifie qu'une.

3° THÉORÈME. — La relation $>$ est une relation d'ordre strict et total sur R .

La relation n'est pas symétrique, d'après la remarque III.

Elle est transitive. En effet

$$\begin{aligned} x > y \quad \text{et} \quad y > z &\iff x - y > [0] \quad \text{et} \quad y - z > [0] \\ \text{ce qui entraîne} \quad (x - y) + (y - z) > [0] &\quad \text{ou} \quad x - z > [0] \iff x > z. \end{aligned}$$

Le fait que R est totalement ordonné par cette relation résulte de la remarque III.

REMARQUE. — La relation d'ordre est compatible avec l'addition; cela veut dire que

$$x > y \iff x + z > y + z, \quad \forall z \in R.$$

Les deux relations considérées sont en effet respectivement équivalentes aux relations identiques $x - y > [0]$ et $(x + z) - (y + z) > [0]$.

4° Les formules (2) et (3) montrent que le nombre réel $[a, A]$ est supérieur à toute coupure ouverte banale $[a]$ liée à un élément de sa classe inférieure et inférieur à toute coupure ouverte banale $[A]$ liée à un élément de sa classe supérieure.

La classe inférieure de $x - x' = [a, A] - [a', A']$ étant formée des différences $a - A'$, $x > x'$ c'est-à-dire $x - x' > [0]$ équivaut au fait que l'une des différences $a - A'$ est égale à 0. On peut donc donner de la définition II la forme équivalente :

DÉFINITION. — On écrit $[a, A] > [a', A']$ si et seulement si les classes (a) et (A') ont un élément commun.

r désignant cet élément commun,

$$r \in (a) \implies [r] < [a, A], \quad r \in (A') \implies [r] > [a', A']$$

en résumé :

$$[a', A'] < [r] < [a, A].$$

On peut énoncer ce résultat de la façon suivante :

THÉORÈME. — L'ensemble des nombres réels compris strictement entre deux nombres réels distincts n'est pas vide.

Il en résulte que cet ensemble contient une infinité d'éléments, puisque le théorème s'applique aux couples $[a', A']$ et $[r]$ d'une part, $[r]$ et $[a, A]$ d'autre part; etc...

5° DÉFINITION. — On écrit $x \geq x'$ si et seulement si $x > x'$ ou $x = x'$.

Il s'agit là d'une relation d'ordre large car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

7. Multiplication sur l'ensemble R^+ des nombres réels positifs. — Rappelons que $x > [0]$ signifie que la classe inférieure de la coupure ouverte x dans Q contient 0, tous les nombres rationnels négatifs, et aussi des nombres rationnels positifs puisqu'elle n'admet pas d'élément maximum. Ceci nous permet de définir les nombres réels positifs comme des coupures ouvertes dans l'ensemble Q^+ des nombres rationnels positifs. Nous écrivons encore $x = [a, A]$, mais il sera entendu dans tout ce paragraphe que les éléments des deux classes sont positifs.

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — Étant donnés deux nombres réels positifs $x = [a, A]$ et $x' = [a', A']$, l'ensemble (a'') des produits d'un élément quelconque de la classe (a) et d'un élément quelconque de la classe (a') d'une part, l'ensemble (A'') des produits d'un élément quelconque de la classe (A) et d'un élément quelconque de la classe (A') d'autre part, déterminent une coupure ouverte dans Q^+ . Le nombre réel positif $x'' = [a'', A'']$ est dit produit des nombres réels positifs x et x' ; on note

$$xx' = x'' \quad \text{ou} \quad [a, A][a', A'] = [aa', AA'] \quad (1)$$

Les classes (a) et (a') n'étant pas vides par hypothèse, il en est de même de (a'') . D'autre part $a_0a'_0$ étant un élément quelconque de (a'') , il existe dans (a) un élément $a_1 > a_0$ puisque les coupures données sont ouvertes; $a_1a'_0$ est ainsi un élément de (a'') supérieur à $a_0a'_0$; (a'') n'admet pas d'élément maximum. On montre de la même façon que (A'') n'admet pas d'élément minimum. Cela étant acquis :

α) Soit b un nombre rationnel positif inférieur à un élément $a_0a'_0$ de (a'') . On peut écrire $b = ca'_0$, c étant un nombre rationnel positif inférieur à a_0 ; de ce fait, c appartient à (a) et b , qui est le produit d'un élément de (a) et d'un élément de (a') , appartient à (a'') .

β) se vérifie de la même façon que (α).

γ) A'' et a'' étant deux éléments quelconques de (A'') et (a'') on a

$$AA' - aa' = (A' - a')A + (A - a)a'.$$

On en déduit $A'' - a'' > 0$; (a'') et (A'') sont disjointes. D'autre part, soit A_0 et A'_0 respectivement des éléments fixes quelconques de (A) et (A') ; nous avons, en posant $M = \sup(A_0, A'_0)$, $a' < A'_0 \leq M$; en astreignant A à la condition $A \leq M$, nous avons enfin :

$$AA' - aa' < M[(A - a) + (A' - a')];$$

ϵ étant un nombre rationnel positif donné, nous pouvons choisir a , A , a' , A' de façon que $A \leq M$, $A - a < \frac{\epsilon}{2M}$ et $A' - a' < \frac{\epsilon}{2M}$. Il en résulte $A'' - a'' < \epsilon$.

Nous avons ainsi prouvé que (a'') et (A'') définissent une coupure ouverte dans Q^+ .

2° Cas particuliers. — En opérant comme dans le cas de l'addition, on montre que :

a) si $[r]$ et $[r']$ sont les coupures ouvertes banales liées aux nombres rationnels positifs r et r' on a

$$(2) \quad [r] [r'] = [rr'];$$

b) si $x = [a, A]$ est un nombre réel positif quelconque et si $[r]$ est la coupure ouverte banale liée au nombre rationnel positif r' on a

$$(3) \quad [a, A] [r'] = [ar', Ar'].$$

3° THÉORÈME. — L'ensemble R^+ est un groupe multiplicatif abélien.

a) *Commutativité et associativité de la multiplication sur R^+ .* Elles résultent de ce que dans la formule

$$(1) \quad [a, A] [a', A'] = [aa', AA']$$

les produits aa' et AA' de nombres rationnels positifs sont commutatifs et associatifs.

b) *La multiplication sur R^+ admet pour élément neutre la coupure banale [1], associée au nombre rationnel positif 1.* En faisant $r' = 1$ dans la formule (3) et en utilisant la commutativité du produit, on a en effet, quel que soit le nombre réel positif $x = [a, A]$,

$$[a, A] [1] = [1] [a, A] = [a, A].$$

Rappelons qu'une loi interne ne peut admettre plus d'un élément neutre.

c) *Tout élément de R^+ est symétrisable dans la multiplication.* A tout nombre réel positif $x = [a, A]$ associons la classe (a^*) des nombres rationnels positifs $\frac{1}{A}$

et la classe (A^*) des nombres rationnels positifs $\frac{1}{a}$. Les classes (a^*) et (A^*) satisfont aux conditions (α) et (β) du n° 2; montrons qu'elles sont adjacentes; on a

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{A} < \frac{A - a}{a^2};$$

a_0 étant un élément fixe quelconque de (a) , en astreignant a à la condition $a > a_0$, il vient :

$$0 < \frac{1}{a} - \frac{1}{A} < \frac{A - a}{a_0^2}.$$

ϵ étant un nombre rationnel positif donné nous pouvons choisir a et A de façon que $a > a_0$ et $A - a < \epsilon a_0^2$. Il en résulte

$$0 < \frac{1}{a} - \frac{1}{A} < \epsilon.$$

Par suite (a^*) et (A^*) sont les classes d'une coupure ouverte dans Q^+ , $x^* = \left[\frac{1}{A}, \frac{1}{a} \right]$.

Calculons $xx^* = [b, B]$. Tous les éléments de (b) sont inférieurs à 1, tous ceux de (B) sont supérieurs à 1; le nombre rationnel 1 n'étant pas classé dans la coupure $[b, B]$, c'est que celle-ci est la coupure ouverte banale [1]. Tout $x \in R^+$ admet ainsi dans la multiplication sur R^+ au moins un symétrique x^* ; il n'y a pas d'autre symétrique puisque la multiplication est associative (I, n° 24). Le symétrique de x est dit inverse de x (en abrégé $\text{inv } x$). Retenons

$$\text{inv}[a, A] = \left[\frac{1}{A}, \frac{1}{a} \right].$$

REMARQUE. — L'inverse de la coupure ouverte banale $[r]$, où $r \in Q^+$, est $\left[\frac{1}{r} \right]$; en effet r n'étant classé ni dans (a) ni dans (A) , $\frac{1}{r}$ n'est classé ni dans (A^*) ni dans (a^*) .

4° **Division.** — De l'étude générale des groupes multiplicatifs (I, n° 32) il résulte que, x et x' étant deux éléments quelconques de R^+ , il existe un élément y de R^+ , et un seul tel que $x = x'y$. Ce nombre est le produit de x et de l'inverse de x' . On l'appelle *quotient* de x par x' ; on le note $y = \frac{x}{x'}$.

On a donc
$$\frac{x}{x'} = x \times \text{inv } x'.$$

On retiendra

$$(4) \quad \frac{[a, A]}{[a', A']} = [a, A] \times \left[\frac{1}{A'}, \frac{1}{a'} \right] \quad \text{ou} \quad \left[\frac{a}{A'}, \frac{A}{a'} \right].$$

En particulier

$$\frac{x}{x'} = [1] \iff x \times \text{inv } x' = [1] \iff x = \text{inv}(\text{inv } x') \iff x = x'.$$

L'égalité $\frac{[1]}{x} = \text{inv } x$ justifie la notation pratique $\text{inv } x = x^{-1}$, si bien que $\frac{x}{x'} = xx'^{-1}$.

CAS PARTICULIERS. — En utilisant les formules (2) et (3) et le fait que l'inverse de $[r]$ est $\left[\frac{1}{r}\right]$ on obtient les relations suivantes

$$\frac{[r]}{[r']} = \left[\frac{r}{r'}\right] \quad \frac{[a, A]}{[r]} = \left[\frac{a}{r}, \frac{A}{r}\right] \quad \frac{[r]}{[a, A]} = \left[\frac{r}{A}, \frac{r}{a}\right]$$

5° La multiplication sur R^+ est distributive par rapport à l'addition.

En effet dans la formule :

$$(1) \quad [a, A] [a', A'] = [aa', AA'],$$

les produits aa' et AA' de nombres rationnels positifs sont distributifs par rapport à la somme.

8. Extension à R de la multiplication sur R^+ . — 1° Opérant comme au n° 34-6° du tome I, à propos de l'extension à Z de la multiplication sur N , considérons la loi interne sur R définie par les axiomes suivants :

le produit sur R de deux éléments de R^+ est leur produit sur R^+

$$\left. \begin{aligned} x(-x') &= (-x')x = -xx' \\ (-x)(-x') &= xx' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\forall x \quad \text{et} \quad \forall x' \in R^+ \\ &\forall x \in R. \end{aligned}$$

$$x[0] = [0]x = [0],$$

Nous montrerions que cette multiplication sur R est commutative, associative, qu'elle est distributive par rapport à l'addition sur R , que tous les éléments de R , sauf $[0]$, sont réguliers, enfin que $[1]$ est élément neutre.

Montrons qu'ici tout élément de R , sauf $[0]$, est symétrisable dans la multiplication. $xx' = [1]$ exige que x et x' aient le même signe; $x \in R^+$ a donc dans la multiplication sur R un symétrique et un seul, son inverse x^{-1} dans R^+ . Un nombre négatif $(-x)$ ne peut avoir pour symétrique qu'un nombre négatif $(-x')$. Or

$$(-x)(-x') = [1] \iff xx' = [1]$$

$(-x)$ admet donc dans la multiplication sur R le symétrique $(-x^{-1})$.

REMARQUE. — $\forall r \neq 0$, et $r \in Q$, $[r]$ admet pour inverse $\left[\frac{1}{r}\right]$.

2° Montrons que la relation d'ordre est compatible avec la multiplication par un nombre positif.

$$\text{Soit} \quad x > y \iff x - y > [0] \quad \text{et} \quad z > [0].$$

Le produit des deux nombres positifs $x - y$ et z est un nombre positif. On a donc

$$(x - y)z > [0] \quad \text{c'est-à-dire} \quad xz - yz > [0] \iff xz > yz.$$

9. Le corps R des nombres réels. — 1° Nous avons défini sur l'ensemble R des réels deux lois de composition interne :

Une addition qui est une loi de groupe abélien;

Une multiplication qui est associative et distributive par rapport à l'addition. L'ensemble R est donc un anneau.

En outre la multiplication sur l'ensemble des éléments de R autres que l'élément neutre [0] de l'addition est une loi de groupe abélien. L'ensemble R est donc un corps commutatif.

Il résulte du n° 8 que R est un corps ordonné (I, 40). D'autre part R est un corps de caractéristique nulle (I, 40); en effet, en appliquant les notations du n° 4 et la formule (2) du n° 5, 2°, l'addition de n coupures ouvertes banales égales à [1] donne

$$[1] + \dots + [1] = [n];$$

quel que soit n , une telle somme n'est pas nulle, ce qui entraîne le résultat annoncé.

2° **Isomorphisme entre Q et une partie de R.** — Nous avons vu qu'il existe une correspondance biunivoque entre le corps Q des rationnels et l'ensemble R* des coupures ouvertes banales. Cette correspondance est définie par

$$r \in Q \longleftrightarrow [r] \in R^*.$$

Nous avons montré :

$$\begin{array}{ll} [r + r'] = [r] + [r'] & \text{et} \quad [rr'] = [r] [r'] \\ \text{c'est-à-dire} & \\ r + r' \longleftrightarrow [r] + [r'] & \text{et} \quad rr' \longleftrightarrow [rr']. \end{array}$$

Les ensembles Q et R* sont donc isomorphes relativement aux lois d'addition et de multiplication. Nous nous autoriserons de cet isomorphisme pour identifier R* et Q. Nous dirons dorénavant nombre rationnel au lieu de coupure banale; nous écrivons $r, 0, 1, \dots$ au lieu de $[r], [0], [1], \dots$

REMARQUE. — Ainsi se trouve justifié *a posteriori* le fait que tout nombre réel qui n'est pas rationnel a été appelé nombre irrationnel.

3° THÉORÈME. — Le corps R est archimédien.

Cela signifie que x et y étant deux nombres réels positifs quelconques, il existe un entier naturel N tel que : $Nx > y$.

$$\text{Soit} \quad x = [a, A] \quad \text{et} \quad y = [a', A'].$$

Désignons par a_0 un élément positif de la classe (a), arbitrairement choisi et par A'_0 un élément de la classe (A'), arbitrairement choisi (automatiquement positif). a_0 et A'_0 étant des nombres rationnels positifs et le corps Q étant archimédien (I, n° 35), il existe un entier naturel N tel que $Na_0 > A'_0$.

$$x > a_0 \implies Nx > Na_0 > A'_0; \quad \text{et alors :} \quad A'_0 > y \implies Nx > y.$$

4° **Valeur absolue.** — On prolonge à R la valeur absolue définie sur Q par la convention :

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geq 0, \quad |x| = -x \quad \text{si} \quad x \leq 0.$$

On démontre, comme dans le cas de Q , que cette valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I} & a) |x| \geq 0 \quad b) |x| = 0 \iff x = 0 \\ \text{II} & |xy| = |x||y| \\ \text{III} & |x + y| \leq |x| + |y| \end{array} \right\} \forall x, y \in \mathbb{R}$$

5° Coupure dans l'ensemble des nombres réels. — Généralisant la définition donnée au n° 2, 1° on peut dire que l'on a effectué une coupure dans $\mathbb{R}$ quand on a formé deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, (x) et (X) , non vides et disjoints, possédant les trois propriétés (α) , (β) , (γ) , dans l'énoncé desquelles le mot « réel » remplace le mot « rationnel ». En particulier, on peut dire (2, 3°) qu'on a effectué une coupure dans $\mathbb{R}$ quand on a réalisé une partition de $\mathbb{R}$ en deux classes non vides possédant les propriétés (α) et (β) .

Il est naturel de se demander si ces coupures permettent de compléter $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de le plonger dans un ensemble plus vaste, de la même façon que les coupures dans Q ont permis de compléter Q , en le plongeant dans $\mathbb{R}$.

L'étude suivante montre qu'il n'en est rien.

(x) et (X) étant les deux classes d'une coupure ouverte dans $\mathbb{R}$, désignons par (a) l'ensemble des nombres rationnels contenus dans (x) et par (A) l'ensemble des nombres rationnels contenus dans (X) . On constate immédiatement que les ensembles (a) et (A) ne sont pas vides, qu'ils sont disjoints et qu'ils possèdent les propriétés (α) et (β) des coupures dans Q . D'autre part, ε étant un nombre rationnel positif arbitraire nous savons qu'il existe

$$x \in (x) \text{ et } X \in (X) \text{ tels que } X - x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel. On peut donc trouver deux nombres rationnels a et A tels que :

$$x - \frac{\varepsilon}{3} < a < x < X < A < X + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et a fortiori} \quad 0 < A - a < \varepsilon.$$

$a \in (x)$, d'après la propriété (α) de la coupure dans $\mathbb{R}$. Il en résulte $a \in (a)$; $A \in (X)$, d'après la propriété (β) de la coupure dans $\mathbb{R}$. Il en résulte $A \in (A)$.

Les ensembles (a) et (A) possèdent donc aussi la propriété (γ) des coupures dans Q ; ils sont ainsi les classes d'une coupure dans Q . Ils définissent un nombre réel λ ; λ ne peut être inférieur à un élément x_0 de (x) , car un rationnel r compris entre λ et x_0 appartiendrait à (A) , classe supérieure de λ , et à (a) , ensemble des rationnels contenus dans (x) , ce qui est absurde; de même, λ ne peut être supérieur à un élément X_0 de (X) . La coupure donnée dans $\mathbb{R}$ étant supposée ouverte, (x) n'a pas d'élément maximum et $\lambda \notin (x)$; de même $\lambda \notin (X)$.

Ainsi dans toute coupure ouverte dans $\mathbb{R}$ il existe un nombre réel non classé. En adoptant la même terminologie qu'au n° 3 nous énoncerons :

THÉORÈME. — Toute coupure ouverte dans l'ensemble R est banale.

On peut encore énoncer le résultat précédent en disant : étant donné une coupure ouverte dans R , il existe une coupure ouverte dans Q qui définit le même nombre réel.

En d'autres termes encore, on ne peut pas, par des coupures, plonger R dans un ensemble plus vaste.

III. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ENSEMBLES DE NOMBRES RÉELS

10. La droite numérique. — Le tableau suivant fait connaître la terminologie et les notations adoptées pour définir les sous-ensembles de R le plus souvent utilisés.

l'ensemble des réels x tels que :	s'appelle	et est représenté par la notation :
$a \leq x \leq b$	intervalle fermé ou segment	$[a, b]$
$a < x < b$	intervalle ouvert ou intervalle	$]a, b[$
$a < x \leq b$	intervalle semi-ouvert	$]a, b]$
$a \leq x < b$		$[a, b[$
$x > a$	la droite de a	$]a, +\infty[$
$x < a$	la gauche de a	$]-\infty, a[$
	demi-droite	

R est écrit quelquefois $]-\infty, +\infty[$. Un élément de R est appelé un *point*.

Dans les quatre premiers cas envisagés ci-dessus, le nombre positif $b - a$ est appelé *longueur* de l'intervalle, ou du segment.

Dans le premier cas, on pourra envisager l'hypothèse $a = b$, c'est-à-dire considérer comme intervalle fermé un ensemble contenant un seul point; au contraire, un intervalle ouvert ne peut se réduire à un point.

DÉFINITION I. — On appelle *voisinage* de $a \in R$ tout sous-ensemble de R qui contient un intervalle ouvert dont un point est a .

Un voisinage de a peut se noter $\mathcal{V}(a)$.

THÉORÈME I. — L'intersection de deux voisinages de a , et par conséquent d'un nombre fini de voisinages de a , est un voisinage de a .

$\mathcal{V}_1(a)$ et $\mathcal{V}_2(a)$ contiennent respectivement $]a - \alpha_1, a + \alpha_1[$ et $]a - \alpha_2, a + \alpha_2[$, α_1 et α_2 étant deux nombres strictement positifs. Leur intersection contient $]a - \alpha, a + \alpha[$, avec $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha > 0$. Il s'agit donc d'un voisinage de a .

Ensuite $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3$ est l'intersection de $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ et de $\mathcal{V}_3$, etc...

DÉFINITION II. — On appelle *voisinage* de $+\infty$ (resp. de $-\infty$), la droite (resp. la gauche) d'un nombre fixe quelconque.

Un voisinage de $+\infty$ peut se noter $\mathcal{O}(+\infty)$.

THÉORÈME II. — L'intersection d'un nombre fini de voisinages de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) est un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$).

$\mathcal{O}_1(+\infty)$ et $\mathcal{O}_2(+\infty)$ contiennent respectivement la droite du nombre A_1 et celle du nombre A_2 . Leur intersection contient la droite du nombre $A = \sup(A_1, A_2)$. Il s'agit donc d'un voisinage de $+\infty$. Le résultat s'étend de proche en proche.

Nous exprimerons le fait que nous avons défini les voisinages de tout point de $\mathbb{R}$ en disant que nous avons muni $\mathbb{R}$ d'une *topologie*; nous appellerons *droite numérique* l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de cette topologie.

Une interprétation géométrique des nombres réels sera étudiée au n° 37.

II. Ensembles bornés. Borne supérieure, borne inférieure.

1° DÉFINITION. — Un ensemble E de nombres réels est dit *majoré* (resp. *minoré*) s'il n'est pas vide et s'il existe un nombre fixe k supérieur ou égal (resp. inférieur ou égal) à tous les éléments de E . On dit que k est un *majorant* (resp. un *minorant*) de E .

2° THÉORÈME ET DÉFINITION. — Tout ensemble E de nombres réels qui est majoré admet un majorant plus petit que tous les autres. Ce majorant M , qui est dit *borne supérieure* de E , possède les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 1^\circ \forall x \in E, \quad x &\leq M. \\ 2^\circ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in E \quad \text{tel que} \quad x &> M - \varepsilon. \end{aligned}$$

La démonstration du théorème comprend trois parties :

1. — E étant un ensemble de nombres réels qui admet le majorant k , séparons les nombres rationnels en :

classe (a) : les rationnels qui ne sont pas des majorants de E ;

classe (A) : les rationnels qui sont des majorants de E .

Visiblement tout rationnel est classé et les classes sont disjointes. Elles ne sont pas vides : (A) contient au moins tous les rationnels supérieurs à k , (a) contient au moins tous les rationnels inférieurs à un élément x_0 de E (l'existence de x_0 résulte du fait que E n'est pas vide). Les propriétés (α) et (β) des coupures sont satisfaites :

— si a n'est pas majorant de E , il en est de même de tout rationnel inférieur à a .

— si A est majorant de E , il en est de même de tout rationnel supérieur à A . (a) et (A) sont donc les classes d'une coupure dans $\mathbb{Q}$ et déterminent un nombre réel M .

II. — Montrons par l'absurde que M est un majorant de E . S'il existait un élément x de E supérieur à M , on pourrait intercaler un nombre rationnel ρ entre les nombres réels distincts M et x , soit $M < \rho < x$.

$$\left. \begin{array}{l} \rho > M \implies \rho \in (A) \implies \rho \text{ majore } E \\ \rho < x \implies \rho \text{ ne majore pas } E \end{array} \right\} \text{contradiction.}$$

III. — Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas un majorant M' de E inférieur à M . Dans le cas contraire, on pourrait intercaler ρ' rationnel entre M et M' , soit $M' < \rho' < M$.

$$\left. \begin{array}{l} \rho' < M \implies \rho' \in (a) \implies \rho' \text{ ne majore pas } E \\ \rho' > M' \implies \rho' \text{ majore } E \end{array} \right\} \text{contradiction.}$$

Ainsi, ε étant un nombre positif arbitraire, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E , autrement dit il existe au moins un élément de l'ensemble supérieur à $M - \varepsilon$.

3° On démontre de la même façon :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — Tout ensemble E de nombres réels qui est minoré admet un minorant plus grand que tous les autres. Ce minorant m , qui est dit borne inférieure de E , possède les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1^\circ \forall x \in E, & x \geq m. \\ 2^\circ \forall \varepsilon > 0, & \exists x \in E \text{ tel que } x < m + \varepsilon. \end{array}$$

4° **Ensemble borné.** — **DÉFINITION.** — Un ensemble de nombres réels qui est à la fois majoré et minoré est dit borné.

Tout ensemble E borné admet une borne supérieure et une borne inférieure que nous noterons dorénavant

$$M = \sup E; \quad m = \inf E.$$

Si x désigne l'élément générique de l'ensemble E , on écrit aussi

$$M = \sup x; \quad m = \inf x.$$

12. **Point d'accumulation.** — 1° **DÉFINITION.** — On dit qu'un ensemble E de nombres réels admet pour point d'accumulation le nombre λ qui appartient ou non à E , si tout intervalle ouvert contenant λ contient un point de E autre que λ .

EXEMPLE I. — Tout point $\lambda \in \mathbb{R}$ est point d'accumulation de l'ensemble Q des nombres rationnels. En effet nous avons vu que, quel que soit le nombre réel ε , $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ contient un nombre rationnel. λ peut appartenir ou ne pas appartenir à Q .

EXEMPLE II. — L'ensemble E des nombres réels de la forme $u_n = \frac{1}{n} + \cos \frac{2n\pi}{3}$, où n est un entier relatif différent de 0, admet les points d'accumulation 1 et $-\frac{1}{2}$, extérieurs à E .

2° *Existence nécessaire d'une infinité d'éléments distincts.* — Soit λ un point d'accumulation de l'ensemble E et ε un nombre positif arbitraire. Par hypothèse, il existe au moins un élément x_1 de E , distinct de λ , dans $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$. ε_1 désignant le nombre positif $|\lambda - x_1|$, il existe au moins un élément x_2 de E distinct de λ , et d'ailleurs de x_1 , dans $]\lambda - \varepsilon_1, \lambda + \varepsilon_1[$. De proche en proche on met en évidence l'existence dans $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ d'une infinité $x_1, x_2, \dots$ d'éléments distincts de E . Il en résulte qu'une condition nécessaire pour qu'un ensemble possède des points d'accumulation est qu'il contienne une infinité d'éléments distincts.

C'est ainsi que si un ensemble borné E admet un nombre fini d'éléments distincts, $\sup E$ et $\inf E$ ne sont pas des points d'accumulation. Si E est un ensemble borné admettant un nombre infini d'éléments distincts, $\sup E$ peut être un point d'accumulation (c'est ce qui se produit pour la borne supérieure 0 de l'ensemble E des nombres $u_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$) mais $\sup E$ peut ne pas être un point d'accumulation (c'est ce qui se produit pour la borne supérieure $\frac{4}{3}$ de l'ensemble E des nombres $u_n = \frac{1}{n} + \cos \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}$); il en est de même pour $\inf E$.

3° Voici une très importante réciproque du fait que seuls les ensembles ayant un nombre infini d'éléments peuvent avoir des points d'accumulation.

THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS. — Tout ensemble borné de nombres réels ayant une infinité d'éléments distincts possède au moins un point d'accumulation.

E étant un ensemble de nombres réels majoré par k , minoré par k' et admettant une infinité d'éléments distincts, séparons les nombres rationnels en :

Classe (a) : les rationnels α inférieurs à un nombre infini d'éléments distincts de E ;

Classe (A) : les rationnels A tels qu'il n'existe qu'un nombre fini (éventuellement nul) d'éléments distincts de E supérieurs à A .

Visiblement tout rationnel est classé et les classes sont disjointes. Elles ne sont pas vides : (a) contient au moins les rationnels inférieurs à k' et (A) les rationnels supérieurs à k . Les propriétés (α) et (β) des coupures sont d'autre part satisfaites par cette partition de $\mathbb{Q}$. (a) et (A) sont les classes d'une coupure et déterminent un nombre réel L .

Quel que soit le nombre réel positif ε , on peut intercaler un nombre rationnel ρ entre $L - \varepsilon$ et L et un nombre rationnel ρ' entre L et $L + \varepsilon$, soit

$$L - \varepsilon < \rho < L < \rho' < L + \varepsilon.$$

$\rho < L \implies \rho \in (a) \implies$ il existe une infinité d'éléments distincts de E , supérieurs à ρ , donc à $L - \varepsilon$

$\rho' > L \implies \rho' \in (A) \implies$ il n'existe qu'un nombre fini d'éléments distincts de E , supérieurs à ρ' ; *a fortiori* il n'existe qu'un nombre fini d'éléments distincts de E , supérieurs à $L + \varepsilon$.

Tout intervalle $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ contient ainsi une infinité d'éléments distincts de E , L est point d'accumulation de E , ce qui démontre la propriété.

REMARQUE. — Reprenons le raisonnement précédent : un nombre L' supérieur à L ne peut être point d'accumulation de E puisqu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments distincts de E supérieurs à $\frac{L+L'}{2}$, ce que l'on vérifie en choisissant $\varepsilon = \frac{L'-L}{2}$. Autrement dit L est la borne supérieure de l'ensemble E' des points d'accumulation de E ; une telle borne, quand elle existe, est dite limite supérieure (ou plus grande limite) de l'ensemble E ; on la note $\lim E$.

4° DÉFINITION. — On appelle point isolé d'un ensemble E tout élément de E qui n'est pas un point d'accumulation de l'ensemble.

*DÉFINITION. — La réunion $\bar{E}$ d'un ensemble E et de l'ensemble E' des points d'accumulation de E est dite adhérence de E . Un ensemble est dit fermé s'il coïncide avec son adhérence c'est-à-dire s'il contient ses points d'accumulation éventuels.

13. Ensembles adjacents. — 1° DÉFINITION. — On dit que deux ensembles non vides de nombres réels, (e) et (E) , donnés dans cet ordre, sont adjacents si

- a) tout élément de (e) est inférieur ou égal à tout élément de (E) ,
- b) quel que soit le nombre positif ε , il existe un couple d'éléments x de (e) et X de (E) qui vérifie $X - x < \varepsilon$.

Majoré par un élément quelconque de (E) , l'ensemble (e) admet une borne supérieure t ; minoré par un élément quelconque de (e) , l'ensemble (E) admet une borne inférieure L . On ne peut avoir $t > L$; sinon il existerait, d'après les propriétés des bornes, un élément x_0 de (e) supérieur à $\frac{t+L}{2}$ et un élément X_0 de (E) inférieur à $\frac{t+L}{2}$; on aurait $x_0 > X_0$, en contradiction avec (a).

On ne peut avoir $L > t$; sinon on aurait $X - x \geq L - t$ pour tout couple (x, X) , en contradiction avec (b). Ainsi, $t = L$, ce qui permet d'énoncer :

THÉORÈME. — Deux ensembles adjacents de nombres réels ont une borne commune, supérieure pour l'un et inférieure pour l'autre.

2° RÉCIPROQUE. — Si deux ensembles de nombres réels ont une borne commune, supérieure pour l'un et inférieure pour l'autre, ils sont adjacents.

Nous supposons $\lambda = \sup (e) = \inf (E)$.

$\forall x \in (e)$ et $\forall X \in (E)$, $x \leq \lambda \leq X \implies$ la condition (a) est vérifiée.

D'autre part,

$$\forall \varepsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in (e) \text{ tel que } x > \lambda - \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists X \in (E) \text{ tel que } X < \lambda + \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \implies (x, X) \text{ vérifie (b)}$$

EXEMPLE : les deux classes d'une coupure dans Q ou dans R sont deux ensembles adjacents.

3° *Intérêt des ensembles adjacents.* — La connaissance de deux ensembles adjacents implique celle de leur borne commune λ . Contrairement à ce qui se passe dans le cas des coupures, la définition du nombre λ par deux ensembles adjacents n'exige pas que tous les rationnels (ou tous les réels) soient classés à l'exception peut-être de l'un d'entre eux. Nous étudierons au chapitre suivant le cas particulier important des suites adjacentes : elles permettent de déterminer un nombre réel d'une manière extrêmement commode.

IV. PUISSANCES ET RACINES EXPÓSANTS GÉNÉRALISÉS

14. **Puissances.** — 1°. DÉFINITION. m étant un entier positif, on appelle puissance m° d'un nombre réel x , et on représente par la notation x^m , le produit de m facteurs égaux à x .

Conséquences : a) Quel que soit m , $x = 0 \implies x^m = 0$.

b) Si m est pair, x^m est positif quel que soit x (différent de 0).

c) Si m est impair, x^m a le même signe que x (différent de 0).

2° **Règles de calcul relatives aux puissances.** — L'associativité et la commutativité du produit sur $\mathbb{R}$ conduisent aux égalités suivantes :

(I) $x^m x^{m'} = x^{m+m'}$;	(II) $(x^m)^{m'} = x^{mm'}$;	(III) $(xy)^m = x^m y^m$.
-------------------------------	-------------------------------	----------------------------

3° **THÉORÈME I.** x et y étant deux nombres positifs et m un entier positif :

$$x = y \iff x^m = y^m; \quad x > y \iff x^m > y^m.$$

Il est clair que $x = y \implies x^m = y^m$.

Écrivons maintenant l'égalité :

$$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \dots + xy^{m-2} + y^{m-1}).$$

Au second membre, le coefficient de $x - y$ est positif puisque x et y sont positifs.

a) Un produit ne pouvant être égal à 0 que si l'un des facteurs au moins est égal à 0, $x^m - y^m = 0$ exige $x - y = 0$. Autrement dit :

$$x^m = y^m \implies x = y.$$

b) Si $x \neq y$, et par conséquent $x^m \neq y^m$, les différences $x - y$ et $x^m - y^m$ ont le même signe :

$$x - y > 0 \iff x^m - y^m > 0. \quad \text{Autrement dit} \quad x > y \iff x^m > y^m.$$

THÉORÈME II. x et y étant deux nombres réels et $m = 2p + 1$ un entier positif impair

$$x = y \iff x^{2p+1} = y^{2p+1}; \quad x > y \iff x^{2p+1} > y^{2p+1}.$$

a) Montrons d'abord que $x > y \implies x^{2p+1} > y^{2p+1}$.

La propriété a été démontrée si $x > y > 0$. Elle est manifestement vraie

- si $x > 0$ et $y = 0$, auquel cas $x^{2p+1} > 0$ et $y^{2p+1} = 0$,
- si $x = 0$ et $y < 0$, auquel cas $x^{2p+1} = 0$ et $y^{2p+1} < 0$,
- si $x > 0$ et $y < 0$, auquel cas $x^{2p+1} > 0$ et $y^{2p+1} < 0$.

Enfin si $y < x < 0$, on a $0 < (-x) < (-y)$, ce qui entraîne

$$(-x)^{2p+1} < (-y)^{2p+1}.$$

Cette dernière relation s'écrit $-x^{2p+1} < -y^{2p+1}$ ou $x^{2p+1} > y^{2p+1}$.

b) Dès lors si $x^{2p+1} = y^{2p+1}$, on ne peut avoir $x \neq y$. On a donc $x = y$.

Si $x^{2p+1} > y^{2p+1}$, on ne peut avoir $x = y$, ni $y > x$. On a donc $x > y$.

THÉORÈME III. x et y étant deux nombres réels et $m = 2p$ un entier positif pair

$$|x| = |y| \iff x^{2p} = y^{2p}; \quad |x| > |y| \iff x^{2p} > y^{2p}.$$

Il suffit de remarquer que $x^{2p} = |x|^{2p}$, $y^{2p} = |y|^{2p}$ et d'appliquer le théorème I.

15. *Radicaux arithmétiques.* — 1^o PROBLÈME. — Étant donnés un entier positif m et un nombre réel positif X , existe-t-il des nombres réels positifs qui, élevés à la puissance m , donnent X ?

Nous dirons que traiter ce problème c'est résoudre sur R^+ l'équation

$$x^m = X, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Unicité d'une solution éventuelle. — Elle provient de ce que deux nombres positifs distincts ont des puissances m^{es} distinctes (n^o 14, théorème I).

Existence d'une solution. — Il est clair que si X est la puissance m^{e} d'un nombre rationnel positif r , nous avons la solution $x_0 = r$.

Ce cas étant écarté, considérons les sous-ensembles suivants de l'ensemble Q^+ des nombres rationnels positifs :

Classe (A) : l'ensemble des $A \in Q^+$ tels que $A^m > X$.

Classe (a) : l'ensemble des $a \in Q^+$ tels que $a^m < X$.

Nous obtenons une partition de R^+ , car d'une part tout $r \in Q^+$ est classé, puisque par hypothèse il n'existe pas $r \in Q^+$ tel que $r^m = X$, d'autre part les classes sont disjointes. Montrons qu'elles ne sont pas vides.

Les inégalités simultanées $A > 1$ et $A > X$ entraînant l'inégalité $A^m > X$, la classe (A) contient tous les rationnels supérieurs à $\sup(1, X)$.

Les inégalités simultanées $0 < a < 1$ et $a < X$ entraînant l'inégalité $a^m < X$, la classe (a) contient tous les rationnels positifs inférieurs à $\inf(1, X)$.

Le fait que sur R^+ , et en particulier sur Q^+ ,

$$x > y \implies x^m > y^m$$

permet d'affirmer que la partition considérée vérifie les propriétés (α) et (β) des coupures et qu'elle constitue une coupure ouverte dans Q^+ . Désignons par $x_0 = [a, A]$ le nombre réel positif ainsi obtenu et considérons le nombre réel x_0^m .

X et x_0^m sont deux nombres réels tels que

$$\forall a \in (a), \quad \forall A \in (A), \quad a^m < X < A^m \quad \text{et} \quad a^m < x_0^m < A^m.$$

Montrons que les ensembles respectivement formés par les a^m et les A^m sont adjacents : nous savons déjà que $a^m < A^m$; d'autre part la relation

$$A^m - a^m = (A - a)(A^{m-1} + A^{m-2}a + \dots + a^{m-1}) < m(A - a)A^{m-1}$$

montre que, A_0 désignant un élément fixe, arbitraire, de (A) ,

$$\left\{ A < A_0 \quad \text{et} \quad A - a < \frac{\varepsilon}{mA_0^{m-1}} \right\} \implies A^m - a^m < \varepsilon.$$

Nous pouvons donc affirmer que $x_0^m = X$ et conclure cette étude en énonçant :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — Étant donnés un entier positif m et un nombre réel positif X , il existe un nombre réel positif et un seul qui, élevé à la puissance m , donne X . Ce nombre, que l'on note $\sqrt[m]{X}$, est dit racine m^{e} arithmétique du nombre positif X .

2° **THÉORÈME.** X et Y étant deux nombres positifs et m un entier positif,

$$X = Y \iff \sqrt[m]{X} = \sqrt[m]{Y}; \quad X > Y \iff \sqrt[m]{X} > \sqrt[m]{Y}.$$

En effet, en posant $x = \sqrt[m]{X}$, $y = \sqrt[m]{Y}$, les équivalences logiques précédentes s'écrivent

$$x^m = y^m \iff x = y; \quad x^m > y^m \iff x > y$$

et ce sont celles qui ont été établies au n° 14, 3°.

3° **Calcul des radicaux arithmétiques.** — **THÉORÈME I.** — On forme un radical égal à un radical donné en multipliant l'indice du radical par un entier positif p , à la condition d'élever à la puissance p le nombre sous le radical.

Pour justifier l'égalité

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[mp]{A^p}$$

nous vérifierons qu'on trouve le même nombre en élevant ses deux membres à la puissance mp ; cela suffira, les deux membres étant positifs.

La puissance mp du second membre est A^p . Pour élever le premier membre à la puissance mp nous pouvons, en observant que $a^{mp} = (a^m)^p$ l'élever

d'abord à la puissance m , ce qui donne A , puis le résultat à la puissance p , ce qui donne A^p . La proposition est démontrée.

EXEMPLE : $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[8]{16}$.

APPLICATIONS. — I. *Réduction de plusieurs radicaux au même indice.* — Réduire plusieurs radicaux au même indice, c'est trouver des radicaux respectivement égaux aux radicaux proposés et ayant tous le même indice.

Soient $\sqrt[m]{A}$, $\sqrt[p]{B}$, $\sqrt[q]{C}$

trois radicaux donnés et soit M un commun multiple des indices m , p , q ; il existe des entiers m' , p' , q' tels que : $M = mm' = pp' = qq'$.

Les radicaux donnés sont respectivement égaux aux radicaux

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m m']{A^{m'}}, \quad \sqrt[p]{B} = \sqrt[p p']{B^{p'}}, \quad \sqrt[q]{C} = \sqrt[q q']{C^{q'}}$$

qui ont tous M pour indices.

II. *Comparaison de deux radicaux.* — Pour comparer deux radicaux arithmétiques on les réduit au même indice. De deux radicaux de même indice le plus grand est celui pour lequel le nombre sous le radical est le plus grand (2°).

En particulier la racine m^e d'un nombre plus grand que 1 est plus grande que 1, la racine m^e d'un nombre plus petit que 1 est plus petite que 1.

EXEMPLE. — En réduisant $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{3}$ au même indice on trouve que ces nombres sont respectivement égaux à $\sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[6]{3^2}$ ou $\sqrt[6]{8}$ et $\sqrt[6]{9}$; $\sqrt{2}$ est plus petit que $\sqrt[3]{3}$. Le lecteur vérifiera de même que $\sqrt{2}$ est plus grand que $\sqrt[5]{5}$.

THÉORÈME II. — Le produit des racines m^e arithmétiques de plusieurs nombres positifs est la racine m^e arithmétique du produit de ces nombres.

Démontrons d'abord que

$$\sqrt[m]{A} \times \sqrt[p]{B} = \sqrt[m]{AB}.$$

Les deux membres étant positifs, pour démontrer qu'ils sont égaux il suffit de vérifier que leurs puissances m^e sont égales.

La puissance m^e de $\sqrt[m]{AB}$ est le produit AB .

La puissance m^e d'un produit de facteurs étant égale au produit des puissances m^e des facteurs, la puissance m^e de $\sqrt[m]{A} \times \sqrt[p]{B}$ est aussi AB .

La propriété s'étend de proche en proche au cas du produit de p racines m^e .

APPLICATIONS. — I. *Produit de plusieurs radicaux arithmétiques.* — Pour multiplier plusieurs radicaux on les réduit au même indice et on applique le théorème précédent.

II. *Faire entrer un nombre sous un radical. Faire sortir un nombre d'un radical.* A étant un nombre positif, le produit $A \sqrt[p]{B}$ peut s'écrire $\sqrt[p]{A^p} \times \sqrt[p]{B}$, il est égal à $\sqrt[p]{A^p B}$. Nous pouvons écrire l'égalité

$$A \sqrt[p]{B} = \sqrt[p]{A^p B}.$$

Quand on remplace le premier membre par le second, on dit qu'on fait entrer A sous le radical. Quand on remplace le deuxième membre par le premier, on dit qu'on fait sortir A du radical.

REMARQUE. — Lorsqu'on effectue l'une de ces transformations il importe de ne pas perdre de vue que A est remplacé par un radical arithmétique ce qui suppose que A est positif.

III. *Puissance d'un radical.* — La puissance p^e de $\sqrt[m]{A}$ étant le produit de p facteurs égaux à $\sqrt[m]{A}$,

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^p = \sqrt[m]{A^p}.$$

IV. *Quotient de deux radicaux de même indice :*

$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}}$$

En particulier

$$\frac{1}{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[m]{\frac{1}{A}}.$$

THÉORÈME III. — La racine p^e arithmétique d'un radical arithmétique s'obtient en multipliant par p l'indice du radical.

Proposons-nous de démontrer que

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{A}}.$$

Les deux membres étant positifs, il suffit de vérifier que leurs puissances mp^e sont égales. La puissance mp^e de $\sqrt[p]{\sqrt[m]{A}}$ est A. Pour élever le premier membre à la puissance mp , on peut l'élever d'abord à la puissance p ce qui donne $\sqrt[m]{A}$, puis le résultat à la puissance m , on trouve ainsi A

Exemple.

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}.$$

16. *Étude sur R de l'équation* $x^m = X$ ($m \in \mathbb{N}$). — Cette fois le nombre donné X et les racines éventuelles ne sont plus forcément positives.

Écartons le cas de $X = 0$, l'équation admettant alors visiblement la racine unique $x_0 = 0$.

Distinguons alors suivant la parité de m :

1° m est pair, soit $m = 2p$. Toute puissance dont l'exposant est pair étant un nombre positif, il n'existe pas, si X est négatif, de nombre qui, élevé à la puissance $2p$, donne X.

Si X est positif, cherchons un nombre négatif — x' tel que $(-x')^{2p} = X$. Cette égalité s'écrit aussi $x'^{2p} = X$. Or il existe un nombre positif et un seul remplissant cette condition : c'est $\sqrt[p]{X}$; par suite il existe un nombre négatif et un seul, — $\sqrt[p]{X}$, répondant à la question.

En résumé, si X est positif il existe deux nombres opposés $\sqrt[p]{X}$ et $-\sqrt[p]{X}$ qui vérifient l'équation $x^{2p} = X$.

2° m est impair, soit $m = 2p + 1$. Nous savons que si deux nombres sont inégaux, en les élevant à une puissance dont l'exposant est impair on trouve des résultats inégaux; il ne peut donc exister deux nombres qui, élevés à la puissance $2p + 1$, donnent X . D'autre part il en existe toujours un : $\sqrt[2p+1]{X}$ si X est positif, $-\sqrt[2p+1]{-X}$ si X est négatif.

Quel que soit le signe de X , il existe un nombre et un seul qui, élevé à la puissance $2p + 1$, donne X .

REMARQUE. — Si A est négatif, au lieu d'écrire $-\sqrt[2p+1]{-A}$, on écrit souvent $\sqrt[2p+1]{A}$; c'est là une notation *incorrecte*. Ainsi on écrit *incorrectement* $\sqrt[3]{-3}$ au lieu de $-\sqrt[3]{3}$. Quand on emploie cette notation dans les calculs il importe de ne pas oublier que $\sqrt[2p+1]{A}$ ne désigne plus un radical arithmétique mais le nombre $-\sqrt[2p+1]{-A}$.

C'est ainsi que, A étant négatif, il serait faux d'écrire que $\sqrt[3]{A} \sqrt[3]{B}$ est égal à $\sqrt[6]{A^3 B^3}$. En réalité, si A est négatif, $\sqrt[3]{A} \sqrt[3]{B} = -\sqrt[6]{(-A)^3} \times \sqrt[3]{B^3} = -\sqrt[6]{A^3 B^3}$.

17. Exposants fractionnaires. — 1° L'égalité

$$\sqrt[q]{A^p} = \sqrt[qm]{A^{pm}}$$

rappelle l'égalité

$$\frac{p}{q} = \frac{pm}{qm}$$

et la réduction au même indice des radicaux $\sqrt[q]{A^p}$, $\sqrt[q']{B^{p'}}$, $\sqrt[q'']{C^{p''}}$ nécessite les mêmes calculs que la réduction au même dénominateur des fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$. Ces analogies conduisent à la définition suivante :

DÉFINITION. A étant un nombre positif et p, q deux entiers positifs

$$A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p}.$$

Il est clair que cette notation ne rendra des services que si $A^{\frac{p}{q}}$ conserve la même valeur quand on remplace l'exposant par une fraction égale $\frac{p'}{q'}$ et si les règles de calcul relatives aux exposants naturels s'appliquent aux exposants fractionnaires. Démontrons qu'il en est ainsi.

Tout d'abord supposons que $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ et comparons $A^{\frac{p}{q}}$ et $A^{\frac{p'}{q'}}$. A cet effet réduisons au même indice les radicaux $\sqrt[q]{A^p}$ et $\sqrt[q']{A^{p'}}$ auxquels ces nombres sont égaux. En prenant le produit qq' pour indice commun nous trouvons que ces radicaux sont respectivement égaux à $\sqrt[qq']{A^{p'q}}$ et $\sqrt[qq']{A^{p'q}}$, ils sont égaux puisque $p'q' = p'q$ d'après l'hypothèse.

2° THÉORÈME. — Si A et B sont deux nombres positifs, et p, q deux entiers positifs

$$A = B \iff A^{\frac{p}{q}} = B^{\frac{p}{q}}; \quad A > B \iff A^{\frac{p}{q}} > B^{\frac{p}{q}}.$$

Ce résultat résulte de l'application simultanée des théorèmes du n° 14, 3° et du n° 15, 2°; par exemple

$$A > B \iff \sqrt[q]{A} > \sqrt[q]{B} \iff (\sqrt[q]{A})^p > (\sqrt[q]{B})^p \quad \text{ou} \quad A^{\frac{p}{q}} > B^{\frac{p}{q}}.$$

3° Règles de calcul des exposants fractionnaires. — Étendons maintenant aux exposants fractionnaires les règles de calcul exprimées par les égalités

$$\text{I. } A^m \times B^m = (AB)^m, \quad \text{II. } A^m \times A^{m'} = A^{m+m'}, \quad \text{III. } (A^m)^{m'} = A^{mm'}.$$

I. — Soit $m = \frac{p}{q}$. On peut écrire successivement

$$A^m B^m = \sqrt[q]{A^p} \times \sqrt[q]{B^p} = \sqrt[q]{A^p B^p} = \sqrt[q]{(AB)^p} = (AB)^{\frac{p}{q}} = (AB)^m.$$

$$\text{Conséquence : } \left(\frac{A}{B}\right)^m = \frac{A^m}{B^m}. \quad \text{En particulier} \quad \left(\frac{1}{B}\right)^m = \frac{1}{B^m}.$$

II. — Supposons que $m = \frac{p}{q}$ et $m' = \frac{p'}{q'}$. On a successivement

$$A^m \times A^{m'} = \sqrt[q]{A^p} \times \sqrt[q']{A^{p'}} = \sqrt[qq']{A^{pq'}} \times \sqrt[qq']{A^{p'q}} = \sqrt[qq']{A^{pq' + p'q}} = A^{\frac{pq' + p'q}{qq'}} = A^{m+m'}.$$

REMARQUE. — Si m est entier et m' fractionnaire, la vérification se fait de même.

III. — Si $m = \frac{p}{q}$ et $m' = \frac{p'}{q'}$ on peut écrire successivement

$$(A^m)^{m'} = \sqrt[q]{(\sqrt[q]{A^p})^{p'}} = \sqrt[q]{\sqrt[q]{A^{pp'}}} = \sqrt[qq']{A^{pp'}} = A^{mm'}.$$

La vérification ne présente aucune difficulté quand l'un des exposants est entier et l'autre fractionnaire.

18. Étude sur $\mathbb{R}$ de l'équation (1) $x^q = A^p$ ($p, q \in \mathbb{N}$). — On sait que sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire si on suppose A et x positifs, l'équation (1) admet une seule racine $A^{\frac{p}{q}}$.

Sur $\mathbb{R}$, le nombre 0 est racine de (1) si, et seulement si $A = 0$.

Cherchons si l'équation (1) admet des racines positives ou négatives lorsque A est un nombre quelconque, positif ou négatif.

Supposons les entiers p et q premiers entre eux.

1° q est pair, p est nécessairement impair. — Posons $p = 2h + 1, q = 2k$; x^{2k} est toujours positif; par suite, si A est positif, l'équation $x^{2k} = A^{\frac{2h+1}{2k}}$ admet deux racines, $\pm \sqrt[2k]{A^{2h+1}}$; si A est négatif, comme $A^{\frac{2h+1}{2k}}$ est négatif, cette équation n'a pas de racine.

2° Si q est impair, soit $q = 2k + 1$; nous savons qu'il existe un nombre et un seul qui vérifie l'équation $x^{2k+1} = A^p$. Si p est pair, soit $p = 2h$, que A soit positif ou négatif, la racine de cette équation est $\sqrt[2k+1]{A^{2h}}$. Si p est impair, soit

$p = 2h + 1$, lorsque A est positif, la racine est $\sqrt[2h+1]{A^{2h+1}}$, et lorsque A est négatif, la racine est $-\sqrt[2h+1]{-A^{2h+1}}$.

En résumé, l'équation (1) a une racine et une seule, que A soit positif ou négatif, lorsque $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible à dénominateur impair. Pour $A > 0$, cette racine se représente par la notation $A^{\frac{p}{q}}$; nous utiliserons la même notation pour $A < 0$, ce qui revient à poser, si A est négatif

$$A^{\frac{2h}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{A^{2h}}, \quad \text{et} \quad A^{\frac{2h+1}{2k+1}} = -\sqrt[2k+1]{-A^{2h+1}}.$$

REMARQUE. — Lorsque le nombre A est négatif, la notation $A^{\frac{p}{q}}$ ne doit être employée que si la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible, cette fraction ne peut être remplacée par une fraction égale. Par exemple il ne faut pas remplacer le nombre négatif $(-2)^{\frac{3}{5}}$ par $(-2)^{\frac{6}{10}}$ symbole auquel nous n'avons donné aucun sens et qui représenterait un nombre positif si on lui donnait pour signification $\sqrt[10]{(-2)^6}$.

19. Exposants rationnels négatifs. Exposant zéro. — Soient p et q deux nombres positifs, entiers ou fractionnaires, et A un nombre positif. Suivant que p est supérieur, inférieur ou égal à q , on peut écrire

$$(1) \quad \frac{A^p}{A^q} = A^{p-q}, \quad \frac{A^p}{A^q} = \frac{1}{A^{q-p}}, \quad \frac{A^p}{A^q} = 1.$$

En effet dans le premier cas $A^{p-q} \times A^q = A^p$,
dans le deuxième $A^{q-p} \times A^p = A^q$.

Pour que la première des égalités (1) soit valable dans les trois cas il suffit d'adopter les définitions suivantes :

DÉFINITIONS. — 1° Si n est un nombre rationnel positif $A^{-n} = \frac{1}{A^n}$;
2° $A^0 = 1$.

Conséquence : n et n' étant deux nombres rationnels opposés on a toujours

$$A^n \times A^{n'} = 1$$

ou, quel que soit le signe de n :

$$A^{-n} = \frac{1}{A^n}.$$

Les définitions précédentes sont utiles parce que les règles de calcul exprimées par les égalités I, II, III du n° 17, 3° sont applicables quand les exposants sont des nombres rationnels positifs, négatifs ou nuls. C'est ce que nous allons démontrer.

I. — Soit m un nombre rationnel négatif. Si μ est sa valeur absolue on a successivement

$$(AB)^m = \frac{1}{(AB)^\mu} = \frac{1}{A^\mu B^\mu} = \frac{1}{A^\mu} \times \frac{1}{B^\mu} = A^m \times B^m.$$

Si $m = 0$, les deux membres de l'égalité à vérifier sont égaux à 1.

On tire de l'égalité démontrée les mêmes conséquences que lorsque m est un nombre fractionnaire positif.

II. — Pour étendre l'égalité $A^m \times A^{m'} = A^{m+m'}$ aux exposants négatifs nous distinguerons deux cas :

1° *Un seul exposant est négatif.* — Soit m l'exposant négatif, si μ désigne sa valeur absolue on peut écrire successivement

$$A^m \times A^{m'} = \frac{A^{m'}}{A^\mu} = A^{m'-\mu} = A^{m+m'}$$

car d'après les définitions d'un exposant négatif ou nul, que m' soit supérieur, inférieur ou égal à μ , le quotient $\frac{A^{m'}}{A^\mu}$ est toujours égal à $A^{m'-\mu}$.

2° *Les deux exposants sont négatifs.* — Posons $m = -\mu$ et $m' = -\mu'$,

$$A^m \times A^{m'} = \frac{1}{A^\mu} \times \frac{1}{A^{\mu'}} = \frac{1}{A^{\mu+\mu'}} = A^{m+m'}.$$

La vérification est immédiate si l'un des exposants est nul.

III. — Dans le premier membre de l'égalité

$$(A^m)^{m'} = A^{mm'}$$

les exposants m, m' n'interviennent pas de la même manière. Pour étendre cette égalité aux valeurs négatives des exposants, nous devons distinguer trois cas :

1° *m est négatif et m' positif.* — Posons $m = -\mu$,

$$(A^m)^{m'} = \left(\frac{1}{A^\mu}\right)^{m'} = \frac{1}{(A^\mu)^{m'}} = \frac{1}{A^{\mu m'}} = A^{-\mu m'} = A^{mm'}.$$

2° *m est positif et m' négatif.* — Posons $m' = -\mu'$,

$$(A^m)^{m'} = \frac{1}{(A^m)^{\mu'}} = \frac{1}{A^{m\mu'}} = A^{-m\mu'} = A^{mm'}.$$

3° *m et m' sont négatifs.* — Posons $m = -\mu$ et $m' = -\mu'$,

$$(A^m)^{m'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{A^\mu}\right)^{\mu'}} = \frac{1}{A^{\mu\mu'}} = A^{-\mu\mu'} = A^{mm'}.$$

La vérification se fait immédiatement si l'un des exposants est nul.

REMARQUE. — Si A est négatif, et si m est un nombre rationnel négatif, soit $m = -\frac{p}{q}$, p et q étant deux entiers positifs premiers entre eux, q étant en outre impair, on pose encore par définition

$$A^{-m} = \frac{1}{A^m}.$$

EXERCICES

1. — Si a, b, a', b' sont des nombres rationnels et si $\sqrt{b}$ est irrationnel, l'égalité

$$a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$$

exige $a = a'$ et $b = b'$; l'égalité $a + \sqrt{b} = a' - \sqrt{b'}$ est impossible.

2. — Si A, B, C, a, b sont des nombres rationnels et si C n'est pas égal à 0, l'égalité

$$A\sqrt{a} + B\sqrt{b} = C$$

n'est possible que si $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont rationnels.

3. — Étant donnés deux nombres rationnels a et b , $\sqrt{b}$ étant irrationnel, existe-t-il deux nombres rationnels x et y vérifiant l'une des égalités

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}.$$

4. — Vérifier que les nombres suivants sont rationnels

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}; \quad \sqrt{2}\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{2}\sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{p^3 + 3pq^2 + (p^2 + q^2)\sqrt{p^2 + 4q^2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{p^3 - 3pq^2 - (p^2 + q^2)\sqrt{p^2 + 4q^2}}{2}} \quad (p, q \text{ rationnels}).$$

5. — Si a, b, c sont des nombres rationnels, $\sqrt{c}$ étant irrationnel, et si le polynôme $P(x)$, à coefficients rationnels, admet le nombre $a + b\sqrt{c}$ pour zéro à l'ordre α , $P(x)$ admet également le nombre $a - b\sqrt{c}$ pour zéro à l'ordre α .

6. — α étant rationnel et $\sqrt[3]{\alpha}$ irrationnel, la fraction $\frac{a\sqrt[3]{\alpha^2} + b\sqrt[3]{\alpha} + c}{a'\sqrt[3]{\alpha^2} + b'\sqrt[3]{\alpha} + c'}$ dans laquelle

a, b, c, a', b', c' sont rationnels ne peut être rationnelle que si a, b, c sont proportionnels a', b', c' .

7. — Vérifier que

$$\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

8. — Soient $a, b, c, \dots, l$, des variables en nombre m et P le produit des 2^{m-1} sommes de la forme $a \pm b \pm c \pm \dots \pm l$. Démontrer que P est un polynôme qui ne change pas quand on change a en $-a$ ou b par $-b$, etc. En conclure que P ne contient que des puissances de $a^2, b^2, \dots, l^2$. Application : Chasser les radicaux du dénominateur de la fraction

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \dots + \sqrt{\lambda}}, \quad \alpha, \beta, \dots, \lambda \text{ étant des nombres rationnels positifs.}$$

CHAPITRE II

SUITES NUMÉRIQUES

I. CONVERGENCE D'UNE SUITE

20. Généralités sur les suites numériques. — 1^o DÉFINITION. — Toute application de l'ensemble N des entiers naturels dans un ensemble quelconque E est dite suite sur E .

Les notations habituelles des fonctions conduiraient à désigner par une lettre, u par exemple, la suite, c'est-à-dire l'application. L'image dans E de l'entier naturel n s'écrirait $u(n)$, le sous-ensemble de E formé par les éléments $u(n)$ étant $u(N)$. Nous modifierons légèrement ces notations, en adoptant :

NOTATION : $1, 2, \dots, n, \dots \in N \longrightarrow u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \in E$.

La suite, dite de terme général u_n , est écrite $\{u_n\}$.

Insistons sur le fait qu'il faut bien distinguer la suite, qui est une fonction, et l'ensemble des u_n , qui est un sous-ensemble de E .

DÉFINITION. — Toute application de l'ensemble produit $N \times N$ dans un ensemble quelconque E est dite suite double sur E .

NOTATION : $(p, q) \in N \times N \longrightarrow u_{p,q} \in E$.

REMARQUE. — Les termes d'une suite ne sont pas forcément distincts; le nombre des termes distincts est ou fini ou dénombrable (I, n^o 19).

2^o Nous allons maintenant étudier exclusivement les suites numériques, c'est-à-dire les applications de N dans l'ensemble R des nombres réels (exceptionnellement dans l'ensemble C des nombres complexes).

u_n peut être donné sous forme explicite ou sous forme récurrente (ce qui signifie que l'on indique une loi de formation des termes successifs).

EXEMPLES. — a) $\left\{u_n = \frac{n}{n+1}\right\}$ commence par $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{3}{4}$, etc.

b) La suite récurrente définie par $u_1 = 1$ et $u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$ commence par $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = \frac{3}{2}$, $u_4 = \frac{5}{3}$, etc.

3^o **Suites monotones.** — DÉFINITION I. — La suite $\{u_n\}$ est dite strictement croissante (resp. strictement décroissante) si

$$\forall p \quad \text{on a} \quad u_{p+1} > u_p \quad (\text{resp. } u_{p+1} < u_p).$$

DÉFINITION II. — La suite $\{u_n\}$ est dite non décroissante, ou croissante au sens large (resp. non croissante, ou décroissante au sens large) si

$$\forall p \quad \text{on a} \quad u_{p+1} \geq u_p \quad (\text{resp. } u_{p+1} \leq u_p).$$

On englobe les suites croissantes et les suites décroissantes sous la dénomination de suites *monotones*.

REMARQUE I. — Si $\{u_n\}$ est une suite croissante à termes positifs, $\left\{\frac{1}{u_n}\right\}$ est une suite décroissante à termes positifs. Dans ce cas en effet :

$$u_{p+1} > u_p \iff \frac{1}{u_{p+1}} < \frac{1}{u_p}.$$

REMARQUE II. — Il peut arriver qu'une suite soit rendue monotone quand on en supprime les q premiers termes (q fixe).

REMARQUE III. — D'après sa définition la monotonie se met en évidence en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$. Dans le cas où u_n est positif on peut aussi comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

4° Suites bornées. — **DÉFINITION.** — La suite $\{u_n\}$ est dite majorée (resp. minorée) si l'ensemble des nombres u_n admet un majorant (resp. un mineur).

Il en résulte qu'une suite majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure) (cf. n° 11).

Une suite à la fois majorée et minorée est dite *bornée*.

21. Suites convergentes. — **1° DÉFINITION.** — On dit que la suite $\{u_n\}$ converge et admet la limite L , ou encore que u_n tend vers L quand n tend vers plus l'infini, s'il existe un nombre L tel que, étant donné le nombre positif arbitraire ε , on peut prouver l'existence d'un entier naturel N tel que la condition

$$|u_n - L| < \varepsilon \quad \text{c'est-à-dire} \quad L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$$

est vérifiée par tout terme u_n de la suite qui satisfait à $n > N$.

Définition condensée :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$	ou $\updownarrow$	$u_n \rightarrow L \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty$
$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$	tel que	$\forall n > N, \text{ on a } u_n - L < \varepsilon$

Dans la pratique nous nous dispenserons en général d'écrire « quand $n \rightarrow +\infty$ ».

Conséquence. — On peut exprimer que la suite $\{u_n\}$ est convergente et admet la limite L , en écrivant que tout voisinage de L contient tous les nombres u_n , sauf un nombre fini d'entre eux; cela revient en effet à dire que, quel

que soit ε positif, on a $L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$, sauf pour un nombre fini de valeurs de n ; si N est la plus grande de ces valeurs exceptionnelles,

$$n > N \implies L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon.$$

Remarque. — Si tous les termes de $\{u_n\}$ sont des entiers et si la suite admet la limite L , il est nécessaire que L soit un entier et que tous les termes de la suite soient, à partir d'un certain rang, égaux à L ; sinon, comme tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, sont compris entre $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$, quel que soit ε , on aboutirait à une contradiction.

DÉFINITION. — Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

2° THÉORÈME. — Toute suite convergente est bornée.

ε_0 étant un nombre positif fixe, auquel correspond N , les valeurs prises par u_n sont en effet $u_1, u_2, \dots, u_N$ et des nombres de l'intervalle $]L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0[$.

THÉORÈME. — Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite que la suite initiale.

Il s'agit de la suite $\{v_n\}$ formée à partir de la suite $\{u_n\}$ en supprimant des termes (en nombre fini ou infini) et en modifiant l'ordre des termes restants. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que les seuls termes de $\{v_n\}$ extérieurs à $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ figurent parmi $u_1, u_2, \dots, u_N$. Ils occupent dans $\{v_n\}$ des rangs dont le plus élevé, soit N' , est connu quand ε est donné. Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \quad \text{tel que} \quad n > N' \implies |v_n - L| < \varepsilon.$$

3° Premières conséquences de la définition de la limite d'une suite.

a) **UNICITÉ.** — Supposons que l'on ait simultanément :

$$\lim u_n = L; \quad \lim u_n = L' \quad \text{et} \quad L < L' \quad (\text{fig. 1}).$$

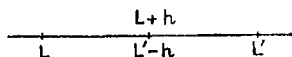


FIG. 1.

Posons $L' - L = 2h$. Choisissons $\varepsilon = h$. Par hypothèse

$$\exists N_1, N_2 \quad \text{tels que} \quad n > N_1 \implies u_n < L + h \quad \text{et} \quad n > N_2 \implies u_n > L' - h.$$

Il en résulte, en posant $N = \sup(N_1, N_2)$, qu'il existe N tel que

$$n > N \implies u_n < L + h \quad \text{et} \quad u_n > L' - h,$$

ce qui est en contradiction avec $L + h = L' - h$.

b) Les expressions $\lim u_n = L$ et $\lim (u_n - L) = 0$ sont équivalentes. En effet $|u_n - L| < \varepsilon$ équivaut à $|(u_n - L) - 0| < \varepsilon$.

c) La définition n'implique pas l'existence *a priori* d'une limite. On peut d'ailleurs être amené à démontrer qu'une suite $\{u_n\}$ n'admet pas le nombre donné l pour limite. Il suffit de prouver qu'il existe un nombre particulier ε_0 tel que, quel que soit N , il existe au moins un entier $n > N$ tel que $|u_n - l| > \varepsilon_0$.

d) La démonstration du fait que la suite $\{u_n\}$ a pour limite un nombre connu L pose un problème d'existence comportant une donnée ε (nombre positif) et une inconnue N (entier naturel).

EXEMPLE. — Montrons que $\left\{u_n = \frac{-2n+3}{n+2}\right\}$ a pour limite -2 .

$$|u_n + 2| < \varepsilon \quad \text{s'écrit} \quad \frac{7}{n+2} < \varepsilon \iff n > \frac{7}{\varepsilon} - 2.$$

Le plus petit entier N au moins égal à $\frac{7}{\varepsilon} - 2$ répond à la question posée.

Il est essentiel de remarquer que, si un entier N' est solution de ce problème, tout entier N'' supérieur à N' est aussi solution. Il ne s'agit pas de déterminer tous les entiers N possibles, mais seulement de prouver l'existence de l'un d'entre eux.

EXEMPLES. — I. Considérons la suite

$$\{u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n\}.$$

On écrit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$, ce qui montre que u_n est inférieur à $\frac{1}{2n}$; pour que $|u_n|$ soit inférieur au nombre positif ε donné, il suffit que n soit supérieur à $\frac{1}{2\varepsilon}$, par suite u_n admet la limite 0.

Notons que cette suite est visiblement décroissante.

II. La suite $\left\{u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{3}\right\}$ est formée de nombres successivement positifs, négatifs, nuls; elle n'est ni croissante, ni décroissante; elle admet pourtant la limite 0 car on a $|u_n| < \frac{1}{n}$ et pour satisfaire à l'inégalité $|u_n| < \varepsilon$, il suffit de prendre n tel que l'on ait $\frac{1}{n} < \varepsilon$, c'est-à-dire $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

22. Théorèmes généraux sur les limites. — THÉORÈME I. —

Si u_n admet la limite L , avec $A < L < B$,

on a, à partir d'un certain rang, $A < u_n < B$.

Il suffit de choisir $\varepsilon = \inf(L - A, B - L)$. Il lui correspond un entier N tel que

$$n > N \implies |u_n - L| < \varepsilon, \implies A < u_n < B.$$

CAS PARTICULIER. — Si la limite L est *positive* (resp. *négative*), à partir d'un certain rang, u_n est *positif* (resp. *négatif*); on s'en assure en prenant dans la démonstration précédente $A = 0$ (resp. $B = 0$). On peut même ajouter que, à partir d'un certain rang, u_n admet un *minorant* strictement positif (resp. un *majorant* strictement négatif); on s'en assure en prenant dans la démonstration précédente $A = K$ (resp. $B = K$), K étant un point quelconque de l'intervalle ouvert $]0, L[$.

THÉORÈME II. — Si, à partir d'un certain rang, on a $\alpha < u_n < \beta$ et si u_n admet la limite L , on a nécessairement $\alpha \leq L \leq \beta$.

En effet $L < \alpha$ entraînerait (théorème I) l'existence de N tel que, pour $n > N$ on aurait $u_n < \alpha$ ce qui est contraire à l'hypothèse. De même $L > \beta$ conduirait à un résultat contraire à l'hypothèse. Les contradictoires étant vraies, $\alpha \leq L \leq \beta$.

CAS PARTICULIER. — Si une suite dont le terme général est positif (resp. négatif) à partir d'un certain rang admet une limite, celle-ci est *positive ou nulle* (resp. *négative ou nulle*).

THÉORÈME III. — Si u_n et v_n admettent les limites respectives L et L' , et si $L > L'$, à partir d'un certain rang on a $u_n > v_n$.

Soit λ un nombre fixe compris entre L et L' . D'après le théorème I :

$\exists N_1$ tel que $n > N_1 \implies u_n > \lambda$; $\exists N_2$ tel que $n > N_2 \implies v_n < \lambda$.

Il en résulte que

$$n > \sup(N_1, N_2) \implies u_n > \lambda > v_n.$$

THÉORÈME IV. — Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n > v_n$, si d'autre part u_n et v_n admettent les limites respectives L et L' , on a $L \geq L'$.

D'après le théorème III, $L' > L$ conduirait (à partir d'un certain rang) à $v_n > u_n$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse; donc $L \geq L'$.

THÉORÈME V. — Si, à partir d'un certain rang, $v_n < u_n < w_n$, si d'autre part v_n et w_n admettent la même limite L , u_n admet aussi L pour limite.

En effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$ et N_2 tels que :

$$n > N_1 \implies L - \varepsilon < v_n < L + \varepsilon, \quad n > N_2 \implies L - \varepsilon < w_n < L + \varepsilon.$$

Il en résulte que :

$$n > \sup(N_1, N_2) \implies L - \varepsilon < v_n < u_n < w_n < L + \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim u_n = L$.

THÉORÈME VI. — Si u_n admet la limite L , $|u_n|$ admet la limite $|L|$.

a) $L > 0$. A condition de se limiter à $\varepsilon < L$, la double inégalité

$$(1) \quad L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$$

implique que u_n est positif et s'écrit

$$(2) \quad |L| - \varepsilon < |u_n| < |L| + \varepsilon.$$

b) $L < 0$. A condition de se limiter à $\varepsilon < |L|$, la double inégalité (1), qui s'écrit (en multipliant par -1)

$$|L| - \varepsilon < -u_n < |L| + \varepsilon,$$

implique que u_n est négatif. On en déduit (2).

c) $L = 0$. Aucune difficulté dans ce cas; (1) équivaut à $|u_n| < \varepsilon$.

REMARQUE. — Il suffit de considérer la suite $\{u_n\}$ définie par

$$u_{2p+1} = -1, \quad u_{2p} = 1$$

pour constater que $\lim |u_n|$ peut exister sans que $\lim u_n$ existe.

23. Suites dont le terme général tend vers l'infini. — DÉFINITION I. — On dit que u_n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$ si, étant donné le nombre positif arbitraire A on sait prouver l'existence d'un entier naturel N tel que la condition

$$u_n > A \quad (\text{resp. } u_n < -A)$$

est vérifiée par tout terme u_n de la suite qui satisfait à $n > N$.

Définition condensée :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	ou $\Updownarrow$	$u_n \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty$
$\forall A > 0, \exists N > 0$	tel que	$\forall n > N, \text{ on a } u_n > A$

dans la pratique, nous nous dispenserons, en général, d'écrire « quand $n \rightarrow +\infty$ ».

Conséquence : u_n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si tout voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) contient tous les termes de la suite $\{u_n\}$ sauf un nombre fini d'entre eux. Le raisonnement est le même que dans le cas d'une limite finie.

DÉFINITION II. — Si $|u_n| \rightarrow +\infty$, sans que u_n ait un signe fixe, on dit que u_n tend vers l'infini, et on écrit $u_n \rightarrow \infty$ ou $\lim u_n = \infty$.

REMARQUE I. $|u_n| > A \iff \frac{1}{|u_n|} < \frac{1}{A}$.

Il revient donc au même de dire $u_n \rightarrow \infty$ ou $\frac{1}{u_n} \rightarrow 0$.

REMARQUE II. — Si $u_n \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et si, à partir d'un certain rang $v_n \geq u_n$ (resp. $v_n \leq u_n$), a fortiori $v_n \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$).

EXEMPLES. — Considérons $\{u_n = n\}$ et $\{v_n = n!\}$. Du fait que $u_n \rightarrow +\infty$ et que $v_n > u_n$ nous déduisons que $v_n \rightarrow +\infty$.

Il résulte de la remarque I que les suites $\{u'_n = \frac{1}{n}\}$ et $\{v'_n = \frac{1}{n!}\}$ convergent et ont pour limite 0.

24. *Généralisation de la notion de limite. — 1° DÉFINITION. — Un nombre l est dit *valeur* (ou *point*) *d'adhérence* ou *point limite* de la suite $\{u_n\}$ si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe dans $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ une infinité de termes de la suite, distincts ou confondus.

EXEMPLE. — La suite $\left\{u_n = \frac{1}{n} + \sin \frac{2n\pi}{3}\right\}$ admet les points limites $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

REMARQUE I. — Si la suite $\{u_n\}$ est convergente, elle admet visiblement sa limite L pour point limite. Elle n'en admet pas d'autre. En effet l'existence d'un second point limite $l \neq L$ ferait, en prenant $\varepsilon = \frac{|L - l|}{2}$, qu'il existerait une infinité de termes de la suite dans $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, donc extérieurs à $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

REMARQUE II. — Si la suite $\{u_n\}$ est bornée, elle admet au moins un point limite. En effet si u_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, l'une d'elles au moins est atteinte une infinité de fois; si l'ensemble des valeurs distinctes prises par u_n est infini, il admet au moins un point d'accumulation (Bolzano-Weierstrass). Nous avons là deux cas (visiblement les seuls cas possibles) de points limites. L'ensemble des points limites de la suite bornée $\{u_n\}$ est lui-même borné et admet donc une borne supérieure dont le lecteur démontrera qu'elle est aussi un point limite de $\{u_n\}$. En généralisant la définition du n° 12, 3°, cette borne est dite *limite supérieure* de la suite; on la note $\lim u_n$.

REMARQUE III. — Si la suite $\{u_n\}$, bornée, admet un seul point limite L , elle admet L pour limite. En effet s'il existait une infinité de termes de la suite extérieurs à $]L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0[$, pour ε_0 donné quelconque, il y aurait d'après le raisonnement précédent un point limite extérieur à $]L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0[$, donc distinct de L .

2° CRITÈRE DE CONVERGENCE DE CAUCHY. — THÉORÈME. — La suite $\{u_n\}$ converge si, et seulement si,

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \forall p > N(\varepsilon) \\ \forall q > N(\varepsilon) \end{array} \right\} \text{ on a } |u_p - u_q| < \varepsilon$$

a) La condition est nécessaire. — En effet supposons que $\{u_n\}$ converge et admette pour limite L . On a : $u_p - u_q = (u_p - L) + (L - u_q)$. D'où

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - L| + |u_q - L|.$$

$$\text{Or,} \quad \forall \varepsilon, \exists N \text{ tel que } n > N \implies |u_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Par suite} \quad p > N \text{ et } q > N \implies |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

b) La condition est suffisante. — En effet supposons-la remplie et soit N un entier associé au nombre positif donné ε , quelconque. En choisissant $p = N + 1$ on constate que les valeurs prises par u_n sont $u_1, u_2, \dots, u_N$ et des points de $]u_{N+1} - \varepsilon, u_{N+1} + \varepsilon[$. $\{u_n\}$ est donc bornée et admet (remarque II) au moins un point limite $L \in [u_{N+1} - \varepsilon, u_{N+1} + \varepsilon]$. Elle ne peut en admettre un second l car on aurait deux points L et l distincts tels que $|L - l| \leq 2\varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui est impossible. Ainsi (remarque III) $\{u_n\}$ étant bornée et admettant un seul point limite L , cette suite admet L pour limite.

(Voir au n° 32, 5° une autre démonstration du b).

II. OPÉRATIONS SUR LES SUITES ET SUR LES LIMITES

25. Opérations relatives aux suites sur $\mathbb{R}$. — 1° Définitions.

DÉFINITION I (cf I, n° 16). — Les deux suites sur $\mathbb{R}$, $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$, sont dites égales si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n$.

DÉFINITION II. — On appelle somme et produit des deux suites sur R , $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$, les suites sur R dont les termes d'indice n sont respectivement

$$u_n + v_n \quad \text{et} \quad u_n v_n.$$

On les note $\{u_n + v_n\}$ et $\{u_n v_n\}$.

On peut définir la suite *différence* $\{u_n - v_n\}$ et la suite *quotient* $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ (Cette dernière en dehors des points $m \in N$ tels que $v_m = 0$).

DÉFINITION III. — On appelle produit de la suite sur R $\{u_n\}$, par le nombre réel k et on note $\{ku_n\}$ la suite dont le terme d'indice n est ku_n .

Le lecteur pourra vérifier que ces opérations munissent l'ensemble des suites sur R , d'une part d'une structure d'anneau commutatif unitaire, d'autre part d'une structure d'espace vectoriel sur le corps R . Cette propriété est d'ailleurs démontrée, dans un cas plus général, au n° 40-3°.

2° Opérations sur les limites. — Étant données les deux suites sur R convergentes, $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$, de limites respectives L et M , nous allons montrer que les suites

$$\{ku_n\}, \quad \{u_n + v_n\}, \quad \{u_n v_n\}, \quad \left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$$

convergent et admettent respectivement pour limites

$$kL, \quad L + M, \quad LM, \quad \frac{L}{M}$$

(avec la réserve $M \neq 0$ pour la dernière).

Les deux problèmes (démontrer la convergence, calculer la limite) seront traités simultanément. On sous-entendra « n tend vers $+\infty$ ».

THÉORÈME I. — Si u_n admet la limite L , et si k est un nombre réel quelconque, ku_n admet la limite kL .

$$a) k \neq 0: \quad (1) \quad |ku_n - kL| < \varepsilon \iff |u_n - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}. \quad (2)$$

Or d'après l'hypothèse, il existe N tel que l'inégalité (2) soit vérifiée pour les valeurs de n supérieures à N ; ces mêmes valeurs de n vérifiant (1), la proposition est démontrée.

b) La proposition est encore valable si $k = 0$, car, dans ce cas, $ku_n = 0$.

Application. — Si $L \neq 0$, il suffit de poser $k = \frac{1}{L}$ pour aboutir à l'équivalence :

$$(u_n \rightarrow L) \iff \left(\frac{u_n}{L} \rightarrow 1\right)$$

THÉORÈME II. — Si u_n et v_n admettent les limites respectives L et M , la somme $u_n + v_n$ admet la limite $L + M$.

Nous pouvons écrire

$$(u_n + v_n) - (L + M) = (u_n - L) + (v_n - M)$$

et en déduire :

$$|(u_n + v_n) - (L + M)| \leq |u_n - L| + |v_n - M|. \quad (3)$$

Or, d'après l'hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \exists N_1 \text{ tel que } n > N_1 \Rightarrow |u_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2 \text{ tel que } n > N_2 \Rightarrow |v_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{array} \right.$$

Il en résulte, compte tenu de l'inégalité (3) que

$$n > \sup(N_1, N_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |u_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |v_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow |(u_n + v_n) - (L + M)| < \varepsilon.$$

La proposition est ainsi démontrée.

COROLLAIRE DES THÉORÈMES I ET II. — Si u_n et v_n admettent les limites L et M et si λ et μ sont des nombres réels quelconques, $\lambda u_n + \mu v_n$ admet la limite $\lambda L + \mu M$. En effet, d'après le théorème I, λu_n et μv_n admettent respectivement les limites λL et μM . D'après le théorème II, leur somme admet la limite $\lambda L + \mu M$.

CAS PARTICULIERS. — En faisant $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ on constate que $u_n - v_n$ admet la limite $L - M$.

En utilisant le fait qu'une suite dont le terme général est une constante converge vers cette constante, on montre que $u_n + k$ admet la limite $L + k$, ce qui résulte d'ailleurs de l'équivalence logique

$$|(u_n + k) - (L + k)| < \varepsilon \iff |u_n - L| < \varepsilon.$$

GÉNÉRALISATION. — Le théorème II et le corollaire s'étendent de proche en proche à la somme d'un nombre quelconque p , fixe, de termes. Insistons sur le mot *fixe*.

THÉORÈME III. — Si $|u_n|$ est majorée et si v_n admet la limite 0, le produit $u_n v_n$ admet la limite 0.

Par hypothèse $|u_n| < K$, K étant un nombre fixe strictement positif. Il en résulte

$$|u_n v_n| < K |v_n|. \quad (4)$$

Or, d'après l'hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } n > N \implies |v_n| < \frac{\varepsilon}{K} \iff K|v_n| < \varepsilon \quad (5).$$

De (4) et (5) on déduit :

$$n > N \implies |u_n v_n| < \varepsilon$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. — Si u_n et v_n admettent les limites respectives L et 0 , le produit $u_n v_n$ admet aussi la limite 0 .

En effet, la suite $\{u_n\}$ étant convergente, $|u_n|$ est majoré. Le théorème III s'applique.

THÉORÈME IV. — Si u_n et v_n admettent les limites respectives L et M , le produit $u_n v_n$ admet la limite LM .

La différence $u_n v_n - LM$ s'écrit

$$(6) \quad u_n(v_n - M) + M(u_n - L).$$

Nous avons vu que $v_n - M$ et $u_n - L$ admettent la limite 0 . Leurs produits respectifs par u_n et M admettent la limite 0 (théorèmes III et I). La somme (6) de ces deux produits admet la limite 0 (théorème II).

GÉNÉRALISATION. — La proposition s'étend de proche en proche au produit d'un nombre quelconque p , fixe, de termes. Ici encore insistons sur le mot *fixe*.

THÉORÈME V. — Si, à partir d'un certain rang, $|v_n|$ admet un minorant strictement positif et si u_n admet la limite 0 , le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ admet aussi la limite 0 .

A partir du rang p considéré on a $|v_n| > K > 0$, le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ est alors défini. On a : $\left| \frac{u_n}{v_n} \right| < \frac{|u_n|}{K}$.

$$\forall \varepsilon, \exists N_1 \text{ tel que } n > N_1 \implies |u_n| < \varepsilon K \iff \frac{|u_n|}{K} < \varepsilon.$$

Il en résulte que $n > \sup(p, N_1) \implies \left| \frac{u_n}{v_n} \right| < \varepsilon$; d'où la proposition.

COROLLAIRE. — Si $u_n \rightarrow 0$ et si $v_n \rightarrow M$, avec $M \neq 0$, alors $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$.

Nous avons vu en effet qu'à partir d'un certain rang, $|v_n|$ admet pour minorant tout nombre fixe K de l'intervalle ouvert $]0, |M|$. On est ainsi ramené aux conditions du théorème V.

THÉORÈME VI. — Si u_n et v_n admettent les limites respectives L et M , avec $M \neq 0$, le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ admet la limite $\frac{L}{M}$.

La différence $\frac{u_n}{v_n} - \frac{L}{M}$ s'écrit $\frac{Mu_n - Lv_n}{Mv_n}$. (1)

Le numérateur $Mu_n - Lv_n$ admet la limite 0 (théorèmes I et II). Le dénominateur admet la limite $M^2 \neq 0$ (théorème I). Le quotient (1) admet la limite 0 et $\frac{u_n}{v_n} - \frac{L}{M} \rightarrow 0$, ce qui équivaut à $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{L}{M}$.

26. Opérations relatives aux suites dont le terme général tend vers l'infini. Formes indéterminées. — 1° Somme. —

a) Si $u_n \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et si v_n est borné, $u_n + v_n \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$).

Soit, par hypothèse, $|v_n| < K$. On a $u_n + v_n \geq u_n - K$.

$$\forall A > 0, \exists N \quad \text{tel que} \quad n > N \implies u_n > A + K.$$

$$\text{Il en résulte que} \quad n > N \implies u_n + v_n > A,$$

ce qui établit la proposition.

Celle-ci s'applique en particulier si v_n admet une limite M .

b) Si $u_n \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et si $v_n \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$),

$$u_n + v_n \rightarrow +\infty \text{ (resp. } -\infty \text{)}.$$

$$\forall A > 0, \exists N_1 \quad \text{tel que} \quad n > N_1 \implies u_n > \frac{A}{2},$$

$$\exists N_2 \quad \text{tel que} \quad n > N_2 \implies v_n > \frac{A}{2}.$$

$$\text{Il en résulte que} \quad n > \sup(N_1, N_2) \implies u_n + v_n > A;$$

la proposition est ainsi établie.

c) Si $u_n \rightarrow +\infty$ et si $v_n \rightarrow -\infty$ on ne peut rien conclure *a priori* sur $u_n + v_n$. On dit que cette somme se présente sous la *forme indéterminée*

$$(+\infty) - (+\infty).$$

2° Produit. — a) Si $u_n \rightarrow \infty$ et si, à partir d'un certain rang, $|v_n| > K$, K étant strictement positif, le produit $u_n v_n$ tend vers l'infini.

A partir du rang p considéré, on a $|u_n v_n| > K |u_n|$.

$$\forall A > 0, \exists N_1 \quad \text{tel que} \quad n > N_1 \implies |u_n| > \frac{A}{K} \quad \text{ou} \quad K |u_n| > A.$$

$$\text{Il en résulte que} \quad n > \sup(p, N_1) \implies |u_n v_n| > A;$$

$$\text{on a bien} \quad u_n v_n \rightarrow \infty.$$

La proposition s'applique en particulier si $v_n \rightarrow M$ avec $M \neq 0$ ou si $|v_n| \rightarrow +\infty$.

b) Si $u_n \rightarrow \infty$ et si $v_n \rightarrow 0$, on ne peut rien conclure *a priori* sur $u_n v_n$. On dit que ce produit se présente sous la *forme indéterminée* $\infty \times 0$.

3° **Quotient.** — a) Si $|u_n| \rightarrow +\infty$ et si v_n est borné, $\left|\frac{u_n}{v_n}\right| \rightarrow +\infty$.

On a, par hypothèse, $|v_n| < K$, ce qui équivaut à $\frac{1}{|v_n|} > \frac{1}{K}$, K strictement positif. On est ramené au produit (cas a). La proposition s'applique en particulier si $v_n \rightarrow M$, M pouvant ici être égal à 0.

b) Si u_n est borné et si $|v_n| \rightarrow +\infty$, $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$.

En effet $|v_n| \rightarrow +\infty$ équivaut à $\frac{1}{v_n} \rightarrow 0$. On est ramené au théorème III du n° 25. La proposition s'applique en particulier si $u_n \rightarrow L$, L pouvant être égal à 0.

c) Si $u_n \rightarrow \infty$ et si $v_n \rightarrow \infty$ on ne peut rien conclure a priori sur $\frac{u_n}{v_n}$. On dit que ce quotient se présente sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

De même si $u_n \rightarrow 0$ et si $v_n \rightarrow 0$, le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

27. **Limite d'un radical arithmétique.** — THÉORÈME I. — Si u_n admet une limite strictement positive L et si q est un entier naturel,

$\sqrt[q]{u_n}$ admet la limite $\sqrt[q]{L}$.

a) Démontrons la propriété pour $L = 1$. La double inégalité

$$(1) \quad 1 - \varepsilon < \sqrt[q]{u_n} < 1 + \varepsilon$$

équivaut, en supposant $0 < \varepsilon < 1$, à la double inégalité

$$(2) \quad (1 - \varepsilon)^q < u_n < (1 + \varepsilon)^q.$$

L'hypothèse faite sur ε entraîne

$$(1 - \varepsilon)^q < 1 - \varepsilon \quad \text{et} \quad 1 + \varepsilon < (1 + \varepsilon)^q.$$

Si alors on pose

$$(3) \quad 1 - \varepsilon < u_n < 1 + \varepsilon, \\ \exists N \text{ tel que } n > N \implies (3)' \implies (2) \implies (1).$$

Par suite, si $u_n \rightarrow 1$, $\sqrt[q]{u_n} \rightarrow 1$.

b) Démontrons la propriété dans le cas général. L'hypothèse

$$(u_n \rightarrow L) \iff \left(\frac{u_n}{L} \rightarrow 1\right)$$

entraîne, d'après la partie a)

$$\sqrt[q]{\frac{u_n}{L}} \rightarrow 1, \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt[q]{u_n}}{\sqrt[q]{L}} \rightarrow 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt[q]{u_n} \rightarrow \sqrt[q]{L}.$$

Extension à L négatif. — On ne peut l'envisager que si l'entier naturel q est impair. Il suffit alors de poser $u'_n = -u_n$ et $L' = -L$.

Extension à $L = 0$. — L'hypothèse $u_n \rightarrow 0$ entraîne que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } n > N \implies |u_n| < \varepsilon^q \iff \sqrt[q]{|u_n|} < \varepsilon.$$

Si q est pair il y a lieu cependant de restreindre l'énoncé au cas où tous les termes de la suite $\{u_n\}$ sont positifs ou nuls (à partir d'un certain rang).

THÉORÈME II. m étant un nombre rationnel positif et L un nombre tel que L^m ait un sens, si u_n admet la limite L , $(u_n)^m$ admet la limite L^m .

Soit $m = \frac{p}{q}$, fraction irréductible. On vient de voir que $(u_n)^{\frac{1}{q}} \rightarrow L^{\frac{1}{q}}$. Or, d'après le théorème sur la limite d'un produit de facteurs, en nombre fini p , si $v_n \rightarrow l$, $(v_n)^p \rightarrow l^p$. Ici $v_n = (u_n)^{\frac{1}{q}}$ et $l = L^{\frac{1}{q}}$.

Si $L = 0$ et si q est pair, la proposition n'est valable que si $u_n > 0$, à partir d'un certain rang.

THÉORÈME III. m étant un nombre rationnel négatif et L un nombre tel que L^m ait un sens, si u_n admet la limite L , $(u_n)^m$ admet la limite L^m .

Ici on a ici $L \neq 0$. On applique le théorème II à $\frac{1}{u_n}$ qui admet la limite $\frac{1}{L}$.

THÉORÈME IV. m étant un nombre rationnel positif, si u_n tend vers $+\infty$, il en est de même de $(u_n)^m$.

$$\forall A > 0, \exists N \text{ tel que } n > N \implies u_n > A^{\frac{1}{m}}.$$

$$\text{Il en résulte que} \quad n > N \implies (u_n)^m > A.$$

Cas particulier : m étant un nombre rationnel positif,

$$n^m \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^m} \rightarrow 0.$$

III. SUITES REMARQUABLES

28. Suite formée par les puissances entières d'un nombre positif.

1° **THÉORÈME I.** — Les puissances entières d'un nombre plus grand que 1 sont plus grandes que 1 et forment une suite croissante dont le terme général tend vers $+\infty$.

Soit $a > 1$, et considérons la suite $a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$.

L'inégalité $1 < a$ entraîne l'inégalité $a < a^2$, et plus généralement l'inégalité $a^n < a^{n+1}$ quel que soit l'entier positif n ; par suite on peut écrire

$$1 < a < a^2 < \dots < a^n < a^{n+1} < \dots$$

ce qui montre que la suite étudiée est croissante et que tous ses termes sont supérieurs à 1.

Posons $a = 1 + h$, h est un nombre positif; d'après la formule du binôme

$$a^n = (1 + h)^n = 1 + \frac{n}{1}h + \frac{n(n-1)}{1.2}h^2 + \dots + h^n,$$

et, tous les termes étant positifs, $a^n > nh$.

Comme $nh \rightarrow +\infty$ (n° 26), il en résulte $a^n \rightarrow +\infty$.

THÉORÈME II. — Les puissances entières d'un nombre positif inférieur à 1 sont inférieures à 1 et forment une suite décroissante qui admet pour limite 0.

Soit a un nombre compris entre 0 et 1, posons $u_n = a^n$; si $b = \frac{1}{a}$, et si l'on pose $v_n = b^n$, $u_n = \frac{1}{v_n}$; d'après le théorème précédent v_n est plus grand que 1, croît et devient infini; par suite l'inverse u_n est plus petit que 1, décroît et tend vers 0.

Généralisation. — Si a est un nombre négatif, a^n est positif pour n pair, négatif pour n impair et la valeur absolue de a^n est $|a|^n$; on pourra donc énoncer, d'après les résultats précédents :

1° si $a < -1$, $a^n \rightarrow \infty$

2° si $-1 < a < 0$, $a^n \rightarrow 0$.

2° Application à la somme des n premiers termes d'une progression géométrique. — Considérons la progression géométrique $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ et la somme S_n de ses n premiers termes

$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}.$$

Si $q \neq 1$, une égalité usuelle permet d'écrire $S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$.

1° si $|q| > 1$, $q^n \rightarrow \infty$ et $S_n \rightarrow \infty$.

2° si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$ et $S_n \rightarrow \frac{a}{1-q}$.

Si $q = 1$, on voit directement que $S_n = na$, et devient infini.

Si $q = -1$, S_n est alternativement égal à a et à 0, S_n n'a pas de limite.

En résumé, la somme des n premiers termes d'une progression géométrique n'a de limite pour n infini que si la raison a une valeur absolue strictement inférieure à 1.

29. Suite formée par les racines n -ièmes d'un nombre positif. —

THÉORÈME I. — Les racines n -ièmes d'un nombre plus grand que 1 sont plus grandes que 1, et forment une suite décroissante qui admet pour limite 1.

Considérons, a étant plus grand que 1, la suite $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \dots, \sqrt[n]{a}, \dots$

D'abord, on a $\sqrt[n]{a} > 1$, cette inégalité étant équivalente à celle qu'on obtient en élevant les deux membres à la puissance n , c'est-à-dire $a > 1$.

Ensuite on a $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}$, car cette inégalité équivaut à celle qu'on obtient en élevant les deux membres à la puissance $n(n+1)$, c'est-à-dire $a^{n+1} > a^n$.

Enfin montrons que, ϵ étant un nombre positif quelconque, on peut lui associer un entier N tel que l'inégalité

$$(1) \quad n > N \quad \text{entraîne l'inégalité} \quad (2) \quad \sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon.$$

$$\text{L'inégalité (2) est équivalente à l'inégalité} \quad (3) \quad a < (1 + \epsilon)^n.$$

Or, $1 + n\epsilon < (1 + \epsilon)^n$; pour que l'inégalité (3) soit vérifiée, il suffit que l'inégalité

$$(4) \quad a < 1 + n\epsilon$$

le soit, et pour cela que n soit supérieur à $\frac{a-1}{\epsilon}$; si N est un entier supérieur à $\frac{a-1}{\epsilon}$, l'inégalité (1) entraîne successivement les inégalités (4), (3) et (2).

THÉORÈME II. — Les racines n^{e} d'un nombre positif plus petit que 1 sont plus petites que 1 et forment une suite croissante qui admet pour limite 1.

Le nombre a étant compris entre 0 et 1, posons $u_n = \sqrt[n]{a}$; si $b = \frac{1}{a}$, et si l'on pose $v_n = \sqrt[n]{b}$, $u_n = \frac{1}{v_n}$; d'après le théorème précédent v_n est plus grand que 1, décroît et tend vers 1, par suite l'inverse u_n est plus petit que 1, croît et tend vers 1.

30. 1^o SUITE $\left\{ u_n = \frac{a^n}{n^p} \right\}$. **THÉORÈME.** a étant un nombre positif supérieur à 1, et p un nombre rationnel positif, $\frac{a^n}{n^p} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Considérons d'abord le cas où $p = 1$ et montrons que $\frac{a^n}{n} \rightarrow +\infty$.

Posons $a = 1 + h$, h étant positif; d'après la formule du binôme on a

$$a^n > \frac{n(n-1)}{2} h^2, \quad \text{et par suite} \quad \frac{a^n}{n} > (n-1) \frac{h^2}{2}.$$

$$\text{Or} \quad n-1 \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad (n-1) \frac{h^2}{2} \rightarrow +\infty.$$

$$\text{A fortiori} \quad \frac{a^n}{n} \rightarrow +\infty.$$

Dans le cas général écrivons $\frac{a^n}{n^p} = (v_n)^p$ avec $v_n = \frac{\left(\frac{1}{a^p}\right)^n}{n}$.

$\frac{1}{a^p}$ étant un nombre fixe supérieur à 1, d'après la première partie de cette étude, $v_n \rightarrow +\infty$. Il en résulte que $(v_n)^p \rightarrow +\infty$ (n^o 27).

2^o SUITE $\left\{ u_n = \sqrt[n]{n} \right\}$. — **THÉORÈME.** $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$

D'abord $\sqrt[n]{n} > 1$, cette inégalité étant équivalente à celle qu'on obtient en élevant les deux membres à la puissance n , c'est-à-dire $n > 1$.

Posons $\sqrt[n]{n} = 1 + v_n$, $v_n > 0$; d'après la formule du binôme

$$n = (1 + v_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} (v_n)^2, \quad \text{et par suite} \quad (v_n)^2 < \frac{2}{n-1}.$$

Il en résulte $\lim (v_n)^2 = 0$ et par suite $\lim v_n = 0$.

IV. SUITES ADJACENTES. LE NOMBRE e

31. Critère de convergence d'une suite monotone. — THÉORÈME. — Une suite croissante (au sens strict ou au sens large) est convergente si et seulement si elle est majorée.

Une suite ne peut converger que si elle est bornée et en particulier majorée.

Inversement, soit $\{u_n\}$ une suite à la fois croissante et majorée. L'ensemble des nombres u_n admet une borne supérieure L (n° 11). Il en résulte que, quel que soit le nombre positif ε , il existe au moins un terme u_N de la suite supérieur à $L - \varepsilon$. La suite étant croissante :

$$n > N \implies u_n \geq u_N \quad \text{et} \quad L - \varepsilon < u_n \leq L.$$

Nous démontrerions de la même façon :

THÉORÈME. — Une suite décroissante (au sens strict ou au sens large) est convergente si et seulement si elle est minorée.

COROLLAIRE. — La suite $\{u_n\}$ croissante (resp. décroissante) diverge si et seulement si $u_n \rightarrow +\infty$ (resp. $u_n \rightarrow -\infty$).

En effet si la suite $\{u_n\}$ croissante diverge, il résulte du théorème précédent qu'elle n'est pas majorée. Autrement dit

$$\forall A > 0, \exists N \quad \text{tel que} \quad u_N > A.$$

Mais alors, du fait de la monotonie,

$$n > N \implies u_n \geq u_N \quad \text{et a fortiori} \quad u_n > A,$$

autrement dit, $u_n \rightarrow +\infty$.

Inversement, nous savons que $u_n \rightarrow +\infty$ est une condition suffisante de divergence.

32. Suites adjacentes. — 1° DÉFINITION. — Deux suites, l'une $\{u_n\}$ croissante, l'autre $\{v_n\}$ décroissante sont dites adjacentes si $v_n - u_n$ admet la limite 0.

Remarquons que $\{v_n - u_n\}$ est une suite décroissante. En effet

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0.$$

La suite $\{v_n - u_n\}$ décroissante est minorée par sa limite 0 (n° 31), par suite $v_n \geq u_n$. On a ainsi, quel que soit n ,

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_2 \leq v_1.$$

La suite $\{u_n\}$ étant croissante et majorée (par v_1) est convergente.

La suite $\{v_n\}$ étant décroissante et minorée (par u_1) est convergente.

$u_n \rightarrow L, v_n \rightarrow L' \Rightarrow v_n - u_n \rightarrow L' - L$. Or $v_n - u_n \rightarrow 0$. D'où $L = L'$; nous énoncerons :

THÉORÈME. — Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent une limite commune.

Remarquons qu'il ne s'agit que d'un cas particulier de deux ensembles adjacents.

2° Segments emboîtés. — Dans l'étude précédente, chaque segment $[u_n, v_n]$ est un sous-ensemble du segment qui le précède; on dit que les segments $[u_n, v_n]$ sont *emboîtés*. Inversement démontrons :

THÉORÈME. — Soit une suite de segments $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ tels que

a) I_{n+1} est un sous-ensemble de I_n

b) la longueur de I_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Il existe alors un nombre réel, α , et un seul, commun à tous les segments I_n .

Appelant u_n et v_n les bornes inférieure et supérieure de I_n , la première hypothèse entraîne

$$u_n \leq u_{n+1} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \leq v_n.$$

La seconde s'exprime par le fait que $\lim (v_n - u_n) = 0$.

Les suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont adjacentes.

Leur limite commune, α , appartient à tous les segments I_n .

En abrégé, une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers zéro définit un nombre réel et un seul.

3° Première application : définition du nombre e . — Considérons la suite $\{u_n\}$ dont les premiers termes sont $u_0 = 1, u_1 = 1 + \frac{1}{1!}$, et dont le terme général est

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Associions-lui la suite $\{v_n\}$ dont le premier terme est v_1 et dont le terme général est

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

La suite $\{u_n\}$ est croissante puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ est positif.

Montrons que $\{v_n\}$ est décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!},$$

nombre négatif dès que $n > 1$.

Comme en outre $\lim (v_n - u_n) = 0$, les deux suites sont adjacentes. Elles admettent donc une limite commune L . On a

$$\forall n, \quad u_n < L < v_n.$$

Montrons par l'absurde que cette limite L est un nombre irrationnel. Supposons que L soit un nombre rationnel, $\frac{P}{N}$, et écrivons la double inégalité

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{N!} < \frac{P}{N} < 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{N!} + \frac{1}{N!}.$$

En multipliant tous ces nombres par $N!$ on obtient au premier membre un entier A et la double inégalité devient

$$A < P \cdot (N - 1)! < A + 1.$$

Or, il n'existe pas d'entier compris entre les deux entiers consécutifs A et $A + 1$; comme nous arrivons à une contradiction, L est nécessairement irrationnel.

Il faut donc un symbole spécial pour représenter le nombre irrationnel qui est la limite de $\{u_n\}$, ce nombre, comme nous le verrons, jouant un grand rôle en Analyse :

DÉFINITION. — On désigne par la lettre e le nombre irrationnel limite de la suite qui a pour terme général.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

VALEURS APPROCHÉES DU NOMBRE e . — La double inégalité

$$u_n < e < u_n + \frac{1}{n!}$$

montre que u_n est une valeur approchée par défaut de e avec une erreur intérieure à $\frac{1}{n!}$.

Mais on ne peut calculer pour u_n qu'une valeur approchée u'_n , sous forme décimale; de là une seconde source d'erreurs.

Proposons-nous par exemple d'encadrer u_n par deux nombres dont la différence est inférieure à 10^{-5} . Écrivons

$$e - u'_n = (e - u_n) + (u_n - u'_n)$$

ce qui nous montre que l'erreur totale commise en remplaçant e par la valeur approchée u'_n est la somme d'une erreur dite systématique $e - u_n$ et d'une erreur due au calcul $u_n - u'_n$.

Pour obtenir $0 < e - u'_n < 10^{-5}$, il est suffisant (mais pas nécessaire) de réaliser

$$\begin{aligned} 0 < e - u_n < 5 \cdot 10^{-6} \quad \text{et} \quad 0 < u_n - u'_n < 5 \cdot 10^{-6} \quad \text{ou a fortiori} \\ \frac{1}{n!} < 5 \cdot 10^{-6} \quad \text{et} \quad 0 < u_n - u'_n < 5 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

La première condition s'écrit $n! > 2 \cdot 10^5$ ou (comme $8! = 40\,320$ et $9! = 362\,880$) $n > 9$. Nous sommes amenés à calculer une valeur u'_9 , approchée par défaut de u , avec une erreur inférieure à $5 \cdot 10^{-6}$; la somme des trois premiers termes est connue exactement, et égale à 2,5; nous calculerons donc chacun des 7 termes suivants, par défaut, avec une

erreur inférieure à $\frac{5}{7} \cdot 10^{-8}$, ou, pratiquement, 10^{-7} , c'est-à-dire avec sept décimales exactes. Nous formerons le tableau suivant, dans lequel l_p désigne $\frac{1}{p!}$:

$$l_0 + l_1 + l_2 = 2,5$$

l_3	0,166 666 6
l_4	0,041 666 6
l_5	0,008 333 3
l_6	0,001 388 8
l_7	0,000 198 4
l_8	0,000 024 8
l_9	0,000 002 7
u'_9	<u>2,718 281 2</u>

u'_9 est une valeur approchée de e , par défaut, avec une erreur inférieure à $\frac{1}{9!} + (u_9 - u'_9)$ et *a fortiori* (puisque $\frac{1}{9!} < 3 \cdot 10^{-8}$ et $u_9 - u'_9 < 7 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$) inférieure à $4 \cdot 10^{-8}$.

Autrement dit : $2,718\ 281\ 2 < e < 2,718\ 285\ 2$.

Nous retiendrons l'encadrement

$$2,718\ 281 < e < 2,718\ 286.$$

Nous pouvons affirmer que 2,718 28 est une valeur approchée de e , par défaut, avec une erreur inférieure à $6 \cdot 10^{-8}$ et *a fortiori* à 10^{-8} .

4° Deuxième application. — Suites des valeurs approchées décimales d'un nombre réel. — A étant un nombre réel donné, on peut montrer, comme conséquence du fait que le corps des réels est archimédien (n° 9), et en raisonnant comme nous l'avons fait au n° 2-3°, que, quel que soit l'entier positif n il existe un entier a_n et un seul tel que

$$(1) \quad \frac{a_n}{10^n} \leq A < \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Montrons que la suite $\left\{ u_n = \frac{a_n}{10^n} \right\}$ des valeurs approchées décimales par défaut et la suite $\left\{ v_n = \frac{a_n + 1}{10^n} \right\}$ des valeurs approchées décimales par excès du nombre A sont adjacentes.

$$\text{Des inégalités } \frac{a_n}{10^n} \leq A < \frac{a_n + 1}{10^n} \quad \text{et} \quad \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leq A < \frac{a_{n+1} + 1}{10^{n+1}}$$

$$\text{retenons } \frac{a_n}{10^n} < \frac{a_{n+1} + 1}{10^{n+1}} \quad \text{qui s'écrit} \quad 10 a_n < a_{n+1} + 1$$

ou encore, puisque a_n et a_{n+1} sont des entiers,

$$10 a_n \leq a_{n+1}.$$

On en déduit $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. La suite $\{ u_n \}$ est ainsi croissante au sens large. On prouve, par un raisonnement analogue, que la suite $\{ v_n \}$ est décroissante au sens large.

Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Les deux suites étant adjacentes, elles sont convergentes et admettent une limite commune qui est A .

Remarquons que si A est un nombre décimal on a, à partir d'un certain rang, $u_n = A$.

REPRÉSENTATION DÉCIMALE D'UN NOMBRE. — Le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ n'est égal à un nombre décimal que si, p et q étant premiers entre eux, le dénominateur q ne contient pas d'autre facteur premier que 2 et 5.

Si A est un nombre rationnel ne jouissant pas de cette propriété, ou si A est un nombre irrationnel, la suite précédente $\{u_n\}$ a une infinité de termes distincts et, pour $n > p$, les p premiers chiffres décimaux de u_n sont les chiffres décimaux de u_p ; si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ désignent ces chiffres successifs, on peut écrire A sous la forme $E, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \dots$, E désignant la partie entière de A ; le symbole ainsi écrit s'appelle la *représentation décimale* de A . Si A est un nombre rationnel non égal à une fraction décimale, on sait que la représentation décimale est périodique, c'est-à-dire que pour en écrire les divers chiffres, il suffit, à partir d'un certain rang, de répéter la même succession de chiffres dans le même ordre.

Réciproquement, si l'on donne *a priori* le symbole $E, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \dots$ où E est un entier positif ou nul, et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots$ des chiffres déterminés quand leur rang est connu, il existe un nombre A qui admet ce symbole pour représentation décimale, c'est la limite de la suite (non décroissante, majorée par $E + 1$), formée par les nombres

$$u_1 = E, \alpha_1; u_2 = E, \alpha_1 \alpha_2; \dots; u_p = E, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p; \dots$$

Si la représentation donnée est périodique, on démontre que le nombre A est rationnel. Une suite décimale non périodique ne peut définir qu'un nombre irrationnel.

5° *Troisième application.* — **Caractère suffisant du critère de convergence de Cauchy.** — Reprenons les notations du n° 24, 2° et considérons une suite $\{u_n\}$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \forall p > N(\varepsilon) \\ \forall q > N(\varepsilon) \end{array} \right\} \text{ on a } |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

On montre, comme au n° 24, 2°, que cette suite est bornée.

La partie A_n de $\mathbb{R}$ formée par les réels u_k tels que $k > n$ est donc bornée; elle admet une borne inférieure a_n , une borne supérieure b_n :

$$A_{n+1} \subset A_n \implies [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

Les segments $[a_n, b_n]$ sont ainsi emboîtés.

D'autre part, d'après la définition des bornes, une fois n fixé, supérieur à $N(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \exists p > n \text{ tel que } u_p < a_n + \varepsilon; \quad \exists q > n \text{ tel que } u_q > b_n - \varepsilon. \\ b_n - a_n &= (b_n - u_q) + (u_q - u_p) + (u_p - a_n) \\ b_n - a_n &< (b_n - u_q) + |u_q - u_p| + (u_p - a_n) < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n > N(\varepsilon), \quad b_n - a_n < 3\varepsilon.$$

Par suite les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont adjacentes, et comme $a_n \leq u_n \leq b_n$, leur limite commune L est aussi limite de $\{u_n\}$.

V. SUITES RÉCURRENTES

33. Récurrences $u_n = f(u_{n-1})$. — Il s'agit d'une suite $\{u_n\}$ définie par la donnée de u_1 et d'une relation de la forme $u_n = f(u_{n-1})$.

1° Une étude théorique de cette question est prématurée. Le lecteur pourra y revenir après avoir étudié la notion de continuité d'une fonction. Il vérifiera alors que si la suite $\{u_n\}$ a une limite L et si la fonction f est continue, L est nécessairement racine de l'équation $l = f(l)$. Il en résulte que si cette équation n'a pas de racine, la suite n'a pas de limite et que si, au contraire, il existe un ou plusieurs nombres L_0 tels que $L_0 = f(L_0)$ le problème, un peu vague : « étudier si $\{u_n\}$ a une limite » est remplacé par le problème plus précis, donc plus facile à résoudre : « examiner si $\{u_n\}$ admet pour limite un nombre connu L_0 ».

Nous montrerons au n° 268 que dans le cas où la fonction f admet sur un voisinage $\mathcal{C}$ d'une racine L_0 de l'équation $l = f(l)$ une dérivée de signe fixe telle que $|f'(x)| < k < 1$, k étant un nombre fixe, il suffit que pour L_0 soit limite que deux termes consécutifs de la suite (et même un seul si $f'(x) > 0$) appartiennent à $\mathcal{C}$.

2° Nous allons nous borner ici à étudier quelques exemples simples. Le plus souvent ou bien la suite $\{u_n\}$ est monotone, ou bien on peut en extraire les deux suites monotones $\{u_{2p}\}$ et $\{u_{2p+1}\}$. On commencera à vérifier que la suite est définie, c'est-à-dire que u_p existe quel que soit p . On construira ensuite le graphe (Γ) de la fonction $y = f(x)$; ce graphe permettra d'orienter l'étude dans un sens ou dans un autre, en particulier une limite éventuelle est l'abscisse de l'un de ses points d'intersection avec la première bissectrice $y = x$.

EXEMPLE I. — Étant donnés les deux nombres positifs a et u_1 , étudier la suite que définit la relation de récurrence :

$$(1) \quad u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{a^2}{u_{n-1}} \right), \quad n \geq 2.$$

Observons d'abord que les termes de cette suite existent et sont tous positifs. Traçons le graphe (Γ') de la fonction $y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a^2}{x} \right)$; il s'agit d'une hyperbole admettant pour centre de symétrie le point O et pour asymptotes l'axe $y'Oy$ et la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$. Il nous suffit de considérer l'arc (Γ'') de (Γ') qui correspond à $x > 0$.

Une limite éventuelle de la suite devant vérifier

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{a^2}{L} \right) \quad \Leftrightarrow \quad L^2 = a^2$$

et ne pouvant être négative (à cause de $u_n > 0$), cette limite ne pourra être que l'abscisse a du point d'intersection A de (Γ'') et de la première bissectrice. Notons que A correspond au minimum de la fonction $y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a^2}{x} \right)$. Au terme u_1 de la suite correspond le point M_1 ($x = u_1, y = u_1$) de (Γ') . Pour trouver u_2 on reporte u_1 en abscisse en menant par M_1 la parallèle à Ox jusqu'au point P_1 situé sur la première bissectrice; la parallèle à Oy menée par P_1 rencontre (Γ'') au point M_2 dont l'ordonnée est u_2 ; on mène de M_2 la parallèle à Ox jusqu'au point P_2 situé sur la première bissectrice, la parallèle à Oy menée par P_2 ren-

contre (Γ') au point M_3 , dont l'ordonnée est u_4 , etc. On constate sur la figure que les sommets P de la ligne brisée $M_1P_1M_2P_2M_3P_3 \dots$ sont situés sur la demi-droite opposée à AO et qu'ils se rapprochent de plus en plus de A (fig. 2).

Nous sommes ainsi conduits à essayer de prouver que, pour $n > 2$, la suite est décroissante et qu'elle admet pour limite a . A cet effet, formons

$$u_n - a = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{a^2}{u_{n-1}} \right) - a$$

ou

$$u_n - a = \frac{(u_{n-1} - a)^2}{2u_{n-1}} \quad (2)$$

L'égalité (2) montre que u_n est supérieur à a pour $n > 2$, et cela que u_1 soit choisi supérieur ou inférieur à a .

Formons

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a^2}{u_n} \right) - u_n \\ &= \frac{a^2 - u_n^2}{2u_n} \end{aligned}$$

$u_n > a \implies u_{n+1} - u_n < 0$ pour $n > 2$. La suite $\{u_n\}$ est ainsi décroissante; comme, u_1 étant mis à part, elle est minorée par a , elle admet une limite qui ne peut être que a , seule limite éventuelle possible a priori.

EXEMPLE II. — Étudier la suite que définissent les formules

$$u_1 = 1;$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}} \quad (n > 2).$$

On peut faire un préambule géométrique analogue à celui de l'exemple I : u_n est positif, (Γ') est l'arc $x > 0$ d'une hyperbole d'asymptotes $y = 1$ et $x = 0$ (fig. 3). La seule limite éventuelle est l'abscisse $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ du point

d'intersection A de (Γ') et de la droite $y = x$. Ici les sommets $P_2, P_4, \dots$ de la ligne brisée sont sur la demi-droite AO , alors que $P_1, P_3 \dots$ sont sur la demi-droite opposée.

Nous sommes ainsi conduits à essayer de prouver que les suites $\{u_{2p+1}\}$ et $\{u_{2p}\}$ sont

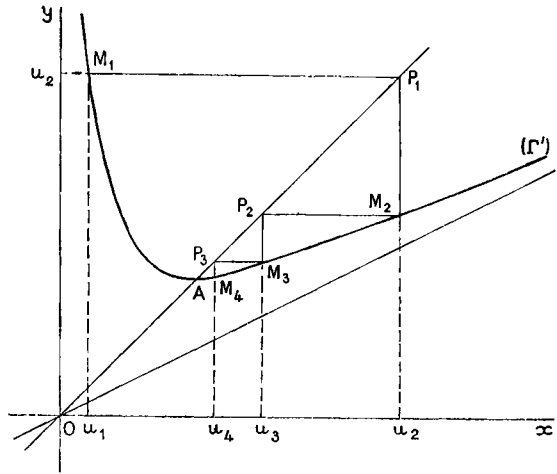


FIG. 2.

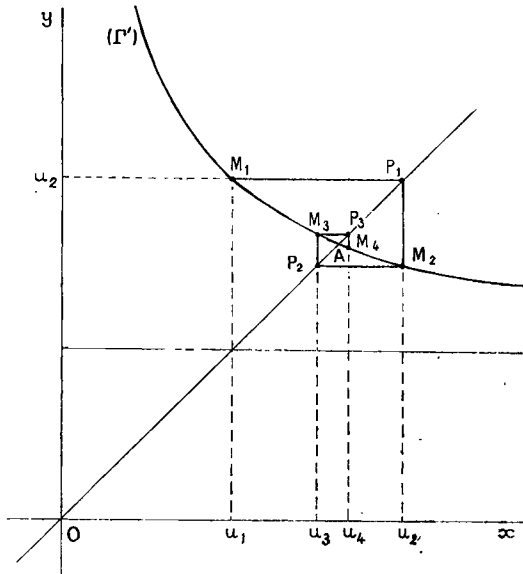


FIG. 3.

respectivement croissante et décroissante et qu'elles admettent la limite commune $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Retranchons membre à membre les deux égalités

$$u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}} \quad \text{et} \quad l = 1 + \frac{1}{l}; \quad \text{nous trouvons} \quad u_n - l = \frac{l - u_{n-1}}{lu_{n-1}}.$$

Il en résulte $(u_n - l)(u_{n-1} - l) < 0$; $u_1, u_3, u_5, \dots$ sont inférieurs à l , alors que $u_2, u_4, u_6, \dots$ sont supérieurs à l .

Comme d'autre part tous les termes de la suite sont supérieurs à 1 (sauf $u_1 = 1$) on a

$$|u_n - l| < \frac{1}{l} |u_{n-1} - l|.$$

En multipliant membre à membre les inégalités analogues depuis $|u_2 - l| \leq \frac{|u_1 - l|}{l}$ on trouve

$$|u_n - l| < \frac{1}{l^{n-1}} (l - 1).$$

l étant supérieur à 1, $\frac{1}{l^{n-1}}$ tend vers 0 et u_n tend vers l .

34. Récurrences homographiques. — Il s'agit du cas où la fonction f est une fonction homographique. Soit :

$$(1) \quad u_n = \frac{au_{n-1} + b}{cu_{n-1} + d}.$$

La méthode utilisée sur l'exemple numérique précédent peut donner de bons résultats mais nous montrerons (III, 90, 4^o) qu'il vaut mieux calculer les valeurs doubles (réelles ou complexes) α et β de l'homographie et écrire la relation (1) sous l'une des formes équivalentes

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_{n-1} - \alpha} + k$$

suivant que ces valeurs doubles sont distinctes ou confondues. On en déduit, suivant le cas,

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^{n-1} \frac{u_1 - \alpha}{u_1 - \beta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_1 - \alpha} + (n-1)k.$$

35. Récurrences linéaires. — L'étude, faite ici sur le corps des réels, s'étend sans difficulté à celui des complexes.

1^{er} Cas. — On donne u_1 et $u_n = au_{n-1}$.

On explicite alors sans difficulté $u_n = a^{n-1}u_1$.

2^e Cas. — On donne u_1 et $u_n = au_{n-1} + b$; $b \neq 0$.

On peut en général se ramener au 1^{er} cas en posant : $v_n = u_n - h$.

Il vient : $v_n + h = a(v_{n-1} + h) + b$. Il suffit de choisir $h = \frac{b}{1-a}$, ce qui est possible, sauf si $a = 1$.

Mais si $a = 1$, on trouve immédiatement $u_n = u_1 + (n-1)b$.

3^e Cas. — On donne u_1, u_2 et (1) $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$.

Nous supposons $b \neq 0$, sinon nous serions dans le 1^{er} cas.

Pour n donné il est évidemment possible d'expliciter u_n en calculant successivement $u_3, u_4, \dots$. Ceci montre qu'il existe une suite et une seule répondant à la question.

Cherchons s'il existe des suites $\{r^n\}$, r réel, vérifiant (1).

On doit avoir : $r^n = ar^{n-1} + br^{n-2}$ ou $r^2 - ar - b = 0$. (2)

Si l'équation (2) a ses racines distinctes réelles r_1 et r_2 , (1) est vérifiée par les suites $\{r_1^n\}$, $\{r_2^n\}$ et, en tenant compte de l'homogénéité, par les suites $\{\alpha r_1^n + \beta r_2^n\}$ où α et β sont des constantes quelconques.

$$\text{Le système} \quad \begin{cases} \alpha r_1 + \beta r_2 = u_1 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 = u_2 \end{cases}$$

de deux équations linéaires aux inconnues α et β est de Cramer.

En effet : $\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} = r_1 r_2 (r_2 - r_1) = -b(r_2 - r_1)$ est différent de 0, puisque $b \neq 0$ et $r_2 \neq r_1$.

Ce système admet donc une solution (α_0, β_0) et une seule. D'où une suite $\{\alpha_0 r_1^n + \beta_0 r_2^n\}$ vérifiant toutes les conditions imposées. D'après l'unicité, c'est la suite cherchée.

Le calcul s'étend au cas où r_1 et r_2 sont des nombres complexes; r_1 et r_2 sont alors conjugués puisque a et b sont réels; il en est de même pour α_0 et β_0 et la suite obtenue $\{\alpha_0 r_1^n + \beta_0 r_2^n\}$ est naturellement réelle.

Dans le cas particulier où l'équation (2) a une racine double

$$r_1 = \frac{a}{2}; \quad b = -\frac{a^2}{4}, \quad (a \neq 0)$$

on cherche s'il existe une suite $\{r^n v_n\}$ vérifiant la relation (1) qui s'écrit :

$$u_n = a u_{n-1} - \frac{a^2}{4} u_{n-2}.$$

On obtient ainsi

$$v_n = 2 v_{n-1} - v_{n-2} \quad \text{ou} \quad v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2}.$$

ce qui montre que $v_n - v_{n-1}$ a une valeur k indépendante de n ; d'où, par addition membre à membre

$$\sum_{i=2}^n (v_i - v_{i-1}) = (n-1)k \quad \text{ou} \quad v_n - v_1 = (n-1)k.$$

La suite $\{nr^n\}$, qui correspond à $v_1 = k = 1$, vérifie donc la relation (1).

Il en résulte que la suite $\{(\alpha + \beta n)r_1^n\}$ vérifie (1), quelles que soient les constantes α et β .

$$\text{Le système} \quad \begin{cases} (\alpha + \beta)r_1 = u_1 \\ (\alpha + 2\beta)r_1^2 = u_2 \end{cases}$$

est de Cramer et admet une solution (α_0, β_0) et une seule. La suite cherchée est

$$\{(\alpha_0 + \beta_0 n)r_1^n\}.$$

REMARQUE. — On pourra vérifier que l'ensemble des suites $\{u_n\}$ solutions de (1) est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des complexes et comparer cette étude à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants (n° 252). Une solution matricielle de la question est par ailleurs traitée dans le tome I, n° 234.

36. EXERCICE : ÉTUDE DES SUITES DE TERMES GÉNÉRAUX :

$$u_n = \cos(n\alpha + \varphi); \quad v_n = \sin(n\alpha + \varphi).$$

1° Supposons que $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ convergent et admettent les limites u et v .

$$u_{n+1} + u_{n-1} = \cos[(n\alpha + \varphi) + \alpha] + \cos[(n\alpha + \varphi) - \alpha] = 2 \cos(n\alpha + \varphi) \times \cos \alpha$$

$$v_{n+1} + v_{n-1} = \sin[(n\alpha + \varphi) + \alpha] + \sin[(n\alpha + \varphi) - \alpha] = 2 \sin(n\alpha + \varphi) \times \cos \alpha.$$

Des trois relations

$$(1) \quad u_{n+1} + u_{n-1} = 2 u_n \cos \alpha; \quad (2) \quad v_{n+1} + v_{n-1} = 2 v_n \cos \alpha; \quad (3) \quad u_n^2 + v_n^2 = 1.$$

on déduit, par un passage à la limite, les trois relations

$$(4) \quad u(1 - \cos \alpha) = 0; \quad (5) \quad v(1 - \cos \alpha) = 0; \quad (6) \quad u^2 + v^2 = 1.$$

De (6) il résulte que u et v ne sont pas nuls tous les deux; par suite

$$\cos \alpha = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = 2k\pi.$$

Ainsi $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ ne peuvent être toutes deux convergentes que si $\alpha = 2k\pi$.

Inversement, si $\alpha = 2k\pi$ on a $u_n = \cos \varphi$, $v_n = \sin \varphi$. Les suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ formées de nombres égaux admettent les limites $u = \cos \varphi$ et $v = \sin \varphi$.

2° Supposons que $\{u_n\}$ converge et admette la limite u ; on ne fait aucune hypothèse sur $\{v_n\}$.

$$\text{Écrivons} \quad \cos[(n+1)\alpha + \varphi] = \cos(n\alpha + \varphi) \cos \alpha - \sin(n\alpha + \varphi) \sin \alpha$$

$$\text{ou} \quad (7) \quad v_n \sin \alpha = u_n \cos \alpha - u_{n+1}$$

$v_n \sin \alpha$ admet donc la limite $u(\cos \alpha - 1)$. Cela exige $\sin \alpha = 0$; sans quoi v_n admettrait la limite $v = \frac{u(\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha}$ et, d'après le 1°, α serait égal à $2k\pi$, ce qui est en contradiction avec $\sin \alpha \neq 0$.

Ainsi $\{u_n\}$ ne peut converger que si $\sin \alpha = 0$, c'est-à-dire si $\alpha = k\pi$.

Inversement supposons $\alpha = k\pi$. On a $u_n = \cos(nk\pi + \varphi) = (-1)^n \cos \varphi$.

a) Si k est pair, $u_n = \cos \varphi$ admet la limite $u = \cos \varphi$.

b) Si k est impair, $u_n = (-1)^n \cos \varphi$ n'admet une limite que si $\cos \varphi = 0$, c'est-à-dire si $\varphi = \frac{\pi}{2} + h\pi$, la limite est alors 0.

3° En écrivant $v_n = \cos\left(n\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ on constate que $\{v_n\}$ ne peut converger que si $\alpha = k\pi$. Inversement supposons $\alpha = k\pi$.

a) Si k est pair, v_n admet la limite $\sin \varphi$.

b) Si k est impair, v_n n'admet une limite que si $\sin \varphi = 0$, c'est-à-dire si $\varphi = h\pi$; la limite est alors 0.

VI. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES RÉELS

Cette question ne figure pas au programme de 1963 et pourra être réservée à une seconde lecture de l'ouvrage.

37. Longueur d'un segment de droite. — 1° **Rappel.** — Nous supposerons acquis les axiomes relatifs à la droite, au début de la Géométrie.

En particulier nous admettons qu'entre deux points A et B d'une droite D

il existe au moins un autre point de cette droite, et par suite une infinité de tels points. Au couple de points A et B nous associons sur la droite D tous les points compris entre A et B; nous obtenons ainsi ce qu'on appelle le segment de droite [AB].

Nous supposons acquises les notions suivantes :

I. Il existe dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des segments de droite une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ appelée l'égalité des segments de droite.

Nous désignerons par $\mathcal{S}^* = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{R}}$ l'ensemble des classes d'équivalence; nous représenterons par des lettres telles que U, V, ... ces diverses classes d'équivalence; écrire $[AB] = U$, c'est écrire que le segment de droite [AB] est un représentant de la classe U. Dans la suite, pour simplifier, et par abus de langage, U sera appelé segment.

Nous admettons que, U étant donné, on peut déterminer sur la droite D deux points A et A' tels que, O étant connu, $[OA] = [OA'] = U$.

II. L'ensemble $\mathcal{S}^*$ est totalement ordonné; étant donnés deux segments U et V : ou bien $U < V$, ou bien $U = V$, ou bien $U > V$.

III. Il existe dans l'ensemble $\mathcal{S}^*$ une opération, l'addition des segments, qui est associative, commutative, et admet un élément neutre, le segment nul, c'est-à-dire celui qui a pour représentant un couple formé de deux points confondus.

Dans la suite, quand nous aurons besoin d'un représentant du segment U, nous le construirons sur une demi-droite OΔ portée par D, d'origine O, le plus souvent à partir de O, soit $U = [OA]$.

IV. Le produit du segment $U = [OA]$ par l'entier naturel n est le segment $V = [OB]$ obtenu en additionnant n segments égaux à U :

$$V = U \times n \quad \text{ou} \quad n U;$$

on peut aussi écrire $[OB] = [OA] \times n$.

La multiplication d'un segment par un entier est distributive pour l'addition des segments et pour l'addition des entiers; en outre

$$(U \times n) \times p = U \times (np).$$

V. Inversement, étant donné un segment V et un entier n, il existe un segment U (noté $\frac{V}{n}$) tel que

$$V = U \times n.$$

REMARQUE. — En première lecture, on pourra considérer cette dernière propriété comme un axiome. Nous en donnerons une démonstration au n° 38, à partir des axiomes d'Archimède et de Cantor ⁽¹⁾.

2° La correspondance « segment $\longleftrightarrow$ nombre réel positif. »

a) Prenons pour unité sur la demi-droite OΔ le segment $U = [OA]$ et essayons de mesurer le segment $V = [OM]$.

⁽¹⁾ La propriété V pourrait être également démontrée à partir des axiomes de la géométrie euclidienne.

La première question qui se pose est la suivante : Pouvons-nous, à l'aide de la suite des multiples du segment U , non nul, atteindre ou encadrer le segment V ? En d'autres termes, existe-t-il un entier n tel que

$$nU \leq V < (n+1)U?$$

Cela est possible si l'on admet l'axiome suivant :

AXIOME D'ARCHIMÈDE. — Étant donnés deux segments non nuls U et V , il existe un entier p tel que

$$pU > V.$$

L'équivalence logique

$$pU > V \iff U > \frac{V}{p}$$

montre inversement qu'en divisant le segment donné V par un entier p convenable, on peut obtenir un segment inférieur à un segment non nul U donné.

b) LONGUEUR D'UN SEGMENT DE DROITE. — A tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ (p et $q \in \mathbb{N}$), associons le segment $[OP] = \left(\frac{U}{q}\right) \times p$, noté encore $U \times \frac{p}{q}$.

S'il existe un rationnel r tel que P coïncide avec M , on dit que r est la mesure de OM .

Ce cas écarté, P est soit entre O et M (cas I), soit au-delà de M (cas II). Les deux cas sont possibles : on peut toujours trouver n assez grand pour que

$$[OP] = \frac{U}{n} \implies [OP] < [OM] \quad (\text{cas I})$$

et l'axiome d'Archimède affirme l'existence d'un entier m tel que

$$[OP'] = \left(\frac{U}{n}\right) \times m \implies [OP'] > [OM] \quad (\text{cas II}).$$

Les rationnels peuvent être ainsi placés dans l'une ou l'autre de deux classes, notées I et II; elles constituent une partition de $\mathbb{Q}^+$ satisfaisant aux conditions α) et β) du n° 2; la coupure ouverte ainsi définie est un nombre irrationnel x , appelé *mesure* du segment $[OM] = V$, et on écrit

$$[OM] = [OA] \times x \quad \text{ou} \quad V = U \times x \quad \text{ou} \quad U \cdot x.$$

On dit encore que x est la *longueur* de $[OM]$ et on écrit

$$OM = x.$$

3° La correspondance « nombre réel positif $\longleftrightarrow$ segment ». — Étant donné un nombre irrationnel x positif, défini par une coupure ouverte dans $\mathbb{Q}^+$, existe-t-il sur $O \Delta$ un point M tel que $OM = x$?

La réponse à cette question n'est possible que si on admet l'axiome suivant :

AXIOME DE CANTOR-DEDEKIND (ou axiome des segments emboîtés). — Étant donnés sur une droite une suite de segments emboîtés $[P_1P'_1]$, $[P_2P'_2]$, ..., $[P_nP'_n]$, ... c'est-à-dire tels que

$$[P_{n+1}P'_{n+1}] \subseteq [P_nP'_n],$$

si quel que soit le segment E , on peut trouver n tel que $[P_nP'_n] < E$, il existe sur la droite un point et un seul appartenant à tous ces segments (fig. 4).

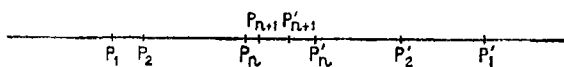


FIG. 4.

Cet axiome correspond à une propriété que nous avons établie sur l'ensemble R des nombres réels (n° 32, 2°).

Soit $\frac{a_n}{10^n}$ et $\frac{a_n + 1}{10^n}$ les valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ du nombre x (n° 32, 4°); on leur associe les points P_n et P'_n de la demi-droite $O\Delta$ tels que

$$OP_n = \frac{a_n}{10^n}, \quad OP'_n = \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Les propriétés des valeurs approchées décimales entraînent que les segments $[P_nP'_n]$ sont emboîtés, et comme $P_nP'_n = \frac{U}{10^n}$ peut être rendu aussi petit qu'on veut, l'axiome de Cantor-Dedekind permet d'affirmer l'existence d'un point M appartenant à tous les segments $[P_nP'_n]$; d'après le 2°, ce point M est tel que $OM = x$.

En remplaçant le segment unité U par un segment quelconque V , on peut définir dans l'ensemble $\mathcal{E}^*$ une loi externe dont le domaine des opérateurs est R^+ : le produit par un nombre réel positif. On représente par $V' = V.x$ le segment qui aurait pour mesure x si V était le segment unité.

4° Isomorphisme entre les ensembles $\mathcal{E}^*$ et R^+ . — Les deux paragraphes précédents 2° et 3° montrent l'existence d'une correspondance biunivoque entre les segments de droite et les nombres réels positifs, une fois choisi un segment unité U .

Cette correspondance est un isomorphisme pour la loi interne (resp. externe) définie sur $\mathcal{E}^*$ et l'addition (resp. la multiplication) définie sur R^+ .

En d'autres termes :

$$U.x + U.x' = U.(x + x') \quad \text{et} \quad (U.x)x' = U.(xx').$$

5° La correspondance « nombre réel $\longleftrightarrow$ point d'un axe ». — Ayant fixé sur une droite D une origine O , un sens positif (ou, ce qui revient au même, une demi-droite positive $O\delta$, une demi-droite négative $O\delta'$) et

ayant choisi un segment unité, on peut associer à tout point M de D le nombre réel x ainsi défini

$$x = OM \quad \text{si} \quad M \in O\delta, \quad x = -OM \quad \text{si} \quad M \in O\delta'.$$

Le nombre x est dit *abscisse* de M sur D ; on note

$$\overline{OM} = x.$$

Inversement à tout nombre réel x on sait associer un point M , sur $O\delta$ si $x > 0$, sur $O\delta'$ si $x < 0$, tel que $\overline{OM} = x$.

Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble R et l'ensemble des points de la droite D , une fois choisis une origine, un sens positif, et un segment unité.

Un vecteur unitaire $\vec{U}$ étant choisi sur D , on peut définir maintenant la *mesure algébrique* x d'un vecteur libre $\vec{V}$ porté par D et écrire

$$\vec{V} = \vec{U}.x.$$

Il y a isomorphisme entre l'ensemble E_1 des vecteurs libres de D et l'ensemble R pour les deux lois définies sur E_1 (cf I, nos 59 et 60) et les deux lois définies sur R (nos 5, 7 et 8).

En d'autres termes, si $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ ont pour mesures algébriques x et x' avec le vecteur unitaire $\vec{U}$ de D , $\vec{V} + \vec{V}'$ a pour mesure algébrique $x + x'$, et $\vec{V}.k$ ($k \in R$) a pour mesure algébrique xk .

***38. Complément sur l'étude de la longueur d'un segment de droite.** — La mesure d'un segment de droite a été déduite, au n° 37, de la possibilité du partage d'un segment en q parties égales. Nous allons montrer que la possibilité de ce partage est une conséquence des axiomes d'Archimède et de Cantor.

Nous considérerons des segments portés par la demi-droite $O\Delta$ d'origine O , et nous montrerons d'abord l'existence d'un milieu pour le segment $[OA]$, c'est-à-dire d'un point M , entre O et A , tel que $[OM] = [MA]$.

1° Existence de segments V_n tels que $2^n V_n \leq U$, U étant un segment donné.

Soit $U = [OA]$. On peut toujours trouver un point B , entre O et A , tel que

$$2[OB] < [OA].$$

Soit en effet C un point quelconque entre O et A et considérons les deux segments $[OC]$ et $[CA]$.

Si $[OC] < [CA]$, $2[OC] < [OA]$, et on peut prendre B en C .

Si $[OC] > [CA]$, on peut construire à partir de O , sur $O\Delta$, le point B tel que

$$[OB] = [CA] \implies 2[OB] < [OA],$$

le point ainsi construit répond à la question.

En d'autres termes, un segment U étant donné, on peut trouver un segment V_1 tel que $2 V_1 < U$; on peut ensuite trouver V_2 tel que $2 V_2 < V_1$, ...

$$V_n \text{ tel que } 2 V_n \leq V_{n-1}. \quad \text{En résumé} \quad 2^n V_n < U.$$

Il en résulte qu'on peut trouver un segment V_n plus petit qu'un segment E donné à l'avance, si petit soit-il; en effet, d'après l'axiome d'Archimède, on peut trouver un entier p tel que $U < pE$; en choisissant n tel que $p < 2^n$, *a fortiori*

$$U < 2^n E,$$

d'où il résulte que $V_n < E$; *a fortiori* tous les segments $V_{n'}$, avec $n' > n$, sont plus petits que le segment E . On peut dire que la suite des segments V_n tend vers le segment nul quand n tend vers l'infini.

2° Milieu du segment $[OA]$. — Soit B tel que $2[OB] < [OA]$; construisons entre O et A le point B' tel que $[AB'] = [OB]$; les points B et B' sont dits isotomiques par rapport aux points O et A , ou par rapport au segment $[OA]$. Pour tout point H du segment $[BB']$, la différence W des segments $[OH]$ et $[AH]$ est inférieure ou égale à $[BB']$.

Chercher si $[OA]$ admet un milieu M , c'est-à-dire chercher s'il existe M tel que $[OM] = [MA]$, c'est chercher s'il existe deux points isotomiques confondus.

Ayant choisi un segment V_1 tel que $2 V_1 \leq [OA]$, on peut trouver deux points isotomiques P_1 et P'_1 tels que $[P_1 P'_1] < 2 V_1$; en effet on peut construire entre O et A les points B et B' tels que $[OB] = [AB'] = V_1$; si $[BB'] \geq 2 V_1$, on construit entre B et B' les points C et C' tels que $[BC] = [B'C'] = V_1$, etc... on s'arrête quand on trouve deux points isotomiques limitant un segment plus petit que $2 V_1$.

Choisissons alors V_2 tel que

$$2 V_2 \leq \inf ([P_1 P'_1], V_1)$$

on peut de même trouver P_2 et P'_2 , isotomiques par rapport à P_1 et P'_1 , donc par rapport à O et A , tels que $[P_2 P'_2] < 2 V_2$ (fig. 5).

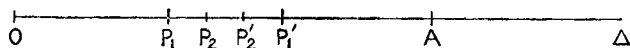


FIG. 5.

$$2 V_1 \leq [OA] \quad \text{et} \quad 2 V_2 \leq V_1 \implies 2^2 V_2 \leq [OA].$$

On forme ainsi une suite de segments emboîtés

$$[P_1 P'_1], [P_2 P'_2], \dots, [P_n P'_n], \dots$$

tels que $[P_n P'_n] < 2 V_n$, avec $2^n V_n \leq [OA]$; d'après le 2°, $[P_n P'_n]$ peut être rendu plus petit que tout segment donné, et, par application de l'axiome de Cantor, il existe un point M appartenant à tous les segments $[P_n P'_n]$.

La différence W des segments $[OM]$ et $[MA]$ est donc plus petite que le segment $[P_n P'_n]$, quel que soit n ; cette différence est nécessairement nulle, et M est le milieu du segment $[OA]$.

On dit aussi que $[OM]$ est la moitié du segment $U = [OA]$; on note

$$[OM] = \frac{U}{2}.$$

En d'autres termes, $\frac{U}{2}$ désigne le segment tel que $\frac{U}{2} + \frac{U}{2} = U$.

En d'autres termes encore, on peut dire que le segment $[OM]$ a pour mesure $\frac{1}{2}$ avec l'unité U , ou que l'abscisse de M est $\frac{1}{2}$ sur $O\Delta$.

3° Segment ayant une mesure donnée. — Nous venons de trouver le segment de longueur $\frac{1}{2}$; la moitié de ce segment a pour longueur $\frac{1}{4}$, etc... plus généralement on sait trouver par récurrence le segment de longueur $\frac{1}{2^n}$ segment noté $\frac{U}{2^n}$; on sait aussi déterminer sur la demi-droite $O\Delta$ tous les points P d'abscisse $\frac{p}{2^n}$, quels que soient les entiers n et p .

Plus généralement, x étant un réel positif quelconque, on peut lui associer les suites adjacentes formées par ses valeurs approchées à $\frac{1}{2^n}$,

soit
$$\frac{a_n}{2^n} \leq x < \frac{a_n + 1}{2^n}.$$

Considérons alors les points H_n et K_n définis par

$$[OH_n] = \frac{U}{2^n} \times a_n, \quad [OK_n] = \frac{U}{2^n} \times (a_n + 1).$$

Les segments $[H_n K_n]$ sont emboîtés et comme $[H_n K_n] = \frac{U}{2^n}$ peut-être rendu aussi petit qu'on veut, il existe un point M et un seul appartenant à tous les segments $[H_n K_n]$; le segment OM de $O\Delta$ est par définition celui qui a pour mesure x avec l'unité U ; on écrira

$$[OM] = U \times x.$$

En particulier considérons le point Q défini par $[OQ] = U \times \frac{1}{q}$, q étant un entier; Q est le point commun aux segments emboîtés $[H_n K_n]$, définis précédemment :

$$\frac{a_n}{2^n} \leq \frac{1}{q} < \frac{a_n + 1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad [OH_n] \leq [OQ] < [OK_n]$$

$$[OH'_n] = q[OH_n] \leq q[OQ] < q[OK_n] = [OK'_n].$$

Le point Q' défini par $[OQ'] = q[OQ]$ est le point commun aux segments emboîtés $[H'_n K'_n]$.

$$\text{Or} \quad [OH'_n] = \frac{U}{2^n} \times (a_n q) \quad \text{et} \quad [OK'_n] = \frac{U}{2^n} \times (a_n + 1)q.$$

$$\text{Comme} \quad \frac{a_n}{2^n} \times q \leq 1 < \frac{a_n + 1}{2^n} \times q,$$

A est entre H'_n et K'_n ; A coïncide avec Q' et

$$[OA] = q[OQ],$$

c'est-à-dire que $[OQ]$ est la q^{e} partie de $[OA]$. On sait donc partager un segment en q parties égales.

EXERCICES

1. — Si la suite $\{u_n\}$ admet la limite L , il en est de même de la suite dont le terme général v_n est la moyenne arithmétique des nombres $u_1, u_2, \dots, u_n$.

(On pourra remarquer qu'il est permis d'écrire, quel que soit $p < n$,

$$|v_n| < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |u_k| + \sup_{k > p} |u_k|;$$

on en déduira le résultat, dans le cas particulier $L = 0$).

2* — φ étant une fonction définie sur $[0, +\infty[$, continue, positive, croissante, on associe à la suite convergente $\{u_n\}$, dont la limite est L , la suite dont le terme général est

$$v_n = \frac{\varphi(1)u_1 + \varphi(2)u_2 + \dots + \varphi(n)u_n}{\int_0^n \varphi(t) dt}$$

Étudier d'abord les cas particuliers $\varphi(t) = t$, $\varphi(t) = t^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{N}$). Peut-on affirmer que, dans le cas général, $\{v_n\}$ admet la limite L ?

3* — Montrer que si les suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ admettent les limites respectives L et L' , la suite dont le terme général est

$$\frac{1}{n+1} (u_0 v_n + \dots + u_i v_{n-i} + \dots + u_n v_0)$$

admet la limite LL' .

4. — Montrer que la suite dont le terme général est

$$u_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$$

admet une limite L . Montrer que le nombre L est irrationnel.

5. — Étudier la suite $\{u_n\}$ dont le terme général est

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2 + 1} + \dots + \frac{n}{n^2 + 2n + 1} \\ {}^*u_n &= \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} \\ {}^*u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \end{aligned} \right| \begin{aligned} u_n &= \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots + \sqrt{n}}}}} \\ {}^*u_n &= \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ {}^*u_n &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (\text{Arc sin } x)^n dx \end{aligned}$$

6. — Étudier la suite $\{u_n\}$ déterminée par la donnée de son premier terme u_1 (qui, sauf avis contraire, est quelconque) et par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4}{5+u_n}; & u_{n+1} &= \frac{u_n}{3-2u_n}; & u_{n+1} &= 4 \frac{u_n-1}{u_n}; & u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n^2+1) \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}(-u_n^2+3); & u_{n+1} &= \frac{2}{u_n^2+1}; & u_{n+1} &= \sqrt{8+\frac{u_n^2}{2}}; & u_{n+1} &= \sqrt{4+3u_n} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n^2+3}{2u_n+2} (u_1 > 0); & *u_{n+1} &= \sqrt[p]{a^q \sqrt[q]{au_n}} (u_1 = a > 0) \\ (n+1)^2 u_{n+1} - n^2 u_n &= 2n+1; & (n+1)^2 u_{n+1} - n^2 u_n &= n+1 \\ *u_{n+1} &= e^{1-u_n}; & *u_{n+1} &= e \operatorname{Log} u_n; & (n+2)u_{n+1} &= nu_n - n + 1 \\ u_{n+1} &= \sin 2u_n; & u_{n+1} &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos u_n; & *u_{n+1} &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u_n. \end{aligned}$$

7. — Étudier la suite $\{u_n\}$ déterminée par la donnée de ses deux premiers termes u_1, u_2 , et par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n; & u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n; & *u_{n+2} &= \sqrt{u_{n+1}u_n} \\ u_{n+2} &= \frac{1}{5}(2u_{n+1} + 3u_n); & u_{n+2} &= \frac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{u_{n+1} + u_n} (u_1 > 0, u_2 > 0) \\ u_{n+2} &= \sqrt{5 + \sqrt{13 + u_n}} (u_1 = \sqrt{5}, u_2 = \sqrt{5 + \sqrt{13}}). \end{aligned}$$

8. — Étudier les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ déterminées par la donnée de a_1, b_1 , et des relations de récurrence :

$$\begin{aligned} (1) \quad a_{n+1} &= \frac{1}{3}(2a_n + b_n), & b_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \\ (2) \quad a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \quad (a_1 > 0, b_1 > 0) \\ (3) \quad a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & \frac{2}{b_{n+1}} &= \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \quad (a_1 > 0, b_1 > 0) \\ (4) \quad a_{n+1} &= \frac{a_n^2}{a_n + b_n}, & b_{n+1} &= \frac{b_n^2}{a_n + b_n} \\ (5) \quad a_{n+1} &= a_n + \frac{b_n - a_n}{2n+2}, & b_{n+1} &= b_n - \frac{b_n - a_n}{2n+2} \quad (a_1 < b_1) \\ (6) \quad a_{n+1} &= 2a_n b_n, & b_{n+1} &= \frac{a_n^3}{b_n} \quad (a_1 > 0, b_1 > 0) \\ (7) \quad a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{aligned}$$

9. — On considère les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ déterminées par la donnée de leurs premiers termes $a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0$ et par les relations de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad \frac{3}{c_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}.$$

a) Démontrer que, pour $n > 1$, $a_n > b_n > c_n$.

b) Démontrer que les suites $\{a_n\}$ et $\{c_n\}$ sont monotones et ont une limite commune λ . Quelle est cette limite si $a_1 c_1 = b_1^2$?

*c) Démontrer que si $a_1 c_1 \neq b_1^2$, la suite $\{b_n\}$ est aussi monotone.

10. — Étudier les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ déterminées par la donnée de a_1 , b_1 , c_1 et par les relations de récurrence

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n), \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

11. — Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, positive, croissante et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $k < 1$. Démontrer que la suite déterminée par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente.

12*. — A_n désigne le déterminant d'ordre n dont le terme général $a_{i,j}$ est tel que

$$a_{i,i} = k, \quad \forall i; \quad a_{i,i+1} = 1, \quad \forall i; \quad a_{i+1,i} = 1, \quad \forall i;$$

les autres termes étant égaux à 0.

Étudier la suite $\{A_n\}$.

13. — Reprendre l'étude faite au n° 32, 3° en remplaçant la suite $\{v_n\}$ par la suite dont le terme général est

$$w_n = u_n + \frac{1}{n.n!},$$

ce qui est plus avantageux au point de vue du calcul numérique.

14*. — Les notations sont celles du n° 24 :

a) Si la suite $\{u_n\}$ est bornée et si la suite $\{v_n\}$ est convergente, démontrer que :

$$\overline{\lim} (u_n + v_n) = \overline{\lim} u_n + \lim v_n.$$

Peut-on énoncer un résultat analogue en supposant seulement que les deux suites sont bornées?

b) Les suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ étant à termes positifs, on suppose la première bornée, la seconde convergente; démontrer que

$$\lim (u_n v_n) = (\overline{\lim} u_n) (\lim v_n).$$

CHAPITRE III

FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

A) LIMITES

I. GÉNÉRALITÉS

39. Notion de fonction réelle d'une variable réelle. — 1^o Rappel.

DÉFINITION. — Tout mode de correspondance associant à chaque élément x d'un ensemble $\mathcal{C}$ un élément déterminé y d'un ensemble $\mathcal{F}$ est appelé **application** de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{F}$ ou **fonction définie** sur $\mathcal{C}$ et à valeurs dans $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{C}$ est une partie d'un ensemble $\mathcal{E}$, on dit que f est une fonction définie dans $\mathcal{E}$, à valeurs dans $\mathcal{F}$, dont le *champ* (ou *domaine*) de définition est $\mathcal{C}$.

NOTATION. — On désigne la fonction par une lettre, en général f , et on écrit

$$x \mapsto f(x) \quad \text{ou} \quad x \in \mathcal{C} \xrightarrow{f} y \in \mathcal{F}.$$

Il y a lieu de ne pas confondre l'être mathématique fonction, désigné par f , qui est une transformation, et l'être mathématique désigné soit par $f(x)$ soit par y qui est l'élément de $\mathcal{F}$ associé par f à un élément donné x de $\mathcal{C}$ (image de x par f). Pratiquement on pourra dire par abus de langage (quand aucune ambiguïté n'est à craindre), « la fonction $f(x)$ » ou « la fonction $y = f(x)$ » pour « la fonction $x \mapsto f(x)$ ».

REMARQUE I. — Lorsque tout $y \in \mathcal{F}$ est l'image d'au moins un élément de $\mathcal{C}$ nous parlerons d'application de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{F}$, au lieu d'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{F}$. $\mathbb{R}$ étant l'ensemble des réels, $x \mapsto x^2$ est ainsi une application de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est qu'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE II. — L'ensemble $\mathcal{F}_1$ des images par f des divers points de $\mathcal{C}$, qui est un sous-ensemble de $\mathcal{F}$, peut être désigné par $f(\mathcal{C})$.

2^o Fonctions réelles d'une variable réelle. — On appelle *fonction numérique* f sur un ensemble $\mathcal{C}$ toute application de $\mathcal{C}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Si $\mathcal{C}$ est lui-même une partie de $\mathbb{R}$, on dit que f est une *fonction numérique d'une variable réelle*, ou encore une *fonction réelle d'une variable réelle*.

a) Les fonctions *rationnelles* comprennent les fonctions « polynômes » définies sur $] -\infty, +\infty[$ et les fonctions « fractions rationnelles » définies en tout point où le dénominateur ne prend pas la valeur 0. La fonction « polynôme du premier degré » est dite *fonction linéaire* si elle est homogène ($y = ax$) et *fonction affine* dans le cas général ($y = ax + b$) (cf III, n^o 60).

b) Plus généralement on appelle fonction *algébrique* toute fonction $y = f(x)$ que l'on peut regarder comme provenant de la résolution par rapport à y d'une équation $g(x, y) = 0$, où g est un polynôme à deux indéterminées.

Exemple : $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ qui provient de la résolution de $(4-x^2)y^2 - 1 = 0$.

Cette fonction est définie sur $] -2, +2[$.

c) Les fonctions qui ne sont pas algébriques — par exemple les fonctions circulaires — sont dites *transcendantes*.

3° **Graphes d'une fonction réelle d'une variable réelle.** — Dans un plan rapporté à deux axes $x'Ox$, $y'Oy$, en général rectangulaires, de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, nous associons à tout élément x du champ de définition $\mathcal{C}$ de la fonction f le point M d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$. On obtient ainsi un ensemble (Γ) de points qui est appelé *graphe* de la fonction f sur $\mathcal{C}$.

Le graphe d'une fonction comme $y = x!$ définie sur l'ensemble N des entiers naturels est formée de points isolés.

Pour des fonctions définies sur des segments on peut dans les cas usuels — certaines fonctions ne sont pas représentables — obtenir un dessin grossier de (Γ) par un trait continu. Cette représentation est un moyen commode de grouper en une seule image les propriétés de la fonction, mais il est bien entendu qu'elle ne saurait être en aucun cas un procédé de démonstration.

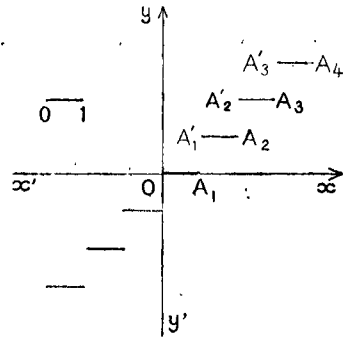


Fig. 6.

EXEMPLE. — Appelons $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x . Pour $x \in [0, 1[$ on a $E(x) = 0$; Pour $x \in [1, 2[$ on a $E(x) = 1$, etc... Le graphe de cette fonction sur $[0, 1[$ est le segment OA_1 de l'axe Ox , le point A_1 excepté. Le graphe de la fonction sur $[1, 2[$ est le segment A'_1A_2 , le point A_2 excepté, etc... (fig. 6).

4° **Parité.** — DÉFINITION. — Une fonction f , définie sur un champ $\mathcal{C}$ dont les points sont deux à deux opposés, est dite :

$$\begin{array}{ll} \text{paire} & \text{si } f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}, \\ \text{impaire} & \text{si } f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}. \end{array}$$

EXEMPLES. — Les fonctions x^2 et $\cos x$ sont paires, les fonctions x^3 et $\operatorname{tg} x$ impaires.

REMARQUE. — A tout point $M_0(x_0, y_0)$ du graphe (Γ) on peut alors associer un autre point de (Γ) , qui est suivant le cas $M'_0(-x_0, y_0)$ ou $M''_0(-x_0, -y_0)$. Le graphe d'une fonction paire admet donc $y'y$ pour diamètre de la direction $x'x$ (lien des milieux des cordes parallèles à $x'x$). Le graphe d'une fonction impaire admet l'origine pour centre de symétrie.

5° Fonction périodique. — DÉFINITION. — On dit que la fonction f est périodique et a pour période le nombre P si

$$f(x + P) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Si P est une période pour f , tout nombre de la forme kP , où k est un entier relatif, est aussi une période pour f . Dans les cas usuels l'une des périodes positives est plus petite que toutes les autres; c'est alors ce nombre que l'on appelle plus précisément période de la fonction f .

REMARQUE. — Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 \text{ si } x \text{ est rationnel; } f(x) = 0 \text{ si } x \text{ est irrationnel.}$$

On vérifie qu'elle admet pour période tout nombre rationnel r . En effet $x + r$ est rationnel (resp. irrationnel) si x est rationnel (resp. irrationnel). Il n'existe pas dans ce cas de période positive plus petite que toutes les autres.

Pour construire le graphe (Γ) d'une fonction périodique, il suffit de construire l'arc (A) relatif à $[\alpha, \alpha + P[$, α étant un nombre quelconque; en effet les arcs de (Γ) relatifs à $[\alpha + P, \alpha + 2P[$, $[\alpha + 2P, \alpha + 3P[$, etc., se déduisent de l'arc (A) par 1, 2, etc., translations de mesure algébrique P parallèles à $x'x$; ceux qui sont relatifs à $[\alpha - P, \alpha[$, $[\alpha - 2P, \alpha - P[$, etc., se déduisent de (A) par 1, 2, etc., translations de mesure algébrique $-P$ parallèles à $x'x$.

6° Fonction bornée. — Soit f une fonction définie sur le champ $\mathbb{C}$; considérons l'ensemble $\mathcal{F}_1 = f(\mathbb{C})$ des images $f(x)$ par f des divers points x de $\mathbb{C}$.

Si cet ensemble $\mathcal{F}_1$, admet un majorant (resp. un minorant), on dit que la fonction f est majorée (resp. minorée) sur $\mathbb{C}$.

Si l'ensemble $\mathcal{F}_1$ admet un majorant et un minorant, on dit que la fonction f est bornée sur $\mathbb{C}$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{F}_1$ possède (n° 1) une borne supérieure M et une borne inférieure m (qui n'appartiennent pas forcément à $\mathcal{F}_1$). La différence $M - m$ est dite *oscillation* de la fonction f sur $\mathbb{C}$.

REMARQUE I. — Une fonction définie sur un segment n'est pas forcément bornée. C'est par exemple le cas pour la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \in]0,1].$$

REMARQUE II. — Une fonction définie sur un segment et bornée n'atteint pas forcément ses bornes. C'est par exemple le cas pour la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x - E(x)$, où $E(x)$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x . En effet on a :

$$f(1) = 0, \quad f(x) = x \quad \text{si} \quad x \in [0,1[$$

$m = 0$ est atteint, $M = 1$ ne l'est pas.

40. Opérations sur les fonctions réelles d'une variable réelle. —

1° DÉFINITION I. f_1 et f_2 étant deux applications dans $\mathbb{R}$ du même champ de réels $\mathbb{C}$, on dit que f_1 et f_2 sont égales si

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

On écrit $f_1 = f_2$.

2° DÉFINITION II. f_1 et f_2 étant deux applications dans $\mathbb{R}$ du même champ de réels $\mathcal{C}$, on appelle somme et produit de f_1 et f_2 les applications $s = f_1 + f_2$ et $p = f_1 f_2$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$s(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \text{et} \quad p(x) = f_1(x) \times f_2(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

La commutativité et l'associativité de la somme et du produit des fonctions définies sur un même champ résultent de celles des opérations de même nom sur les réels. Il en est de même de la distributivité du produit par rapport à la somme.

On peut également définir la fonction différence et la fonction quotient (cette dernière en dehors des points de $\mathcal{C}$ où la fonction dénominateur prend la valeur 0).

3° DÉFINITION III. — On appelle produit par un nombre réel α d'une fonction réelle f de la variable réelle la fonction $g = \alpha f$ définie sur le même champ que f par

$$g(x) = \alpha \times f(x).$$

REMARQUE. — Dans l'ensemble (Φ) des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un même champ $\mathcal{C}$ nous disposons donc maintenant

a) d'une loi interne dite *addition* qui est commutative, associative, possède un élément neutre (la fonction qui prend la valeur 0 en tout point de $\mathcal{C}$) et est symétrisable (l'opposé de f étant la fonction qui prend la valeur $-f(x)$ en tout $x \in \mathcal{C}$), donc d'une loi de groupe additif.

b) d'une loi interne dite *multiplication* qui est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition, qui possède un élément neutre (la fonction qui prend la valeur 1 en tout point de $\mathcal{C}$), mais qui n'est pas symétrisable puisque la relation $f(x) g(x) = 1$ ne peut définir g à partir de f que si f ne prend pas la valeur 0 sur $\mathcal{C}$, condition qui n'est pas réalisée dans l'ensemble (Φ) .

c) d'une loi externe sur $\mathbb{R}$, dite *multiplication par un réel*. En désignant par f et g des éléments de (Φ) et par α et β des nombres réels, la double distributivité et l'associativité

$$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g, \quad (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f, \quad \alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f,$$

résultent de la distributivité du produit par rapport à la somme et de l'associativité du produit dans $\mathbb{R}$. Cette loi externe admet en outre l'élément neutre $1 \in \mathbb{R}$. En effet $1 \times f = f$ résulte de la définition.

Comme par ailleurs : $(\alpha f) g = f(\alpha g) = \alpha(fg)$ on peut dire que l'ensemble (Φ) vient d'être muni d'une structure d'*algèbre commutative et unitaire* sur le corps $\mathbb{R}$ ((I, 150).

II. NOTION DE LIMITE

41. Limite finie d'une fonction $f(x)$ quand x tend vers a . —

1° DÉFINITION. f étant une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de a (sauf peut-être au point a), on dit que $f(x)$ admet la limite l quand x tend vers a si, étant donné le nombre positif arbitraire ε , on peut prouver l'existence d'un nombre positif α tel que la condition

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{c'est-à-dire} \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

est vérifiée en tout point x qui d'une part appartient à $\mathcal{C}$, d'autre part satisfait

$$0 < |x - a| < \alpha \quad \text{c'est-à-dire} \quad a - \alpha < x < a + \alpha \quad \text{et} \quad x \neq a.$$

Définition condensée :

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow l \text{ quand } x \rightarrow a \\ \updownarrow \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{C} \\ 0 < |x - a| < \alpha \end{array} \right\} \text{ on a } |f(x) - l| < \varepsilon \end{array}}$$

REMARQUE. — La définition est indépendante de ce qui se passe au point a , soit que $f(a)$ n'existe pas, soit que $f(a)$ existe, mais soit distinct de l .

2° **Conséquences de la définition.** — Nous allons reprendre, sous une forme légèrement différente, des raisonnements faits à propos des suites (n° 21).

a) *Unicité.* — La fonction $f(x)$ étant définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de a , sauf peut être au point a , supposons qu'elle admette deux limites distinctes l et l' , par exemple $l < l'$.

Posons $l' - l = 2h$, et choisissons $\varepsilon = h$. Par hypothèse

$$\begin{aligned} \exists \alpha_1 > 0 \text{ tel que } x \in \mathcal{C} \text{ et } 0 < |x - a| < \alpha_1 &\implies l - h < f(x) < l + h. \\ \exists \alpha_2 > 0 \text{ tel que } x \in \mathcal{C} \text{ et } 0 < |x - a| < \alpha_2 &\implies l' - h < f(x) < l' + h. \end{aligned}$$

Il en résulte, en posant $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x \in \mathcal{C} \text{ et } 0 < |x - a| < \alpha \implies f(x) < l + h \text{ et } f(x) > l' - h,$$

ce qui est en contradiction avec $l + h = l' - h$.

REMARQUE. — Lorsque $f(x)$ admet une limite l pour x tendant vers a , nous avons pu noter cette limite « $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ » sans faire mention du voisinage $\mathcal{C}$ de a sur lequel la fonction était définie, la limite étant unique, et ne dépendant pas du choix du voisinage de définition.

*On peut étendre la définition de la limite au cas où f est définie non pas sur un voisinage de a , mais seulement sur un champ $\mathcal{C}$ admettant a pour point d'accumulation. L'existence et la valeur l de la limite éventuelle dépendent naturellement du champ $\mathcal{C}$, et l'on écrira alors

$$l = \lim_{x \rightarrow a, x \in \mathcal{C}} f(x) \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow l \text{ quand } x \rightarrow a \text{ sur } \mathcal{C}.$$

b) La définition n'implique pas l'existence *a priori* d'une limite. On peut d'ailleurs être amené à démontrer qu'une fonction $f(x)$, définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de a , n'admet pas le nombre donné L pour limite quand x tend vers a . Il suffit de prouver qu'il existe un nombre *particulier* $\varepsilon_0 > 0$ tel que, dans *tout* intervalle $]a - \alpha, a + \alpha[$, il existe au moins un point $x' \in \mathcal{C}$, distinct de a , tel que $|f(x') - L| > \varepsilon_0$, ce qui s'écrit

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que } \forall \alpha > 0, \exists \left\{ \begin{array}{l} x' \in \mathcal{C} \\ 0 < |x' - a| < \alpha \end{array} \right\} \text{ tel que } |f(x') - L| > \varepsilon_0.$$

En comparant cette formulation de la « non-limite » à celle de la « limite » (cf 1°), le lecteur constatera que l'on passe de l'une à l'autre en transposant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

c) *Interprétation géométrique.* — Si l'on considère le graphe de la fonction f , l'existence de la limite l signifie que tous les points M représentatifs des couples $[x, y = f(x)]$ sont, pour $x \in]a - \alpha, a + \alpha[, x \neq a$, dans la bande de plan limitée par les parallèles à l'axe Ox et dont les ordonnées sont $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$ (fig. 7); ces points M appartiennent au rectangle hachuré sur la figure.

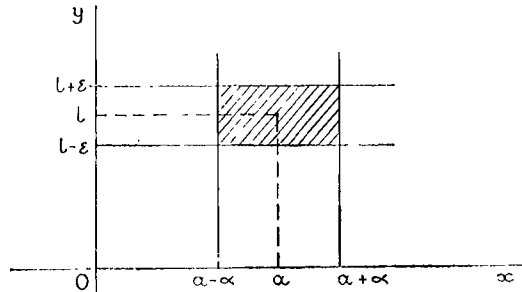


FIG. 7.

d) La démonstration du fait que $f(x)$ a pour limite un nombre connu l quand x tend vers a , pose un problème d'existence comportant une donnée ε (nombre positif) et une inconnue α (nombre positif).

Il est essentiel de remarquer que, si un nombre α' est une solution de ce problème, tout nombre α'' compris entre 0 et α' est lui aussi une solution. Il ne s'agit pas de déterminer tous les nombres α possibles, mais seulement de prouver l'existence de l'un d'entre eux.

EXEMPLE. — Montrons que $f(x) = x^2 + 2x$ a pour limite 3 quand x tend vers 1

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \iff |x - 1| |x + 3| < \varepsilon.$$

Bornons-nous aux nombres x tels que $|x - 1| < 1 \iff 0 < x < 2$.

Pour l'un quelconque d'entre eux on a

$$3 < x + 3 < 5 \implies |x + 3| < 5 \implies |x - 1| |x + 3| < 5|x - 1|.$$

On peut donc affirmer que l'on a $|x - 1| |x + 3| < \varepsilon$ pour tout nombre x qui vérifie à la fois $|x - 1| < 1$ et $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$. Le nombre $\alpha = \inf \left(1, \frac{\varepsilon}{5} \right)$ répond à la question posée.

3° **Théorèmes généraux sur les limites.** — Dans tous ces théorèmes, nous appellerons $\mathcal{C}$ le voisinage du point a sur lequel les fonctions envisagées sont supposées définies.

THÉORÈME 1. — Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et si $A < l < B$ il existe un intervalle $\mathcal{J}$ contenant le point a tel que

$$x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{J}, x \neq a \implies A < f(x) < B.$$

Choisissons en effet $\varepsilon = \inf(l - A, B - l)$. A ce nombre ε est associé un nombre positif α tel que

$$x \in \mathcal{C} \text{ et } 0 < |x - a| < \alpha \implies |f(x) - l| < \varepsilon \text{ et a fortiori } A < f(x) < B.$$

Il suffit de prendre $\mathcal{J} =]a - \alpha, a + \alpha[$.

CAS PARTICULIER. — Si la limite l est positive (resp. négative), il existe un intervalle $\mathfrak{J}$ contenant a tel que, sur $\mathcal{C} \cap \mathfrak{J}$, sauf peut-être au point $x = a$, $f(x)$ est positif (resp. négatif).

Il suffit, dans la démonstration précédente, de faire $A = 0$ (resp. $B = 0$).

THÉORÈME II. — Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et si $f(x) \in]\alpha, \beta[$, on a $l \in [\alpha, \beta]$.

En effet $l < \alpha$ entraînerait (théorème I) l'existence de $\mathfrak{J}$ tel que, sur $\mathcal{C} \cap \mathfrak{J}$, on aurait $f(x) < \alpha$, en contradiction avec $f(x) \in]\alpha, \beta[$. De même $l > \beta$ conduirait à une contradiction.

Cas particulier. — Si une fonction positive (resp. négative) admet une limite, celle-ci est positive ou égale à 0 (resp. négative ou égale à 0).

THÉORÈME III. — Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$; $l > l'$

il existe un intervalle $\mathfrak{J}$ contenant le point a tel que

$$x \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{J}, x \neq a \implies f(x) > g(x).$$

λ désignant un nombre quelconque compris entre l et l' , d'après le théorème I appliqué successivement à $f(x)$ avec $A = \lambda$ et à $g(x)$ avec $B = \lambda$

$$\begin{aligned} \exists \mathfrak{J}_1 =]a - \alpha_1, a + \alpha_1[\quad \text{tel que,} \quad \text{sur } \mathcal{C} \cap \mathfrak{J}_1, x \neq a, f(x) > \lambda, \\ \exists \mathfrak{J}_2 =]a - \alpha_2, a + \alpha_2[\quad \text{tel que,} \quad \text{sur } \mathcal{C} \cap \mathfrak{J}_2, x \neq a, g(x) < \lambda. \end{aligned}$$

On prendra $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2 =]a - \alpha, a + \alpha[$, avec $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$.

THÉORÈME IV. — f et g étant des fonctions définies sur un même champ $\mathcal{C}$ où $f(x) > g(x)$, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$, on a $l \geq l'$.

En effet $l' > l$ conduirait à une contradiction, d'après le théorème III.

THÉORÈME V. — f, g, h , étant des fonctions définies sur un même champ $\mathcal{C}$ où $g(x) < f(x) < h(x)$, si $g(x)$ et $h(x)$ admettent la même limite l quand x tend vers a , on peut affirmer que $f(x)$ admet la limite l quand x tend vers a .

Par hypothèse à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad 0 < |x - a| < \alpha_1 &\implies l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \\ x \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad 0 < |x - a| < \alpha_2 &\implies l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon. \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$. A tout $\varepsilon > 0$ nous avons su associer $\alpha > 0$ tel que

$$x \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad 0 < |x - a| < \alpha \implies l - \varepsilon < g(x) < h(x) < l + \varepsilon,$$

ce qui entraîne *a fortiori* $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

THÉORÈME VI. — $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$.

La démonstration donnée au n° 22, théorème VI, à propos des suites, s'applique ici.

4° Limite à droite, à gauche. — DÉFINITION. f étant définie sur un champ $\mathcal{C}'$ contenant un intervalle ouvert dont l'extrémité inférieure est a , on dit que $f(x)$ admet au point a la limite à droite l' si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{C}' \\ 0 < x - a < \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon.$$

NOTATION : $l' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ ou $l' = f(a+0)$; cela, rappelons-le, n'implique pas l'existence de $f(a)$.

Nous définirons de même la limite à gauche, quand f est définie sur un champ $\mathcal{C}''$ contenant un intervalle ouvert dont l'extrémité supérieure est a :

$$l'' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad \text{ou} \quad l'' = f(a-0).$$

REMARQUE I. — Si f est définie sur un voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ existe, on constate en se reportant aux définitions que les limites à droite et à gauche existent et sont égales à l .

Il en résulte que si $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = l'$ et $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = l''$ existent et sont distinctes, $f(x)$ n'admet pas de limite quand $x \rightarrow a$.

REMARQUE II. — Si $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = l$ existent et sont égales, $f(x)$ admet la limite l quand $x \rightarrow a$. En effet :

$$\forall \varepsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha' > 0 \text{ tel que } x \in \mathcal{C}' \text{ et } 0 < x - a < \alpha' \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \exists \alpha'' > 0 \text{ tel que } x \in \mathcal{C}'' \text{ et } -\alpha'' < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

En posant $\alpha = \inf(\alpha', \alpha'')$ on constate qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x \in \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \text{ et } 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

EXEMPLE (1). — Le radian étant l'unité d'angle ou l'unité d'arc, le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est définie sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Elle est paire Il suffit donc de démontrer l'existence d'une limite à droite.

Soit A l'origine des arcs et soit M l'extrémité d'un arc dont la valeur algébrique x est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Soit M' le symétrique de M par rapport

au diamètre qui passe par A, les tangentes en M et en M' se coupent en un point P (fig. 8).

Rappelons que pour définir la longueur de l'arc M'AM du cercle on considère des lignes brisées convexes inscrites dans l'arc et des lignes brisées

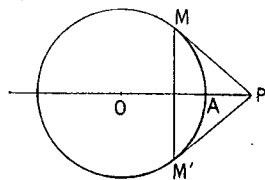


FIG. 8.

(1) Cet exposé suppose l'emploi du cercle trigonométrique pour définir $\sin x$; un exposé de pure analyse figure à la fin de l'ouvrage (n° 276 et la suite).

convexes circonscrites, M et M' étant les extrémités de toutes ces lignes, et on démontre que si tous les côtés des lignes tendent vers zéro, les longueurs des lignes tendent vers une même limite; cette limite est ce qu'on appelle la longueur de l'arc. Les raisonnements faits montrent que cette limite est plus grande que la longueur de toute ligne convexe inscrite et inférieure à celle de toute ligne circonscrite. En particulier elle est comprise entre la corde MM' et la somme $MP + M'P$, en d'autres termes x satisfait à la double inégalité

$$2 \sin x < 2x < 2 \operatorname{tg} x$$

d'où l'on déduit, puisque $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Si ε est un nombre positif donné, il est possible de déterminer un nombre positif α , inférieur à $\frac{\pi}{2}$, tel que la double inégalité

$$0 < x < \alpha \quad \text{entraîne} \quad \cos x > 1 - \varepsilon$$

et par suite $1 - \varepsilon < \frac{\sin x}{x} < 1$,
ce qui démontre la proposition.

REMARQUE. — Le raisonnement précédent montre que $|\sin x| < |x|$ lorsque x est différent de zéro et inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. L'inégalité se conserve pour $|x| \geq \frac{\pi}{2}$.

5° Définition d'une limite par des suites convergentes. —

THÉORÈME DIRECT. — Si la fonction $f(x)$ admet la limite l quand x tend vers a sur $\mathcal{C}$ et si $\{x_n\}$ est une suite extraite de $\mathcal{C}$ ($x_n \in \mathcal{C}$) qui converge sans l'atteindre vers a , la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers l .

Par hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in \mathcal{C} \text{ et } 0 < |x - a| < \alpha \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

A ce nombre $\alpha > 0$ correspond un entier positif N tel que :

$$n > N \implies 0 < |x_n - a| < \alpha.$$

$$\text{Ainsi } \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tel que } n > N \implies |f(x_n) - l| < \varepsilon.$$

***THÉORÈME RÉCIPROQUE.** — Si, pour toute suite $\{x_n\}$ extraite de $\mathcal{C}$ qui converge vers a , la suite associée $\{f(x_n)\}$ converge vers l , la fonction $f(x)$ admet la limite l quand x tend vers a sur $\mathcal{C}$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $f(x)$ n'admet pas la limite l quand x tend vers a sur $\mathcal{C}$. C'est (2°, b) qu'il existe un nombre particulier $\varepsilon_0 > 0$ tel que dans chacun des intervalles

$$]a - 1, a + 1[, \quad]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[, \quad \dots, \quad]a - \frac{1}{2^n}, a + \frac{1}{2^n}[, \dots$$

on peut trouver au moins un point $x'_0, x'_1, \dots, x'_n, \dots$ distinct de a , appartenant à $\mathcal{C}$, qui vérifie $|f(x'_p) - l| > \varepsilon_0$; $p = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$. On met donc en évidence l'existence d'au moins une suite $\{x'_n\}$ qui converge vers a , alors que la suite associée $\{f(x'_n)\}$ ne converge pas vers l . Ce résultat est contraire à l'hypothèse.

42. Limite finie d'une fonction $f(x)$ quand x tend vers l'infini. —

1° DÉFINITION I. f étant une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de $+\infty$, on dit que $f(x)$ admet la limite l quand x tend vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow l \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{C} \\ x > B \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

DÉFINITION II. f étant une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de $-\infty$, on dit que $f(x)$ admet la limite l quand $x \rightarrow -\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow l \text{ quand } x \rightarrow -\infty$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{C} \\ x < -B \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

EXEMPLE. — $\forall \varepsilon > 0, |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon.$

On en déduit, en interprétant le signe de $\frac{1}{x}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = -0.$$

REMARQUE. — Si nous posons $\varphi(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)$ nous constatons que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \lim_{y \rightarrow +0} \varphi(y) = l.$$

En effet dire que l'inégalité $|f(x) - l| < \varepsilon$ est vérifiée pour $x > B$, équivaut à dire que l'inégalité $|\varphi(y) - l| < \varepsilon$ est vérifiée pour $0 < y < \frac{1}{B}$.

2° Conséquences. — L'étude faite à propos des suites (n° 26, 2°) se généralise sans difficulté.

En particulier l'unicité de la limite, lorsqu'elle existe, permet de ne pas faire mention du voisinage particulier de $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans lequel on suppose définie la fonction f .

* On peut étendre la définition de la limite au cas où f est définie, non pas sur un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), mais seulement sur un champ $\mathcal{C}$ qui n'est pas majoré (resp. qui n'est pas minoré). C'est ce qui se passe quand on définit la limite d'une suite convergente $u_n = f(n)$: $\mathcal{C}$ est alors l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. L'existence et la valeur l de la limite éventuelle dépendent, pour cette généralisation, du champ $\mathcal{C}$, et l'on écrira alors, par exemple,

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty, x \in \mathcal{C}} f(x) \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow l \text{ quand } x \rightarrow +\infty \text{ sur } \mathcal{C}.$$

43. Limites infinies. — DÉFINITION I. f étant une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de a (sauf peut-être au point a) on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers a et on écrit

$$\begin{aligned} f(x) \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow a & \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \\ \text{[resp. } f(x) \rightarrow -\infty \text{ quand } x \rightarrow a & \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty] \end{aligned}$$

$$\text{si } \forall A > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{C} \\ 0 < |x-a| < \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) > A \text{ (resp. } < -A \text{)}.$$

REMARQUE. — On peut encore être amené à préciser « quand x tend vers $a + 0$ » ou « quand x tend vers $a - 0$ ».

DÉFINITION II. f étant une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de $+\infty$, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ et on écrit

$$\begin{aligned} f(x) \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty & \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \text{[resp. } f(x) \rightarrow -\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty & \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty] \end{aligned}$$

$$\text{si } \forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{C} \\ x > B \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) > A \text{ (resp. } < -A \text{)}.$$

DÉFINITION III. f étant une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de $-\infty$, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers $-\infty$ et on écrit

$$\begin{aligned} f(x) \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow -\infty & \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \text{[resp. } f(x) \rightarrow -\infty \text{ quand } x \rightarrow -\infty & \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty] \end{aligned}$$

$$\text{si } \forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{C} \\ x < -B \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) > A \text{ (resp. } < -A \text{)}.$$

REMARQUE I. — Dans les trois cas, si $|f(x)| \rightarrow +\infty$ sans que $f(x)$ ait un signe fixe on dit que $f(x)$ tend vers l'infini (ou devient infini) et on écrit

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ ou } \lim f(x) = \infty.$$

REMARQUE II. — Soit f une fonction définie sur un champ $\mathcal{C}$; pour fixer les idées nous supposons que $\mathcal{C}$ est un voisinage de $+\infty$. Il est bien évident que ne peuvent être vérifiées simultanément les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} a) \quad f \text{ est majoré} & \iff \exists A \text{ tel que } f(x) < A, \quad \forall x \in \mathcal{C} \\ b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty & \iff \forall A, \exists B \text{ tel que } x > B \Rightarrow f(x) > A. \end{aligned}$$

Mais il ne faut pas croire que la négation de l'une équivaut à l'affirmation de l'autre. Considérons par exemple la fonction $f(x) = x^2 \sin x$, qui est définie sur $] -\infty, +\infty [$

$$f\left(\frac{\pi}{2} + k, 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} + k, 2\pi\right)^2 \text{ montre que } f(x) \text{ n'est majoré sur aucun voisinage de } +\infty$$

En associant $f(k\pi) = 0$ on constate que $f(x)$ ne tend pas vers l'infini quand x tend vers $+\infty$.

44. Synthèse des définitions relatives aux limites. — Il est possible de faire la synthèse des diverses définitions relatives aux limites (n^{os} 41 à 43) et de les ramener à un énoncé unique (étant entendu que dans toute application on se reportera à la définition qui correspond au cas particulier envisagé).

DÉFINITION. f étant une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de a , on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, si à tout voisinage $\mathcal{V}$ de l on sait faire correspondre un voisinage $\mathcal{V}'$ de a tel que

$$x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{V}', x \neq a \implies f(x) \in \mathcal{V}.$$

Dans cet énoncé les nombres a et l peuvent être remplacés par les symboles $+\infty$ et $-\infty$.

REMARQUE. — On peut dire que l'on a complété l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par l'adjonction de deux éléments désignés par $+\infty$ et $-\infty$. L'ensemble ainsi obtenu est appelé *droite achevée* et désigné par $\overline{\mathbb{R}}$.

III. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Nous allons considérer des fonctions $f(x)$, $g(x)$, ... qui sont définies sur le même champ $\mathcal{C}$ et qui admettent des limites l , m , ..., ou qui deviennent infinies « dans les mêmes conditions », ce qui signifiera indifféremment « quand $x \rightarrow a$ », « quand $x \rightarrow a + 0$ », « quand $x \rightarrow a - 0$ », « quand $x \rightarrow +\infty$ », ou « quand $x \rightarrow -\infty$ ».

Les raisonnements sont ceux qui ont été donnés lors de l'étude des suites; nous ne les reprendrons pas et nous nous bornerons à donner les énoncés. *Nous pourrions d'ailleurs nous ramener systématiquement à des suites grâce à l'étude du n^o 41, 5^o.

45. Opérations rationnelles sur les limites finies. — **THÉORÈME I.** λ étant une constante quelconque, si dans certaines conditions la fonction $f(x)$ admet la limite l , la fonction $\lambda f(x)$ admet la limite λl dans les conditions considérées.

THÉORÈME II. — Si, dans les mêmes conditions,

les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ admettent les limites respectives l et m ,
la somme $f(x) + g(x)$ admet dans ces conditions la limite $l + m$.

THÉORÈME III. — Si, dans les mêmes conditions,

la fonction $f(x)$ tend vers 0 et la fonction $g(x)$ est bornée,
le produit $f(x) \times g(x)$ admet dans ces conditions la limite 0.

C'est ainsi que $F(x) = x \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$, car $\left| \sin \frac{1}{x} \right| < 1$.

COROLLAIRE. — Si les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ admettent dans les mêmes conditions les limites respectives l et 0, le produit $f(x) \times g(x)$ admet dans ces conditions la limite 0.

THÉORÈME IV. — Si, dans les mêmes conditions,

les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ admettent les limites respectives l et m ,
le produit $f(x) \times g(x)$ admet dans ces conditions la limite lm .

THÉORÈME V. — Si, dans les mêmes conditions,

$f(x)$ tend vers 0 et si $|g(x)|$ est minoré par un nombre strictement positif.

le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet dans ces conditions la limite 0.

C'est ainsi que $F(x) = \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}$ tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$, car $2 + \sin \frac{1}{x} \geq 1$.

COROLLAIRE. — Si deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ admettent dans les mêmes conditions les limites respectives 0 et m , avec $m \neq 0$, le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet dans ces conditions la limite 0.

THÉORÈME VI. — Si, dans les mêmes conditions,

les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ admettent les limites respectives l et m , avec $m \neq 0$,

le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet dans ces conditions la limite $\frac{l}{m}$.

46. Opérations rationnelles sur des fonctions devenant infinies.

1° **Somme.** — a) Si $f(x) \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et si $|g(x)|$ est majoré,

$$f(x) + g(x) \rightarrow +\infty \text{ (resp. } -\infty \text{)};$$

en particulier si $f(x) \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et si $g(x) \rightarrow m$,

$$f(x) + g(x) \rightarrow +\infty \text{ (resp. } -\infty \text{)}.$$

b) Si $f(x) \rightarrow +\infty$ et si $g(x) \rightarrow +\infty$, $f(x) + g(x) \rightarrow +\infty$.

Si $f(x) \rightarrow -\infty$ et si $g(x) \rightarrow -\infty$, $f(x) + g(x) \rightarrow -\infty$.

c) $(+\infty) - (+\infty)$ est une forme indéterminée.

2° **Produit.** — a) si $|f(x)| \rightarrow +\infty$, et si $|g(x)| > k > 0$, $|f(x) \times g(x)| \rightarrow +\infty$;
en particulier, si $|f(x)| \rightarrow +\infty$, et si $g(x) \rightarrow m \neq 0$, $|f(x) \times g(x)| \rightarrow +\infty$.

b) $\infty \times 0$ est une forme indéterminée.

3° **Quotient.** — a) Si $|f(x)| \rightarrow +\infty$, et si $|g(x)|$ est majoré,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow +\infty ; \quad \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow 0.$$

en particulier si $|f(x)| \rightarrow +\infty$ et si $g(x) \rightarrow m$,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow +\infty , \quad \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow 0.$$

b) Si $|f(x)|$ admet un minorant strictement positif, et si $g(x) \rightarrow 0$,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow +\infty , \quad \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow 0.$$

c) $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont des formes indéterminées

47. Limite d'un radical. — THÉORÈME. m étant un nombre rationnel quelconque et l un nombre tel que l^m ait un sens, si dans certaines conditions $f(x)$ admet la limite l , dans ces conditions $[f(x)]^m$ admet la limite l^m .

Si $l = 0$ et si $m = \frac{p}{q}$, fraction irréductible à dénominateur pair, la proposition n'est valable que si $f(x) \rightarrow +0$.

IV. INFINIMENT PETITS, INFINIMENT GRANDS

48. Fonctions équivalentes. — **1° Généralités et Notation.** — Nous allons être amenés à étudier simultanément plusieurs fonctions réelles $y, z, u, v, \dots$ de la variable réelle définies sur un même champ $\mathcal{C}$. Par « dans certaines conditions » nous entendons encore indifféremment « quand x tend vers a », « quand x tend vers $a + 0$ », « quand x tend vers $a - 0$ », « quand x tend vers $+\infty$ » ou « quand x tend vers $-\infty$ ».

Le lecteur aura intérêt à se familiariser avec la notation suivante, attribuée à Landau :

Si, dans certaines conditions, $\frac{y}{z}$ admet la limite 0 on écrit $y = o(z)$, dans des conditions qu'il est nécessaire de préciser.

L'étude des limites montre que, les conditions étant les mêmes,

$$y_1 = o(z) \quad \text{et} \quad y_2 = o(z) \implies y_1 + y_2 = o(z) \quad \text{et} \quad y_1 y_2 = o(z).$$

2° DÉFINITION. — Deux fonctions y et z de la même variable sont dites **équivalentes dans certaines conditions** si, dans ces conditions, leur quotient admet la limite 1.

On écrit $y \sim z$, dans les conditions qu'il est nécessaire de préciser.

Rappelons qu'écrire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{y}{z} = 1$ implique l'existence d'un voisinage $\mathcal{C}$

de a sur lequel la fonction $\frac{y}{z}$ est définie (sauf peut être au point a) et ne prend que des valeurs appartenant à un intervalle donné $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$, par exemple à $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. On en déduit que x étant un point quelconque de $\mathcal{C}$, autre que a , les nombres $y(x)$ et $z(x)$ sont définis, ils sont *distincts de 0 et de même signe*.

Nous n'appliquerons la définition précédente que dans une famille $\mathcal{F}$ de fonctions telles que, pour chacune d'elles, il existe un intervalle ouvert qui contient a ou admet a pour extrémité, sur lequel la fonction est définie et ne prend pas la valeur 0 (sauf peut-être en a); a lui-même peut être remplacé par $+\infty$ ou par $-\infty$.

EXEMPLE I : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $l \neq 0 \implies f(x) \sim l$ quand $x \rightarrow a$.

Mais $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ne permet pas d'écrire $f(x) \sim 0$, le quotient $\frac{f(x)}{0}$ n'étant défini sur aucun voisinage de a .

EXEMPLE II : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \sin x \sim x$ quand $x \rightarrow 0$.

Notons que $\sin x \sim \frac{2}{\pi}x$ quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

REMARQUE : $y \sim z$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$.

3° Définition équivalente. — Étant entendu qu'il existe un voisinage de a sur lequel y et z sont définis et ne prennent pas la valeur 0 (sauf peut être au point a)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{y}{z} = 1 \iff y = z[1 + \varepsilon(x)], \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On écrira donc $y \sim z$ quand x tend vers a s'il existe une fonction $\varepsilon(x)$ définie sur un voisinage de a (sauf peut être au point a) telle que

$$y = z[1 + \varepsilon(x)]; \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Conséquence : $y \sim z \iff y - z = z \times \varepsilon(x) = o(z)$.

REMARQUE. — Le résultat se généralise au cas de deux fonctions équivalentes quand $x \rightarrow +\infty$ ou quand $x \rightarrow -\infty$.

4° Notions stables dans l'équivalence. — THÉORÈME I. — Si, dans les mêmes conditions, y et z sont équivalents et z admet la limite l , dans ces conditions y admet la limite l .

Il suffit d'utiliser l'égalité $y = \left(\frac{y}{z}\right) \times z$ et le théorème sur la limite d'un produit.

Extension : $y \sim z$ et $z \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) $\implies y \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$).

En abrégé nous dirons que la notion de limite est stable dans l'équivalence.

THÉORÈME II. — Deux produits ou quotients formés de termes (en nombre fini) deux à deux équivalents dans les mêmes conditions sont équivalents dans ces conditions.

Soit $y = \prod_{i=1}^p y_i$, $z = \prod_{i=1}^p z_i$ avec $y_i \sim z_i$ c'est-à-dire $\frac{y_i}{z_i} \rightarrow 1$.

On a (limite du produit d'un nombre fini de facteurs) :

$$\frac{y}{z} = \prod_{i=1}^p \frac{y_i}{z_i} \rightarrow 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad y \sim z.$$

Soit d'autre part $u = \frac{u_1}{u_2}$, $v = \frac{v_1}{v_2}$ avec $u_1 \sim v_1$ et $u_2 \sim v_2$

c'est-à-dire $\frac{u_1}{v_1} \rightarrow 1$ et $\frac{u_2}{v_2} \rightarrow 1$.

On a $\frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1} \times \frac{v_2}{u_2} \rightarrow 1$ c'est-à-dire $u \sim v$.

En abrégé nous dirons que les notions de quotient, et de produit d'un nombre fini de termes, sont stables dans l'équivalence.

REMARQUE. — $\lim \frac{y}{z} = 1 \implies \lim \left(\frac{y}{z}\right)^m = 1, \quad \forall m \text{ rationnel (n}^\circ 27\text{)}.$

On en déduit que $y \sim z \implies y^m \sim z^m, \quad \forall m \text{ rationnel}$

(à condition de supposer, pour certaines valeurs de m , y et z positives).

49. Infinitement petits. — 1^o DÉFINITION. — Une fonction $f(x)$ est dite **infinitement petite** dans certaines conditions si, dans ces conditions, elle admet pour limite 0.

EXEMPLES. $\cos x$ est infinitement petit quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

$\sqrt{x}$ est infinitement petit quand x tend vers 0 à droite.

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ est infinitement petit quand x tend vers 0, car $|f(x)| < |x|$; mais, sur tout voisinage de 0, $f(x)$ s'annule une infinité de fois (pour les valeurs de x égales à $\frac{1}{k\pi}$). De tels exemples seront écartés des théorèmes généraux qui vont suivre, de façon à éviter des difficultés dans l'étude de certains quotients.

2^o Ordre relatif de deux infinitement petits simultanés. — On appelle **infinitement petits simultanés** deux fonctions y et z de la même variable qui admettent la limite 0 dans les mêmes conditions.

Nous n'appliquerons cette définition que pour les fonctions d'une famille $\mathcal{F}$ (cf. n^o 48, 2^o) qui admettent toutes la limite 0 quand x tend vers a .

Comparer deux infinitement petits simultanés, c'est étudier la limite éventuelle de leur rapport. Cette étude mène aux définitions suivantes.

DÉFINITIONS. — Étant donnés deux infinitement petits simultanés y et z :

a) Si $\frac{y}{z}$ admet pour limite 0 ($\iff \frac{z}{y}$ tend vers l'infini)

on dit que y est d'ordre supérieur à z ou que z est d'ordre inférieur à y .

b) Si $\frac{y}{z}$ admet une limite finie autre que 0,

on dit que y et z sont de même ordre.

REMARQUE. — La relation a) définie sur la famille $\mathcal{F}$ précédente n'est ni réflexive ni symétrique, mais elle est transitive.

En d'autres termes, y, z, u étant infinitement petits, si y est d'ordre supérieur à z , et z d'ordre supérieur à u , y est d'ordre supérieur à u .

La relation b) définie sur la famille $\mathcal{F}$ est une relation d'équivalence. Retenons que si y et z sont de même ordre que u , y et z sont de même ordre.

EXEMPLE I. — Deux infiniment petits équivalents sont de même ordre.

EXEMPLE II. — Soit à comparer $y = ax^p$ et $z = bx^q$ ($p \geq q > 0$) lorsque x tend vers 0.

$$\frac{y}{z} = \frac{a}{b} x^{p-q}.$$

Si $p > q$, ax^p est d'ordre supérieur à bx^q .

Si $p = q$, ax^p et bx^q sont de même ordre.

* **Extension.** — La fonction $y = x^2 \left(3 + \sin \frac{1}{x} \right)$ est infiniment petite quand x tend vers 0 et elle ne prend pas la valeur 0 au voisinage de 0 ($x \neq 0$).

Le rapport $\frac{y}{x^2}$ n'a pas de limite, mais oscille entre 2 et 4 quand $x \rightarrow 0$.

Nous pourrions encore dire que y et z sont de même ordre si le rapport $\frac{y}{z}$, sans admettre de limite, oscille entre deux nombres de même signe.

Nous avons déjà écarté le cas d'une fonction telle que $y_1 = x^2 \left(\frac{1}{3} + \sin \frac{1}{x} \right)$: le quotient $\frac{y_1}{x^2}$ oscille entre deux nombres de signes contraires.

THÉORÈME. — Deux infiniment petits simultanés sont équivalents si et seulement si leur différence est d'ordre supérieur à l'un d'eux.

Nous avons vu que $y \sim z \iff y - z = z \times \varepsilon(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$.

Or, z étant ici un infiniment petit, cette dernière relation signifie que $y - z$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à z .

Conséquence. — La forme générale d'un infiniment petit équivalent à y est $y + y_1$, y_1 étant un infiniment petit quelconque d'ordre supérieur à y .

3° Ordre et partie principale d'un infiniment petit. — **DÉFINITION.** y et z étant des infiniment petits simultanés, s'il existe un nombre positif p (provisoirement rationnel) et un nombre $A \neq 0$ tels que

$$\lim \frac{y}{z^p} = A \iff y \sim Az^p \iff y = Az^p + o(z^p),$$

nous dirons que y est d'ordre infinitésimal p par rapport à z et que Az^p est la partie principale de y quand on choisit z pour infiniment petit principal.

Soulignons le caractère essentiellement relatif des notions d'ordre et de partie principale d'un infiniment petit.

UNICITÉ. — $\lim \frac{y}{z^p} = A$, $A \neq 0$ et $\lim \frac{y}{z^q} = B$, $B \neq 0$ exigent $\lim z^{q-p} = \frac{A}{B}$.

Or, à cause de $\lim z = 0$, cela n'est possible que si $q = p$ et exige $B = A$.

REMARQUE I. — Les notions d'ordre et de partie principale sont stables dans l'équivalence. En effet :

$$y_1 \sim y, \quad z_1 \sim z \quad \text{et} \quad \lim \frac{y}{z^p} = A \implies \lim \frac{y_1}{z_1^p} = A.$$

REMARQUE II. — En se bornant à des infiniment petits positifs

$$\lim \frac{y}{z^p} = A \implies \lim \frac{z}{y^{\frac{1}{p}}} = A^{-\frac{1}{p}},$$

ce qui montre que z est alors d'ordre $\frac{1}{p}$ par rapport à y . On a aussi

$$\lim \frac{y^q}{z^{pq}} = A^q, \quad \forall q > 0 \quad (\text{provisoirement rationnel}),$$

ce qui montre que y^q est alors un infiniment petit d'ordre pq , par rapport à z , de partie principale $A^q z^{pq}$.

Cette dernière remarque permet, dans l'étude de plusieurs infiniment petits simultanés, de disposer du choix de l'infiniment petit principal. Ce sera en général $x - a$ si x tend vers a , $\frac{1}{x}$ si x devient infini. On peut alors (en posant $X = x - a$ ou $X = \frac{1}{x}$) se ramener au cas de fonctions $y, z, \dots$ de x qui tendent vers 0 avec x . C'est ce que nous ferons dorénavant.

EXEMPLES : $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ et $\frac{\operatorname{tg} x}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$;

les infiniment petits $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ admettent donc x comme partie principale.

* CAS IRRÉGULIERS. — Comme au 2° nous conviendrons que $y = x^2 \left(3 + \sin \frac{1}{x} \right)$ est d'ordre 2 mais n'a pas de partie principale, que $y_1 = x^2 \left(\frac{1}{3} + \sin \frac{1}{x} \right)$ n'a pas d'ordre.

4° Opérations rationnelles sur les infiniment petits simultanés. —

PRODUIT. THÉORÈME. — Si plusieurs infiniment petits simultanés, en nombre fini, ont des parties principales, leur produit a pour partie principale le produit de leurs parties principales.

En effet d'une part la partie principale de chaque infiniment petit en est un équivalent; d'autre part le produit d'un nombre fini de facteurs est stable dans l'équivalence. C'est ainsi que :

$$y \sim A x^p \text{ et } z \sim B x^q \implies yz \sim AB x^{p+q}$$

$$\forall m \text{ entier naturel, } y \sim A x^p \implies y^m \sim A^m x^{mp}.$$

Par exemple, si $x \rightarrow 0$, $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2$ ou $\frac{x^2}{2}$.

SOMME. — I. — THÉORÈME I. — Si dans une somme S d'infiniment petits simultanés, en nombre fini, l'un des termes y_1 est d'ordre inférieur à tous les autres, il est équivalent à la somme.

Soit $S = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, avec $\lim \frac{y_2}{y_1} = 0, \dots, \lim \frac{y_n}{y_1} = 0$.

Comme $\frac{S}{y_1} = 1 + \frac{y_2}{y_1} + \dots + \frac{y_n}{y_1}$, on a $\lim \frac{S}{y_1} = 1$.

Il en résulte que si y_1 admet une partie principale, S admet la même partie principale.

EXEMPLE : Quand $x \rightarrow 0$, la fonction polynôme $A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \dots + A_n x^n$ est équivalente à son terme de plus bas degré $A_p x^p$.

II. — Soient $y_1, y_2, \dots, y_n$ des infiniment petits du même ordre, tels que

$$y_i \sim A_i x^p \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Posons

$$\Sigma = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

$$\frac{\Sigma}{x^p} = \frac{y_1}{x^p} + \frac{y_2}{x^p} + \dots + \frac{y_n}{x^p} \rightarrow A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Si $A_1 + A_2 + \dots + A_n \neq 0$, $\Sigma \sim (A_1 + A_2 + \dots + A_n) x^p$.

Si $A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0$, Σ est d'ordre supérieur à p .

Dans le premier cas, Σ a pour partie principale la somme

$$\Sigma' = (A_1 + A_2 + \dots + A_n) x^p$$

des parties principales; nous énoncerons :

THÉORÈME II. Σ étant la somme d'infiniment petits du même ordre p , en nombre fini, admettant des parties principales de somme Σ' :

si $\Sigma' \neq 0$, Σ est d'ordre p et a pour partie principale Σ' ,
si $\Sigma' = 0$, Σ est d'ordre supérieur à p .

De ces deux théorèmes on déduit la règle suivante :

RÈGLE. — Pour étudier la somme S de plusieurs infiniment petits simultanés, en nombre fini, admettant chacun une partie principale, on ne retient que ceux d'entre eux qui ont l'ordre minimum p . On fait la somme Σ' de leurs parties principales. Si $\Sigma' \neq 0$, S admet Σ' pour partie principale. Si $\Sigma' = 0$, on peut seulement affirmer que S est d'ordre supérieur à p , mais cette méthode ne fournit pas sa partie principale éventuelle; on verra plus loin comment on peut alors résoudre la question (121).

EXEMPLE : a étant une constante et x l'infiniment petit principal,

$$y = \sin x + a \operatorname{tg} x$$

est la somme de deux infiniment petits qui ont pour parties principales x et ax ; si a est différent de -1 , y est un infiniment petit du premier ordre et sa partie principale est $(1 + a)x$.

$$\text{Si } a = -1, \quad y = \sin x - \operatorname{tg} x \quad \text{ou} \quad y = \frac{\sin x (\cos x - 1)}{\cos x}.$$

Le numérateur a pour partie principale $x \left(-\frac{x^2}{2} \right)$, le dénominateur tend vers 1, y est un infiniment petit du troisième ordre, sa partie principale est $-\frac{x^3}{2}$.

50. Infiniment grands. — 1^{re} DÉFINITION. — Une fonction $f(x)$ est dite infiniment grande dans certaines conditions si, dans ces conditions, elle tend vers l'infini.

L'étude des infiniment grands est analogue à celle des infiniment petits, $f(x)$ étant infiniment grand si, et seulement si $\frac{1}{f(x)}$ est infiniment petit. Aussi nous bornerons-nous à énoncer les résultats sans reprendre les raisonnements.

2° Ordre relatif de deux infiniment grands simultanés. — On appelle *infiniment grands simultanés* deux fonctions y et z de la même variable qui deviennent infinies dans les mêmes conditions. Nous n'appliquerons cette définition que pour les fonctions d'une famille $\mathcal{F}$ (cf. n° 48, 2°) qui tendent toutes vers l'infini quand x tend vers a . Comparer deux infiniment grands simultanés, c'est étudier la limite éventuelle de leur rapport. Cette étude mène aux définitions suivantes :

DÉFINITION. — Étant donnés deux infiniment grands simultanés y et z :

a) Si $\frac{y}{z}$ tend vers l'infini ($\Leftrightarrow \frac{z}{y}$ admet pour limite 0), on dit que y est d'ordre supérieur à z ou que z est d'ordre inférieur à y .

b) Si $\frac{y}{z}$ admet une limite finie autre que 0, on dit que y et z sont de même ordre.

La relation a) définie sur la famille $\mathcal{F}$ précédente est transitive : si y, z, u sont infiniment grands, si y est d'ordre supérieur à z , et si z est lui-même d'ordre supérieur à u , y est d'ordre supérieur à u .

La relation b) définie sur la famille $\mathcal{F}$ est une relation d'équivalence.

EXEMPLE I. — Deux infiniment grands équivalents sont de même ordre.

EXEMPLE II. — Soit à comparer $y = ax^p$ et $z = bx^q$ ($p \geq q > 0$) lorsque x tend vers l'infini.

$$\frac{y}{z} = \frac{a}{b} x^{p-q}, \text{ donc } \begin{cases} \text{si } p > q, ax^p \text{ est d'ordre supérieur à } bx^q \\ \text{si } p = q, ax^p \text{ et } bx^q \text{ sont de même ordre.} \end{cases}$$

REMARQUE. — L'hypothèse « $\frac{z}{y} \rightarrow 0$ » où y est infiniment grand n'implique pas que z soit aussi infiniment grand; z peut être borné, z peut même être un infiniment petit. Mais si z est un infiniment grand, z est d'ordre inférieur à y .

THÉORÈME. — Deux infiniment grands simultanés sont équivalents si, et seulement si leur différence est, soit un infiniment grand d'ordre inférieur à l'un d'eux, soit une fonction qui reste finie dans les conditions considérées.

CONSÉQUENCE. — La forme générale d'un infiniment grand équivalent à y est $y + y_1$, y_1 étant, soit un infiniment grand quelconque d'ordre inférieur à y , soit une fonction bornée.

3° Ordre et partie principale d'un infiniment grand. — DÉFINITION. y et z étant des infiniment grands simultanés, s'il existe un nombre positif p (provisoirement rationnel) et un nombre $A \neq 0$ tels que

$$\lim \frac{y}{z^p} = A \quad \Leftrightarrow \quad y \sim Az^p \quad \Leftrightarrow \quad y = Az^p + o(z^p)$$

nous dirons que y est d'ordre infinitésimal p par rapport à z et que Az^p est la partie principale de y quand on choisit z pour infiniment grand principal.

On démontre l'unicité, la stabilité dans l'équivalence, le fait que, s'il s'agit d'infiniment grands positifs, y^q ($q > 0$) est d'ordre pq par rapport à z (de partie principale $A^q z^{pq}$) et que z est d'ordre $\frac{1}{p}$ par rapport à y ; d'où la liberté du choix de l'infiniment grand principal (qui sera en général x).

4° Opérations rationnelles sur les infiniment grands simultanés. — *a) Produit d'infiniment grands.* — THÉORÈME. — Si plusieurs infiniment grands simultanés, en nombre fini, ont des parties principales, leur produit a pour partie principale le produit de leurs parties principales.

$$\begin{aligned} y \sim Ax^p \quad \text{et} \quad z \sim Bx^q &\Rightarrow yz \sim ABx^{p+q} \\ \forall m \text{ entier naturel} \quad y \sim Ax^p &\Rightarrow y^m \sim A^m x^{pm}. \end{aligned}$$

b) Quotient d'infiniment petits ou d'infiniment grands. — Le quotient de deux infiniment petits ou de deux infiniment grands peut, soit être un infiniment petit ou un infiniment grand, soit tendre vers une limite finie non nulle.

Soient en effet y et z deux infiniment petits dont les parties principales sont respectivement Ax^p et Bx^q . Distinguons trois cas :

$$p > q, \quad \frac{y}{z} \text{ est un infiniment petit dont la partie principale est } \frac{A}{B} x^{p-q}.$$

$$p = q, \quad \frac{y}{z} \text{ tend vers } \frac{A}{B}.$$

$$p < q, \quad \frac{y}{z} \text{ est un infiniment grand dont la partie principale est } \frac{A}{B} \left(\frac{1}{x} \right)^{q-p},$$

si l'on prend $\frac{1}{x}$ pour infiniment grand principal.

De même, si y et z sont deux infiniment grands dont les parties principales sont respectivement Ax^p et Bx^q , suivant que $p > q$, $p = q$, $p < q$, le rapport $\frac{y}{z}$, ou bien est un infiniment grand dont la partie principale est $\frac{A}{B} x^{p-q}$, ou bien tend vers $\frac{A}{B}$, ou bien est un infiniment petit dont la partie principale est $\frac{A}{B} \left(\frac{1}{x} \right)^{q-p}$, si l'on prend $\frac{1}{x}$ pour infiniment petit principal.

c) **Somme d'infiniment grands.** --- I. --- **THÉORÈME I.** — Si dans une somme d'infiniment grands simultanés, en nombre fini, l'un des termes y_1 est d'ordre supérieur à tous les autres, il est équivalent à la somme.

Soit $S = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, avec $\lim \frac{y_2}{y_1} = 0, \dots, \lim \frac{y_n}{y_1} = 0$.

$$\frac{S}{y_1} = 1 + \frac{y_2}{y_1} + \dots + \frac{y_n}{y_1}, \quad \text{donc} \quad \lim \frac{S}{y_1} = 1.$$

Le théorème s'étend au cas où la somme contient en outre des termes qui restent finis ou sont infiniment petits dans les conditions considérées.

EXEMPLE : Quand $|x| \rightarrow +\infty$, la fonction polynôme $P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$ est équivalente à son terme de plus haut degré A_0x^n .

On peut alors étudier la fonction rationnelle

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n}{B_0x^p + B_1x^{p-1} + \dots + B_p}$$

quand $|x| \rightarrow +\infty$;

$$P(x) \sim A_0x^n; \quad Q(x) \sim B_0x^p;$$

et la stabilité du quotient dans l'équivalence donne $\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{A_0}{B_0}x^{n-p}$.

Selon que $n > p, n = p, n < p$, la fonction rationnelle est infiniment grande, tend vers $\frac{A_0}{B_0}$, est infiniment petite.

II. — Soient $y_1, y_2, \dots, y_n$ des infiniment grands tels que $y_i \sim A_i x^p$.

Posons $\Sigma = y_1 + y_2 + \dots + y_n$; $\Sigma' = (A_1 + A_2 + \dots + A_n)x^p$.

Le même raisonnement qu'au n° 49, 4° conduit à l'énoncé suivant :

THÉORÈME II. Σ étant la somme d'infiniment grands simultanés de même ordre p , en nombre fini, admettant des parties principales de somme Σ' :

si $\Sigma' \neq 0$, Σ est d'ordre p et admet pour partie principale Σ' ,
 si $\Sigma' = 0$ } ou bien Σ est un infiniment grand d'ordre inférieur à p
 } ou bien Σ reste finie.

De ces deux théorèmes on déduit la règle suivante :

RÈGLE : Pour étudier la somme S de plusieurs infiniment grands simultanés, en nombre fini, admettant chacun une partie principale, on ne retient que ceux qui ont l'ordre maximum p . On fait la somme Σ' de leurs parties principales. Si $\Sigma' \neq 0$, S admet Σ' pour partie principale. Si $\Sigma' = 0$, une étude spéciale est nécessaire pour connaître ce que devient S . (On verra plus loin (n° 121) comment on peut s'y prendre.)

V. PREMIÈRES NOTIONS SUR LES FORMES INDÉTERMINÉES

51. **Formes indéterminées** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$. — **DÉFINITION.** f et g étant deux fonctions définies sur le même champ $\mathbb{C}$, si dans les mêmes conditions

a) $\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow 0 \\ g(x) \rightarrow 0 \end{array} \right\}$ on dit que $\frac{f(x)}{g(x)}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

- b) $\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \infty \\ g(x) \rightarrow \infty \end{array} \right\}$ on dit que $\frac{f(x)}{g(x)}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
- c) $\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow 0 \\ g(x) \rightarrow \infty \end{array} \right\}$ on dit que $f(x) \times g(x)$ se présente sous la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Lever l'indétermination, c'est chercher la limite éventuelle, dans les conditions considérées.

A cette fin, on utilise essentiellement la stabilité du produit et du quotient dans l'équivalence sous la forme suivante :

RÈGLE. — On ne change pas la limite éventuelle du *produit* d'un nombre fini de facteurs ou du *quotient* de deux termes, chacun de ceux-ci pouvant comporter le produit d'un nombre fini de facteurs,

a) en remplaçant tout facteur qui a une limite *non nulle* par cette limite,

b) en remplaçant tout facteur infiniment petit par un infiniment petit équivalent,

c) en remplaçant tout facteur infiniment grand par un infiniment grand équivalent.

REMARQUE I. — Insistons sur le fait que la règle précédente ne s'applique pas à une somme.

REMARQUE II. — Les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$ se ramènent théoriquement à la forme $\frac{0}{0}$ en écrivant $\frac{f}{g} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f}}}{\frac{1}{\frac{1}{g}}}$ et $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$. Autrement dit les formes indéterminées $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$ ne sont pas *théoriquement* distinctes.

EXEMPLE I (1). — La fonction $y = \frac{1 - \cos ax}{x(2 - x) \operatorname{tg} bx}$ admet-elle une limite quand x tend vers 0?

y se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \cos ax = 2 \sin^2 \frac{ax}{2}; & \sin \frac{ax}{2} \sim \frac{ax}{2} &\Rightarrow f(x) \sim \frac{a^2 x^2}{2} \\ g(x) &= x(2 - x) \operatorname{tg} bx; & 2 - x \sim 2 \text{ et } \operatorname{tg} bx \sim bx &\Rightarrow g(x) \sim 2 bx^2. \end{aligned}$$

On en déduit $y \sim \frac{a^2}{4b}$, ce qui prouve l'existence d'une limite égale à $\frac{a^2}{4b}$.

EXEMPLE II. — La fonction $y = (2x^2 - 3x + 1) \operatorname{tg} \pi x$ admet-elle une limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$?

y se présente sous la forme $0 \times \infty$. Posons $x = \frac{1}{2} + h$, ce qui nous conduit à étudier y au voisinage de $h = 0$. On a :

$$y = (-1 + 2h)h \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \pi h \right) = \frac{(-1 + 2h)h}{-\operatorname{tg} \pi h} \quad \left(\text{forme indéterminée } \frac{0}{0} \right)$$

(1) Certains des exemples étudiés aux nos 51 et 52 supposent acquise la continuité des fonctions usuelles, déjà connue du lecteur; cette question sera reprise au chapitre IV.

$$F(h) = (-1 + 2h)h \sim (-1)h; \quad G(h) = -\operatorname{tg} \pi h \sim -\pi h \implies \lim_{h \rightarrow \frac{1}{2}} y = \frac{1}{\pi}.$$

EXEMPLE III. — La fonction $y = \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ admet-elle une limite quand x tend vers 0?

y se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. En multipliant les deux termes de la fraction par $\cos x + \sqrt{\cos 2x}$, fonction qui ne prend pas la valeur 0 sur le voisinage $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ de 0, on a

$$y = \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{\sin^2 x (\cos x + \sqrt{\cos 2x})} = \frac{1}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}} \implies \lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{1}{2}.$$

52. Forme indéterminée $\infty - \infty$. — DÉFINITION. f et g étant deux fonctions définies sur le même champ $\mathcal{C}$, si dans les mêmes conditions

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad g(x) \rightarrow +\infty \quad \text{ou si} \quad f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad g(x) \rightarrow -\infty$$

on dit que $f(x) - g(x)$ se présente sous la forme indéterminée $\infty - \infty$.

Lever l'indétermination, c'est chercher la limite éventuelle dans les conditions considérées.

1^{er} Cas. Les deux infiniment grands ne sont pas du même ordre. — Nous savons (n° 50, 4°) que $f(x) - g(x)$ est alors un infiniment grand équivalent à celle des deux fonctions qui est d'ordre supérieur à l'autre. L'indétermination est ainsi levée.

2^e Cas. Les deux infiniment grands sont du même ordre. — Nous supposons que, dans les conditions considérées, le quotient $\frac{g(x)}{f(x)}$ admet une limite $l \neq 0$. Écrivons

$$f - g = f \left[1 - \frac{g}{f} \right].$$

Si $l \neq 1$ on peut écrire $f(x) - g(x) \sim (1 - l) f(x)$, ce qui lève l'indétermination. Finalement ce n'est que dans le cas où $f(x)$ et $g(x)$ sont des infiniment grands équivalents que la levée de l'indétermination n'est pas immédiate. Dans ce dernier cas l'écriture

$$f - g = \frac{1 - \frac{g}{f}}{\frac{1}{f}} \quad \text{ramène théoriquement à la forme} \quad \frac{0}{0}.$$

EXEMPLE I. — La fonction $y = \cot x - \frac{m}{x}$ admet-elle une limite quand $x \rightarrow 0$? y est la différence de deux infiniment grands respectivement équivalents à $\frac{1}{x}$ et $\frac{m}{x}$.

Si $m \neq 1$, y est un infiniment grand équivalent à $\frac{1-m}{x}$.

Si $m = 1$, l'indétermination ne peut être levée que par une étude plus poussée que le lecteur trouvera au n° 120, 1°.

EXEMPLE II. — La fonction $y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} - mx\sqrt{x+2}$ admet-elle une limite quand $x \rightarrow +\infty$?

Les deux infiniment grands $\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$ et $mx\sqrt{x+2}$ sont, par rapport à x , du même ordre $\frac{3}{2}$; ils admettent les parties principales $x^{\frac{3}{2}}$ et $mx^{\frac{3}{2}}$.

1° Soit $m \neq 1$; y est un infiniment grand de partie principale $(1-m)x^{\frac{3}{2}}$.

2° Soit $m = 1$. Écrivons $y = \frac{(a-2)x^2 + bx + c}{\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} + x\sqrt{x+2}}$.

Si $a \neq 2$, y est un infiniment grand de partie principale $\frac{a-2}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Si $a = 2$, y est un infiniment petit; autrement dit $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$. La partie principale

de y par rapport à $\frac{1}{x}$, est $\frac{b}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ si $b \neq 0$ et $\frac{c}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2$ si $b = 0$.

CHAPITRE IV

FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

B) CONTINUITÉ, CROISSANCE

I. FONCTIONS CONTINUES

53. Continuité en un point. — 1° DÉFINITION. — Une fonction f définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de x_0 (et par suite en x_0) est dite continue au point x_0 si $f(x)$ admet la limite $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 , c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{C} \\ |x - x_0| < \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On exprime parfois la même condition en disant qu'à tout voisinage $\mathcal{V}$ de $f(x_0)$ on sait faire correspondre un voisinage $\mathcal{W}$ de x_0 tel que $x \in \mathcal{W} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{V}$.

*REMARQUE. — On peut étendre la définition au cas où f est définie sur un champ $\mathcal{C}$ qui admet le point x_0 pour point d'accumulation et qui contient le point x_0 .

2° Restriction de la définition. — Si $f(x) \rightarrow f(x_0)$ seulement quand $x \rightarrow x_0 + 0$ (resp. $x_0 - 0$) on dit que la fonction f n'est continue qu'à droite (resp. à gauche) de x_0 .

Notons que (contrairement à ce qui peut se passer pour les limites) l'existence simultanée de la continuité à droite et à gauche de x_0 entraîne la continuité au point x_0 .

3° Cas usuels de discontinuité. — a) $f(x) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow x_0$, et cela que $f(x_0)$ existe ou non.

EXEMPLE. — $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$.

b) $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0 - 0)$, limites à droite et à gauche, existent et sont distinctes, et cela que $f(x_0)$ existe ou non.

EXEMPLE. $f(x) = \frac{\sin x}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|}$, $x_0 = 0$.

$$f(x) = \cos \frac{x}{2} \text{ sur }]0, \pi[\quad \text{et} \quad f(x) = -\cos \frac{x}{2} \text{ sur } [-\pi, 0[.$$

Par suite $f(x_0 + 0) = +1$, $f(x_0 - 0) = -1$.

On dit dans ce cas que x_0 est un point de discontinuité de première espèce la discontinuité étant en outre régulière si $f(x_0)$ existe et est égal à la moyenne arithmétique de $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0 - 0)$. La différence $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ s'appelle le saut de la fonction au point x_0 .

c) $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ mais $f(x_0)$ a une valeur distincte ou n'existe pas.

EXEMPLE. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$.

On a ici $f(x_0 + 0) = 1$ et $f(x_0 - 0) = 1$, alors que la fonction f n'est pas définie au point x_0 .

On peut alors déduire de f une fonction g continue au point x_0 par la convention suivante :

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \neq x_0 \in \mathcal{C}; \quad g(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0).$$

Le nombre $g(x_0)$ est dit *valeur de continuité* au point x_0 .

Dans l'exemple précédent cette valeur de continuité est 1.

4° Application des théorèmes sur les limites. — De chaque théorème sur les limites on déduit un théorème sur la continuité.

THÉORÈME I. — La somme et le produit d'un nombre fini p de fonctions définies sur le même voisinage de x_0 et continues au point x_0 sont des fonctions continues en ce point.

THÉORÈME II. — Le quotient de deux fonctions définies sur le même voisinage de x_0 et continues au point x_0 est une fonction continue en ce point, sous réserve que la fonction dénominateur n'y prenne pas la valeur 0.

THÉORÈME III. — m étant un nombre rationnel quelconque, si $f(x)$ est une fonction continue au point x_0 et si $[f(x_0)]^m$ est défini, la fonction $[f(x)]^m$ est continue au point x_0 .

THÉORÈME IV. — Si la fonction f est continue au point x_0 , $|f|$ l'est aussi.

La réciproque n'est pas vraie (n° 22, th. VI).

5° Premiers exemples de fonctions continues. — a) Une fonction constante, $f(x) = C$, est continue en tout point x_0 . En effet, à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut associer pour nombre α n'importe quel nombre positif.

b) La fonction $f(x) = x$, est continue en tout point x_0 . En effet, à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut associer le nombre $\alpha = \varepsilon$.

CONSÉQUENCE I. — On en déduit, d'après le théorème I, que, m étant un entier positif, $f(x) = x^m$, produit de m fonctions continues, définies sur $] - \infty, + \infty [$, est continue en tout point x_0 , que toute fonction polynôme est continue en tout point x_0 , que toute fonction rationnelle est continue en tout point où le dénominateur ne prend pas la valeur 0.

CONSÉQUENCE II. — En appliquant le théorème III à $f(x) = x$ on constate que, m étant un nombre rationnel quelconque, la fonction x^m est continue en tout point où elle est définie.

c) La fonction $f(x) = \sin x$, est continue en tout point x_0 ⁽¹⁾. En effet

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \quad \text{et} \quad \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1$$

entraînent
$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|,$$

et *a fortiori*, puisque la valeur absolue du sinus d'un angle est inférieure à la mesure de l'angle en radians,

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, associons-lui $\alpha = \varepsilon$. Il résulte de ce choix que

$$|x - x_0| < \alpha \implies |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

La fonction $f(x) = \cos x$ est continue en tout point x_0 (démonstration analogue).

d) Il résulte du théorème II que les fonctions $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ sont continues en tout point où elles sont définies.

54. Propriétés des fonctions continues sur un segment. —

1° DÉFINITION. — Une fonction f est dite continue sur un champ $\mathcal{C}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{C}$.

2° Continuité uniforme. — DÉFINITION. — Une fonction f , définie sur un intervalle $\mathcal{J}$, est dite uniformément continue sur $\mathcal{J}$, si à tout nombre positif ε on sait faire correspondre un nombre positif η tel que tout couple de points (x', x'') de $\mathcal{J}$ qui vérifie la condition $|x' - x''| < \eta$ vérifie de ce fait la condition $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, ce que nous écrivons en abrégé

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} x' \text{ et } x'' \in \mathcal{J} \\ |x' - x''| < \eta \end{array} \right\} \quad \text{on a} \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

REMARQUE. — Le nombre η associé à ε donné ne dépend ici que de ε alors que dans la définition de la continuité au point $x_0 \in \mathcal{J}$, le nombre α associé à ε dépend de ε mais aussi de x_0 .

(1) Cet exposé suppose l'emploi du cercle trigonométrique pour définir les fonctions circulaires; un exposé de pure analyse figure à la fin de l'ouvrage (n° 276 et la suite).

THÉORÈME. — Si une fonction f est uniformément continue sur un intervalle J elle est continue en tout point de J .

En effet, η étant le nombre associé à ε dans la définition de la continuité uniforme de f sur J , on constate que, x_0 étant un point fixe quelconque de J ,

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} x \in J \\ |x - x_0| < \eta \end{array} \right\} \quad \text{on a} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

En revanche il peut se faire qu'une fonction soit continue sur un intervalle J sans y être uniformément continue. Considérons par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $J =]0, \infty[$, où elle est continue.

Pour montrer que la continuité n'est pas uniforme, nous allons montrer (cf. I, n° 11) que

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que, } \forall \eta > 0, \quad \exists \left\{ \begin{array}{l} x' \text{ et } x'' \in J \\ |x' - x''| < \eta \end{array} \right\} \text{ tels que } \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| > \varepsilon.$$

Montrons que $\varepsilon = 1$ répond à la question :

$$\forall \eta \geq 1, \quad x' = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x'' = 1 \text{ conviennent}$$

$$\forall \eta \in]0, 1[, \quad x' = \frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \eta \text{ conviennent.}$$

3° Propriétés des fonctions continues sur un segment $[a, b]$. — Sauf avis contraire, nous supposons $a < b$. Par hypothèse, la fonction f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$; elle est continue à droite au point a , à gauche au point b .

Nous allons donner une démonstration directe de propriétés que nous retrouverons dans un contexte plus général au n° 285,6° et au n° 287,4°.

Dichotomies successives sur $[a, b]$. — Dans les théorèmes suivants, nous serons amenés à partager le segment $[a, b]$ en deux segments égaux, et à choisir l'un d'eux $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ ou $\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$; nous le désignerons par $[a_1, b_1]$. Nous réitérons sur $[a_1, b_1]$ l'opération précédente, ce qui fournit un segment $[a_2, b_2]$, etc...

Plus généralement nous appellerons $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ l'un des deux segments

$$\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right], \quad \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right].$$

Nous obtenons ainsi une suite

$$[a, b], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

de segments *emboîtés* dont la longueur tend vers zéro puisque $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini; il existe un nombre réel ξ et un seul appartenant à tous ces segments (cf. n° 32, 2°); ξ est limite commune des suites adjacentes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$; ξ appartient au segment $[a, b]$.

La fonction f étant continue sur $[a, b]$ l'est en particulier au point ξ ;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} |x - \xi| < \alpha \\ x \in [a, b] \end{array} \right\} \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

En choisissant N tel que $b_N - a_N < \alpha$, on a

$$\xi - \alpha < a_N \leq \xi \leq b_N < \xi + \alpha,$$

et par suite

$$x \in [a_N, b_N] \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

THÉORÈME I. f étant une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et ε étant un nombre positif arbitraire, on peut subdiviser $[a, b]$ en un nombre fini de sous-segments tels que, pour tout couple x' et x'' de points appartenant à un même sous-segment on ait

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Raisonnons par l'absurde : nous nous plaçons dans l'hypothèse (H) où la décomposition dont il est question est impossible pour $[a, b]$. C'est qu'elle est impossible pour au moins l'un des segments $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Nous désignons ce segment par $[a_1, b_1]$; en cas d'ambiguïté nous choisissons $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.

En itérant ce raisonnement nous obtenons une suite de segments *embottés*

$$[a, b], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

pour lesquels la décomposition est impossible.

Soit ξ la limite commune des suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$.

D'après l'étude initiale, à $\frac{\varepsilon}{2}$ on peut associer N tel que

$$x \in [a_N, b_N] \implies |f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

x' et x'' étant des points quelconques de $[a_N, b_N]$,

$$|f(x') - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |f(x'') - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

et ce résultat est en contradiction avec l'impossibilité de subdiviser $[a_N, b_N]$. L'hypothèse (H) est donc absurde.

COROLLAIRE I. — Une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ y est uniformément continue (théorème de Heine).

Nous venons de voir que, quel que soit le nombre positif $\frac{\varepsilon}{2}$, il existe une subdivision de $[a, b]$ en un nombre fini p de sous-segments au moyen de points

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{p-1} < b$$

telle que x' et x'' étant deux points quelconques du même sous-segment on ait

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Remarquons que si x' et x'' sont des points appartenant respectivement aux sous-segments adjacents $[x_{i-1}, x_i]$ et $[x_i, x_{i+1}]$ on a

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x'')| \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Associions alors à ε le nombre positif $\eta = \inf (x_i - x_{i-1})$.

L'inégalité $|x' - x''| < \eta$ impliquant que x' et x'' appartiennent soit au même sous-segment, soit à des sous-segments adjacents, elle entraîne

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon,$$

ce qui prouve que f est uniformément continue.

COROLLAIRE II. — Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ y est bornée.

Les notations étant celles du corollaire I,

$$x \in [a, x_1] \implies |f(x)| \leq |f(a)| + \frac{\epsilon}{2}$$

$$x \in [x_1, x_2] \implies |f(x)| \leq |f(x_1)| + \frac{\epsilon}{2} \leq |f(x)| + 2 \cdot \frac{\epsilon}{2}$$

$$x \in [x_{p-1}, b] \implies |f(x)| \leq |f(a)| + p \cdot \frac{\epsilon}{2};$$

p étant un entier fixe, les inégalités précédentes montrent que la fonction f est bornée sur $[a, b]$.

On en déduit l'existence des deux bornes

$$M = \sup f(x) \quad \text{et} \quad m = \inf f(x).$$

La différence $M - m$ est dite *oscillation* de la fonction f sur $[a, b]$.

THÉORÈME II. — Chacune des bornes M et m de $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ est effectivement atteinte.

Raisonnons par l'absurde : nous nous plaçons dans l'hypothèse (H) où il n'existe pas, sur $[a, b]$ de point x tel que $f(x) = M$.

M est la borne supérieure de $f(x)$ sur au moins l'un des segments $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. En opérant comme au théorème I, nous obtenons une suite de segments *embottés*

$$[a, b], [a_1, b_1] \dots, [a_n, b_n], \dots$$

telle que M est la borne supérieure de $f(x)$ sur $[a_n, b_n]$.

Soit ξ la limite commune des suites adjacentes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$. D'après l'hypothèse (H), $f(\xi) < M$. On peut donc choisir un nombre $\epsilon > 0$ assez petit pour que $f(\xi) + \epsilon < M$.

D'après l'étude initiale, à ce nombre ϵ on peut associer N tel que

$$x \in [a_N, b_N] \implies |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Mais alors, la borne supérieure de $f(x)$ sur $[a_N, b_N]$ est inférieure ou égale à $f(\xi) + \epsilon$; ce n'est pas M ; l'hypothèse (H) conduit à une contradiction. C'est qu'il existe au moins un point λ de $[a, b]$ tel que $f(\lambda) = M$.

Nous montrerions de même qu'il existe au moins un point μ de $[a, b]$ tel que $f(\mu) = m$.

THÉORÈME III. f étant une fonction continue sur le segment $[a, b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, il existe au moins un point c de $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Raisonnons par l'absurde : nous nous plaçons dans l'hypothèse (H) où $f(x)$ est différent de 0, quel que soit x sur $[a, b]$.

Il existe un, et un seul, des deux segments $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ aux extré-

mités duquel $f(x)$ prend des valeurs de signes contraires; nous le désignons par $[a_i, b_i]$. En réitérant le raisonnement, nous obtenons une suite de segments *emboîtés*

$$[a, b], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n] \dots$$

telle que $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont de signes contraires.

Soit ξ la limite commune des suites adjacentes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$. D'après l'hypothèse (H), $f(\xi) \neq 0$. On peut donc choisir un nombre $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\varepsilon < |f(\xi)|$.

D'après l'étude initiale, à ce nombre ε on peut associer N tel que

$$x \in [a_n, b_n] \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

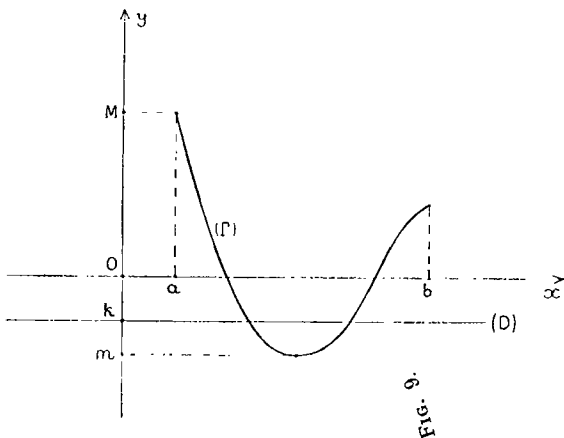
On constate ainsi que $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont de même signe, le signe commun étant celui de $f(\xi)$. L'hypothèse (H) conduit donc à une contradiction.

COROLLAIRE. f étant une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et k étant un nombre quelconque compris entre les bornes M et m de $f(x)$ sur $[a, b]$, il existe au moins un point c de $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Ce théorème, dit des *valeurs intermédiaires*, se démontre en appliquant le théorème III à la fonction $g(x) = f(x) - k$ sur le segment $[\lambda, \mu]$, λ et μ étant des points de $[a, b]$ tels que $f(\lambda) = M$ et $f(\mu) = m$, points dont l'existence a été prouvée.

Autre énoncé du théorème des valeurs intermédiaires. — L'image par une fonction f continue d'un segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$, éventuellement réduit à un point.

Interprétation graphique. — Soit (Γ) le graphe de la fonction f sur $[a, b]$, dans le système Ox, Oy (fig. 9). Sur toute droite (D) parallèle à Ox dont l'ordonnée est $k \in [m, M]$, il existe au moins un point de (Γ) .



4° Extensions des propriétés des fonctions continues sur un segment. — Nous utiliserons le résultat suivant :

LEMME. — Une partie $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle (ouvert ou fermé, fini ou infini) si, et seulement si $\mathcal{J}$ est convexe, c'est-à-dire si quels que soient les points a et b de $\mathcal{J}$, $[a, b] \subset \mathcal{J}$.

Condition nécessaire : elle résulte des définitions données au n° 10.

Condition suffisante : nous supposons que la condition est remplie et nous distinguons quatre cas.

a) $\mathcal{J}$ est borné. Soient m et M les bornes inférieure et supérieure de $\mathcal{J}$.

$$\forall x \in]m, M[, \exists \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathcal{J}, \quad m < a < x \\ b \in \mathcal{J}, \quad x < b < M \end{array} \right\} \implies [a, b] \subset \mathcal{J} \implies x \in \mathcal{J}.$$

Comme $\mathcal{J}$ ne contient aucun point extérieur à $[m, M]$, c'est que

$$\mathcal{J} = [m, M] \quad \text{ou} \quad \mathcal{J} = [m, M[\quad \text{ou} \quad \mathcal{J} =]m, M] \quad \text{ou} \quad \mathcal{J} =]m, M[.$$

b) $\mathcal{J}$ est minoré, mais n'est pas majoré. Soit m la borne inférieure de $\mathcal{J}$.

$$\forall x \in]m, +\infty[, \exists \begin{cases} a \in \mathcal{J}, & m < a < x \\ b \in \mathcal{J}, & x < b \end{cases} \implies x \in \mathcal{J}.$$

On a $\mathcal{J} =]m, +\infty[$ ou $\mathcal{J} =]m, +\infty[$.

c) $\mathcal{J}$ est majoré, mais n'est pas minoré. Soit M la borne supérieure de $\mathcal{J}$. On montre, en raisonnant comme en b), que

$$\mathcal{J} =]-\infty, M] \quad \text{ou} \quad \mathcal{J} =]-\infty, M[.$$

d) $\mathcal{J}$ n'est pas borné.

$$\forall x, \exists \begin{cases} a \in \mathcal{J}, & a < x \\ b \in \mathcal{J}, & x < b \end{cases} \implies x \in \mathcal{J} \implies \mathcal{J} =]-\infty, +\infty[.$$

THÉORÈME. — L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Étudions l'image $f(\mathcal{J})$ de l'intervalle $\mathcal{J}$ par la fonction continue f .

Soient α et β deux points quelconques de $f(\mathcal{J})$. Il existe deux éléments a et b de $\mathcal{J}$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$.

$\mathcal{J}$ étant un intervalle, d'après la condition nécessaire précédente, $[a, b] \subset \mathcal{J}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image du segment $[a, b]$ est un segment comprenant le segment $[\alpha, \beta]$; il en résulte $[\alpha, \beta] \subset f(\mathcal{J})$; α et β étant quelconques dans $f(\mathcal{J})$, en vertu de la condition suffisante précédente, $f(\mathcal{J})$ est un intervalle.

II. FONCTIONS COMPOSÉES

55. Rappelons que, étant donnés trois ensembles A, B, C , la connaissance d'une application f de A dans B et d'une application g de B dans C nous a permis (I, n° 21) de définir une application, notée $g \circ f$, de A dans C , suivant le schéma

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{g} & z \\ \in A & & \in B & & \in C \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(y) \end{cases} \quad z = g[f(x)]$$

$$\xrightarrow{g \circ f}$$

$g \circ f$ est dite fonction composée (ou fonction de fonction).

A, B, C sont ici des parties de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

THÉORÈME. — La composition des fonctions réelles de la variable réelle conserve la continuité.

Nous ajoutons ici les hypothèses suivantes :

(H₁) la fonction f est continue au point x_0 de A

(H₂) la fonction g est continue au point $y_0 = f(x_0)$ de B .

D'après (H₂) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0 \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \in B \\ |y - y_0| < \beta \end{array} \right\} \implies |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

A ce nombre β correspond d'après (H₁) un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ |x - x_0| < \alpha \end{array} \right\} \implies |f(x) - f(x_0)| < \beta.$$

Comme $x \in A \Rightarrow f(x) \in B$, il en résulte que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ |x - x_0| < \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow |g[f(x)] - g[f(x_0)]| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que la fonction $g \circ f$ est continue au point x_0 de A .

REMARQUE. — Les hypothèses

$$(H_1') \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l; \quad (H_2') \quad \lim_{y \rightarrow l} g(y) = m$$

n'entraînent pas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g[f(x)] = m.$$

Le contre-exemple suivant le montre. Soit

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & f(x) &= x \sin \frac{1}{x}; & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \\ g(y) &= 0 \quad \text{si } y \neq 0; & g(0) &= 1. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g[f(x)] = 0 \quad \text{si } x \neq \frac{1}{k\pi} \\ g[f(x)] = 1 \quad \text{si } x = \frac{1}{k\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g[f(x)] \text{ n'a pas de limite} \\ \text{lorsque } x \text{ tend vers } 0. \end{array} \right.$$

III. FONCTIONS MONOTONES

56. Croissance. Décroissance. — 1^o DÉFINITION I. — On dit qu'une fonction f , définie sur un champ $\mathcal{C}$, est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur $\mathcal{C}$, si, lorsqu'on donne à x deux valeurs quelconques de $\mathcal{C}$, x' et x'' , distinctes, à la plus grande de ces deux valeurs correspond la plus grande (resp. petite) des deux valeurs $f(x')$ et $f(x'')$.

En d'autres termes, une fonction f , définie sur un champ $\mathcal{C}$ est dite

strictement croissante sur $\mathcal{C}$ | *strictement décroissante* sur $\mathcal{C}$

si pour tout couple (x', x'') de valeurs distinctes appartenant à $\mathcal{C}$

$$x' > x'' \Rightarrow f(x') > f(x'') \quad | \quad x' > x'' \Rightarrow f(x') < f(x'').$$

Il en résulte que les différences $x' - x''$ et $f(x') - f(x'')$ sont

$$\begin{array}{l|l} \text{de même signe} & \text{de signes contraires} \\ \text{ou} \quad \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} > 0 & \text{ou} \quad \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} < 0. \end{array}$$

2^o Interprétation graphique. — Soit Γ le graphe de la fonction f dans un repère tel que l'axe $x'x''$ est horizontal, orienté de gauche à droite, l'axe $y'y''$ est orienté de bas en haut. Si M' et M'' sont deux points quelconques de Γ , celui qui est le plus à droite est le plus haut si f est croissante, le plus bas si f est décroissante.

3^o DÉFINITION II. — Si les inégalités relatives aux valeurs de la fonction f sont des inégalités au sens large, on peut définir une croissance ou une décroissance au sens large. Nous énoncerons :

Une fonction f , définie sur un champ $\mathcal{C}$, est dite

croissante au sens large sur $\mathcal{C}$ | *décroissante au sens large sur $\mathcal{C}$*

si pour tout couple (x', x'') de valeurs distinctes appartenant à $\mathcal{C}$

$$x' - x'' > 0 \iff f(x') - f(x'') \geq 0 \mid x' - x'' > 0 \iff f(x') - f(x'') \leq 0.$$

4° Les fonctions croissantes, comme les fonctions décroissantes sont dites *monotones*; on distingue la monotonie au sens strict et la monotonie au sens large.

Pour une fonction f monotone, au sens strict, sur $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} x' \neq x'' &\iff f(x') \neq f(x'') \\ x' = x'' &\iff f(x') = f(x''). \end{aligned}$$

57. Variation d'une fonction. — 1° Position du problème. — Étudier la variation d'une fonction f , c'est partager, si c'est possible, le champ de définition $\mathcal{C}$ en ensembles partiels sur lesquels la fonction est monotone et donner pour chacun d'eux le sens de la variation.

Le problème précédent n'est pas toujours possible. C'est ainsi que la fonction f définie par $f(x) = 1$ si x est rationnel, $f(x) = 0$ si x est irrationnel n'est monotone sur aucun intervalle.

2° Comparaison des sens de variation de deux fonctions. — Soient f et g deux fonctions définies sur le même champ $\mathcal{C}$; soient x' et x'' deux nombres quelconques de $\mathcal{C}$, posons

$$x'' - x' = \Delta x, \quad f(x'') - f(x') = \Delta f, \quad g(x'') - g(x') = \Delta g.$$

a) Supposons que Δf et Δg soient de même signe quels que soient x' et x'' ; Δf et Δx d'une part, Δg et Δx d'autre part sont simultanément de même signe, ou de signes contraires; les deux fonctions f et g sont simultanément croissantes, ou simultanément décroissantes; on dit, en abrégé, qu'elles *varient dans le même sens sur $\mathcal{C}$* .

b) Supposons que Δf et Δg soient de signes contraires quels que soient x' et x'' ; les deux fonctions sont l'une croissante, l'autre décroissante; on dit, en abrégé, qu'elles *varient en sens contraires sur $\mathcal{C}$* .

3° Théorèmes généraux sur la variation des fonctions. — Les théorèmes suivants se démontrent en appliquant les remarques du 2°.

I. C désignant une constante, on reconnaît immédiatement que les fonctions f et $f + C$ *varient dans le même sens*.

II. A étant une constante, les différences $f(x') - f(x'')$ et $Af(x') - Af(x'')$ sont de même signe si A est positif, elles sont de signes contraires si A est négatif. D'après cette observation, les fonctions f et Af *varient dans le même sens ou en sens contraires suivant que la constante A est positive ou négative*.

III. Si dans un certain intervalle les fonctions f et g *varient dans le même sens*, la fonction $f + g$ *varie aussi dans le même sens*.

IV. Les fonctions f et $\frac{1}{f}$ varient en sens contraires dans tout intervalle où $f(x)$ garde le même signe. En effet la différence

$$\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} \quad \text{ou} \quad \frac{f(x'') - f(x')}{f(x') \cdot f(x'')}$$

et la différence $f(x') - f(x'')$ sont de signes différents puisque le produit $f(x') \cdot f(x'')$ est positif.

V. Soit f une fonction paire; supposons-la croissante sur le segment $[a, b]$ (nous supposons $0 < a < b$). Si x_0 et x_1 sont deux valeurs quelconques de ce segment, le rapport $m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ est positif. Considérons les valeurs opposées $-x_0$ et $-x_1$; le rapport correspondant $m' = \frac{f(-x_1) - f(-x_0)}{(-x_1) - (-x_0)}$ égale $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_0 - x_1}$; il est opposé au précédent et la fonction est décroissante sur $[-b, -a]$. Si sur $[a, b]$ une fonction paire varie dans un certain sens, sur $[-b, -a]$ elle varie en sens contraire.

VI. Faisons la même étude pour une fonction impaire croissante sur $[a, b]$. Le rapport $m' = \frac{f(-x_1) - f(-x_0)}{(-x_1) - (-x_0)}$ égale maintenant $\frac{-f(x_1) + f(x_0)}{x_0 - x_1}$, il est égal au rapport m . Si sur $[a, b]$ une fonction impaire varie dans un certain sens, elle varie aussi dans le même sens sur $[-b, -a]$.

VII. La composition des fonctions conserve la monotonie. — Soit $y = f(x)$ et $z = g(y)$ deux fonctions monotones respectivement sur les champs A et B (n° 55).

$$\begin{aligned} \forall x' \text{ et } x'', \quad x' - x'' > 0 & \iff \epsilon [f(x') - f(x'')] > 0 \\ & \text{ou } \epsilon (y' - y'') > 0 \\ \forall y' \text{ et } y'', \quad y' - y'' > 0 & \iff \epsilon_1 [g(y') - g(y'')] > 0 \\ & \text{ou } \epsilon_1 (z' - z'') > 0 \end{aligned}$$

ϵ , comme ϵ_1 , désignant $+1$ dans le cas d'une fonction croissante, -1 dans le cas d'une fonction décroissante.

Quels que soient x' et x'' , $z = g[f(x)]$ leur associe z' et z'' tels que

$$x' - x'' > 0 \iff \epsilon \epsilon_1 (z' - z'') > 0.$$

La fonction $g \circ f$ est croissante si les deux fonctions f et g varient dans le même sens, décroissante si les fonctions f et g varient en sens contraires.

58. *Propriétés d'une fonction monotone sur un intervalle.* — 1° THÉORÈME. — Si une fonction f est définie et monotone (au sens large ou au sens strict) sur un intervalle ouvert $\mathcal{J}$, elle admet en tout point x_0 de $\mathcal{J}$ une limite à droite et une limite à gauche.

Il suffit par exemple de se placer dans le cas d'une fonction croissante et de démontrer l'existence d'une limite à gauche. L'ensemble des nombres $f(x)$ relatifs aux points x de $\mathcal{J}$ tels que $x < x_0$ admet le majorant $f(x_0)$; en effet,

pour ces points, $f(x) \leq f(x_0)$ d'après la monotonie. Cet ensemble admet donc une borne supérieure $l \leq f(x_0)$ et, d'après la définition de celle-ci,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ au moins un point } \left\{ \begin{array}{l} \xi \in J \\ \xi < x_0 \end{array} \right\} \quad \text{tel que} \quad l - \varepsilon < f(\xi) \leq l.$$

f étant croissante, on en déduit que

$$\xi \leq x < x_0 \implies l - \varepsilon < f(x) \leq l.$$

Ainsi à tout $\varepsilon > 0$ on sait associer $\alpha = x_0 - \xi > 0$ tel que

$$0 < x_0 - x \leq \alpha \implies 0 \leq l - f(x) < \varepsilon.$$

Il en résulte que $f(x) \rightarrow l$ quand $x \rightarrow x_0 - 0$.

REMARQUE I. — En remplaçant J par un segment $[a, b]$, avec $a < b$, on établit par le même raisonnement que f admet une limite à gauche en b et une limite à droite en a .

REMARQUE II. — Si une fonction f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a < b$, est croissante et si elle est majorée, elle admet une limite à gauche au point b .

Dans le raisonnement précédent il suffit de remplacer x_0 par b et $f(x_0)$ par le majorant k .

L'extension à la borne inférieure dans le cas d'une fonction décroissante, est immédiate.

2° THÉORÈME — Si une fonction f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a < b$, est croissante et si elle n'est pas majorée, $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow b - 0$.

Quel que soit $A > 0$, il existe au moins un point $\xi \in]a, b[$ tel que $f(\xi) > A$, sinon $f(x)$ admettrait le majorant A .

Du fait que f est croissante il résulte que

$$\xi \leq x < b \implies f(x) > A.$$

Ainsi à $A > 0$ on a su associer $\alpha = b - \xi > 0$ tel que

$$0 < b - x \leq \alpha \implies f(x) > A.$$

On en déduit la proposition.

L'extension à la borne inférieure a , dans le cas d'une fonction décroissante, est immédiate.

3° THÉORÈME. — Soit f une fonction définie et croissante sur $]a, +\infty[$:
 si elle est majorée, $f(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$
 si elle n'est pas majorée, $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

a) Si f est majorée, soit $L = \sup f(x)$;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > a \quad \text{tel que} \quad L - \varepsilon < f(x_0) \leq L.$$

La fonction étant croissante

$$x > x_0 \implies f(x) > f(x_0), \quad \text{et} \quad L - \varepsilon < f(x) \leq L.$$

$f(x) \rightarrow L$ quand $x \rightarrow +\infty$.

b) si f n'est pas majorée,

$$\forall A > 0, \exists x_0 > a \quad \text{tel que} \quad f(x_0) > A.$$

La fonction étant croissante

$$x > x_0 \implies f(x) > f(x_0) \quad \text{et} \quad f(x) > A$$

autrement dit $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

L'extension à une fonction définie et décroissante sur $] -\infty, a[$ est immédiate.

4° *THÉORÈME. — Si une fonction f définie et monotone sur le segment $[a, b]$ prend toute valeur du segment $[f(a), f(b)]$, f est continue sur $[a, b]$.

Soit x_0 un point quelconque de $]a, b[$. Nous avons montré que $f(x)$ admet en ce point une limite à droite $f(x_0 + 0)$ et une limite à gauche $f(x_0 - 0)$ et que l'on a, en supposant f croissante,

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$$

$$x < x_0 \implies f(x) \leq f(x_0 - 0); \quad x > x_0 \implies f(x) \geq f(x_0 + 0).$$

On a forcément $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, sans quoi la fonction ne pourrait prendre une valeur comprise entre $f(x_0 - 0)$ et $f(x_0)$; on a de même $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. La fonction est donc continue au point x_0 (n° 53). La continuité à droite en a et à gauche en b se prouve de la même façon.

IV. FONCTIONS RÉCIPROQUES (OU INVERSES)

Rappelons que, dans une application bijective f d'un ensemble A sur un ensemble B , tout élément y de B est l'image d'un élément et d'un seul x de A , si bien qu'il est possible de définir l'application g de B sur A qui à $y \in B$ associe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. La fonction g est dite réciproque de la fonction f . On note, au moins dans les questions théoriques, $g = f^{-1}$. Le schéma à retenir est :

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{f} & y & \longleftrightarrow & y & \xrightarrow{f^{-1}} & x \\ \in A & & \in B & & \in B & & \in A \end{array} \quad \text{ou} \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

A et B sont ici des parties de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

59. Inversion d'une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a, b]$.

1° **Définition.** — Soit f une fonction strictement monotone sur le segment $[a, b]$; ses bornes sont $f(a)$ et $f(b)$, et ces nombres sont distincts.

Si f est en outre continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, à tout point y_0 du segment $[f(a), f(b)]$ correspond au moins un point x_0 du segment $[a, b]$ tel que $y_0 = f(x_0)$.

Du fait de la stricte monotonie, il n'en existe qu'un, car

$$x \neq x_0 \implies f(x) \neq f(x_0), \quad \text{ou} \quad f(x) \neq y_0.$$

Nous énoncerons donc :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — Soit f une fonction continue strictement monotone sur le segment $[a, b]$; à tout nombre y du segment $[f(a), f(b)]$ correspond un nombre x et un seul du segment $[a, b]$ tel que

$$f(x) = y.$$

Le nombre x peut être considéré comme l'image de y par une application f^{-1} du segment $[f(a), f(b)]$ sur le segment $[a, b]$; f^{-1} est dite fonction réciproque (ou inverse) de la fonction f .

b) La correspondance bijective entre $x \in [a, b]$ et $y \in [f(a), f(b)]$, établie par les relations équivalentes

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

apparaît dans le tableau suivant qui peut servir indifféremment de tableau de variation pour la fonction f ou pour la fonction f^{-1} .

x	a	x_0	b	$x = f^{-1}(y)$
$\downarrow$				$\uparrow$
$y = f(x)$	$f(a)$	y_0	$f(b)$	y

c) **REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.** — Le même graphe (Γ) représente indifféremment

$$y = f(x), \quad x \in [a, b] \quad \text{ou} \quad x = f^{-1}(y), \quad y \in [f(a), f(b)].$$

Du fait que (en supposant le repère normé) les points $M(\alpha, \beta)$ et $M'(\beta, \alpha)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (B) de l'angle xOy , il

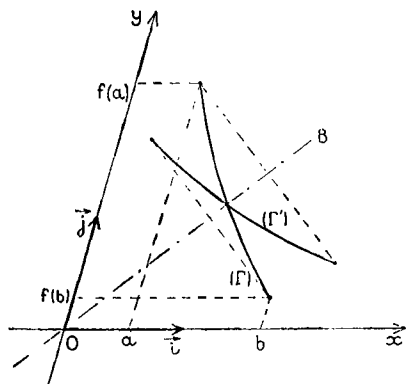


FIG. 10.

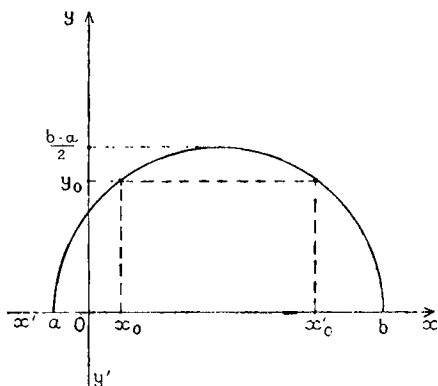


FIG. 11.

résulte que la courbe (Γ') symétrique de (Γ) par rapport à (B) représente indifféremment

$$Y = f^{-1}(X), \quad X \in [f(a), f(b)] \quad \text{ou} \quad X = f(Y), \quad Y \in [a, b].$$

REMARQUE I. — La nécessité de l'hypothèse relative à la monotonie de la fonction f apparaît sur la figure 11, qui correspond à la fonction $f(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}$; (Γ) est un demi-cercle; on a $m = 0$ et $M = \frac{b-a}{2}$. A tout point y_0 de $[m, M[$ correspondent deux points x_0 et x'_0 tels que

$$f(x_0) = f(x'_0) = y_0.$$

La nécessité de l'hypothèse relative à la stricte monotonie apparaît sur la figure 12, qui représente la fonction f définie par

$$f(x) = x \quad \text{sur} \quad \left[0, \frac{1}{3}\right];$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad \text{sur} \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right];$$

$$f(x) = x - \frac{1}{3} \quad \text{sur} \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

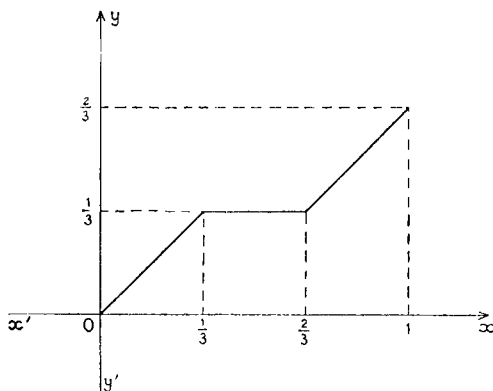


FIG. 12.

Cette fonction est continue et monotone au sens large sur $[0, 1]$.

Mais à $y_0 = \frac{1}{3}$ on peut associer une infinité de points x_0 tels que $f(x_0) = \frac{1}{3}$.

REMARQUE II. — La fonction réciproque d'une fonction impaire est une fonction impaire; en effet f (resp. f^{-1}) est impaire si et seulement si on peut associer à tout couple (x_0, y_0) le couple $(-x_0, -y_0)$, en d'autres termes si le graphe (Γ) admet le point O pour centre de symétrie.

Une fonction paire ne peut être inversée sur un voisinage de 0 puisqu'elle n'y est pas monotone.

2° Propriétés de la fonction f^{-1} réciproque de la fonction f . — Reprenons les hypothèses de l'étude précédente et, pour simplifier, supposons d'abord que f soit strictement croissante sur $[a, b]$; appelons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ les segments $[a, b]$ et $[f(a), f(b)]$.

a) Soient y' et y'' deux points quelconques de $\mathcal{E}$.

Posons $x' = f^{-1}(y')$ et $x'' = f^{-1}(y'')$;
on a ainsi $y' = f(x')$ et $y'' = f(x'')$.

D'après la stricte monotonie de f , les différences $x' - x''$ et $f(x') - f(x'')$ ont le même signe, ce qui, avec d'autres notations, exprime que les différences $y' - y''$ et $f^{-1}(y') - f^{-1}(y'')$ ont le même signe, et donc que la fonction f^{-1} est strictement croissante sur $\mathcal{E}$.

b) Montrons que $f^{-1}(y)$ est continue en tout point y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$f(a) < y_0 < f(b).$$

ε étant donné, il s'agit de prouver que l'on peut trouver α tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in \mathcal{E} \\ y_0 - \alpha < y < y_0 + \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$$

Posons $x_0 = f^{-1}(y_0)$; on a ainsi $y_0 = f(x_0)$.

Nous pouvons supposer que ε est assez petit pour que $x_0 - \varepsilon$ et $x_0 + \varepsilon$ appartiennent à $\mathcal{C}$. Les inégalités

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

et

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon)$$

sont équivalentes d'après la croissance de f .

$$\begin{array}{ll} \text{Posons} & y_0 - \alpha_1 = f(x_0 - \varepsilon) \iff f^{-1}(y_0 - \alpha_1) = x_0 - \varepsilon \\ & y_0 + \alpha_2 = f(x_0 + \varepsilon) \iff f^{-1}(y_0 + \alpha_2) = x_0 + \varepsilon; \end{array}$$

α_1 et α_2 sont deux nombres positifs; soit $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$.

$$y_0 - \alpha < y < y_0 + \alpha \quad \text{entraîne} \quad y_0 - \alpha_1 < y < y_0 + \alpha_2,$$

et par suite, d'après la croissance de la fonction f^{-1} ,

$$f^{-1}(y_0 - \alpha_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \alpha_2),$$

ce qui s'écrit encore $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$,

ce que nous voulions démontrer.

REMARQUE I. — Pour démontrer la continuité de f^{-1} au point $y_0 = f(a)$, on introduira seulement $y_0 + \alpha_2 = f(a + \varepsilon)$,

et $y_0 < y < y_0 + \alpha_2 \Rightarrow a < f^{-1}(y) < a + \varepsilon$.

REMARQUE II. — Les démonstrations sont analogues si la fonction f est supposée strictement décroissante sur $\mathcal{C}$.

En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME. — La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un segment est elle-même continue et strictement monotone sur un segment. Les deux fonctions réciproques varient dans le même sens.

On traduit quelquefois le fait que les deux fonctions réciproques sont simultanément continues par le mot *bicontinuité* qui qualifie la correspondance entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$.

3^e DÉFINITION ET ÉTUDE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION f CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE SUR UN INTERVALLE OUVERT OU SEMI-OUVERT. — Nous avons démontré au n^o 54 que l'image par la fonction continue f d'un intervalle $\mathcal{J}$ est un intervalle $f(\mathcal{J})$. L'étude faite au 1^o se généralise sans difficulté :

$$\forall y \in f(\mathcal{J}), \quad \exists x \in \mathcal{J}, \text{ unique, tel que } f(x) = y.$$

Ce nombre x peut être considéré comme l'image de y par une application f^{-1} de $f(\mathcal{J})$ sur $\mathcal{J}$; f^{-1} est la fonction réciproque de f . Nous avons ici une correspondance bijective entre intervalles ouverts ou semi-ouverts. On démontre comme au 2^o que cette correspondance est bicontinue, que f^{-1} est monotone et varie dans le même sens que f .

4°* COMPLÉMENTS. — a) Si f et g sont deux fonctions continues et strictement monotones définies respectivement sur $[a, b]$ et sur $[f(a), f(b)]$, on peut définir sur $[a, b]$ la fonction composée $g \circ f$, elle-même continue et strictement monotone. Celle-ci admet pour fonction réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$, ainsi que le montre le schéma suivant, dans lequel on a adopté la notation habituelle $y = f(x)$ et $z = g(y)$.

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & \xrightarrow{f} & y_0 & \xrightarrow{g} & z_0 & \xrightarrow{g^{-1}} & y_0 \xrightarrow{f^{-1}} x_0 \\ & & g \circ f & & & & f^{-1} \circ g^{-1} \\ x_0 & \xrightarrow{\quad} & z_0 & \xrightarrow{\quad} & x_0 & & \end{array}$$

b) Nous avons démontré que, f étant continue sur $[a, b]$, une condition suffisante d'existence de f^{-1} est que f soit strictement monotone. On peut démontrer que cette condition est nécessaire.

Supposons en effet que f^{-1} existe alors que f est continue, mais non monotone. Autrement dit il existe au moins trois points

$\alpha < \beta < \gamma$ de $[a, b]$ tels que $f(\beta) \notin [f(\alpha), f(\gamma)]$; soit par exemple $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$; on a tenu compte de ce que la biunivocité exige que les nombres $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ soient distincts.

Cela posé, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f continue sur $[\alpha, \beta]$ prend la valeur $f(\gamma)$ en au moins un point γ' de $]\alpha, \beta[$. $f(\gamma') = f(\gamma)$ est en contradiction avec le biunivocité. L'hypothèse de la non monotonie est donc absurde.

V. LA FONCTION PUISSANCE m , m RATIONNEL

60. *Fonction x^m , m entier naturel.* — 1° DÉFINITION ET CONTINUITÉ. — La fonction puissance m , m naturel, est définie et continue sur $] -\infty, +\infty [$, comme produit de m fonctions possédant ces propriétés.

Elle est paire (resp. impaire) si m est pair (resp. impair). Il suffit donc de l'étudier sur $[0, +\infty [$.

2° SENS DE VARIATION SUR $[0, +\infty [$. x_1 et x_2 étant deux nombres positifs quelconques, le quotient

$$\frac{x_1^m - x_2^m}{x_1 - x_2} = x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x_2 + \dots + x_2^{m-1}$$

est positif. La fonction est donc croissante sur $[0, +\infty [$. On en déduit que sur $] -\infty, 0]$ elle est décroissante (resp. croissante) si m est pair (resp. impair).

3° VALEURS AUX BORNES. — A étant un nombre fixe quelconque, l'inégalité $x^m > A$ est une conséquence de l'inégalité $x > \sup(1, A)$. En effet

$$x > 1 \implies x^m \geq x; \quad \text{cela posé} \quad x > A \implies x^m > A.$$

Il en résulte que

$$x^m \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad x \rightarrow +\infty.$$

On en déduit que $x^m \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) quand $x \rightarrow -\infty$ si m est pair (resp. impair).

4° **REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.** Le graphe (Γ) de la fonction x^m passe, pour toutes les valeurs de m , par le point $A(x = 1, y = 1)$ et par l'origine O . Le coefficient directeur de OM est

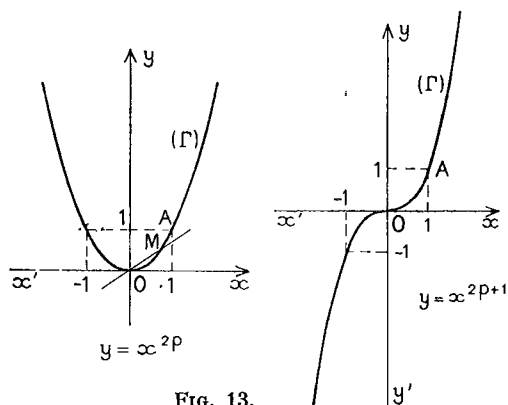


FIG. 13.

$\frac{y}{x} = x^{m-1}$; si $m \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = 0$;

(Γ) est tangent en O à Ox .

Si $m = 1$, (Γ) est la bissectrice des axes de coordonnées.

Si $m = 2$, (Γ) est une parabole $y = x^2$. Sur la figure 13 nous avons tracé (Γ) pour $m = 2p$ et pour $m = 2p + 1$.

61. **Fonction $\sqrt[m]{x}$, m entier naturel.** — 1° DÉFINITION. —

La restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction puissance m est une

application continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. On peut donc définir une fonction réciproque, application continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Cette fonction réciproque est appelée *racine m -ième*; on la désigne par le symbole $\sqrt[m]{x}$. En résumé.

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \sqrt[m]{x} \\ x \geq 0 \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} x = y^m \\ y \geq 0 \end{array}}$$

On retrouve, en d'autres termes, un théorème démontré au n° 15. Rappelons que nous avons été amenés à introduire la notation $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$.

2° GÉNÉRALISATION. — Si m est impair soit $m = 2p + 1$, la fonction puissance $2p + 1$ est continue et monotone sur $]-\infty, +\infty[$ et non pas seulement sur $]0, +\infty[$. Elle est impaire. D'où la possibilité de définir une fonction réciproque, application de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$; cette fonction coïncide avec la fonction racine $2p + 1$ -ième sur $[0, +\infty[$ et elle est impaire. Sur $]-\infty, +\infty[$ nous adopterons la notation $x^{\frac{1}{2p+1}}$ (cf. n° 18).

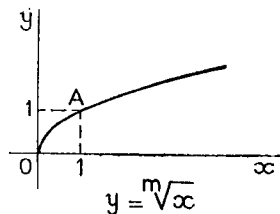


FIG. 14.

3° **REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.** — Le graphe de la fonction $\sqrt[m]{x}$ est symétrique par rapport à la bissectrice (B) des axes de coordonnées de l'arc $x \geq 0$ du graphe de x^m (fig. 14). Dans le cas où $m = 2p + 1$, on le complète par symétrie par rapport à O pour obtenir le graphe de $x^{\frac{1}{2p+1}}$.

62. Fonctions x^m , m rationnel. — 1° **Fonction $x^{\frac{p}{q}}$, p et q entiers naturels premiers entre eux.**

a) Si le dénominateur est pair, le numérateur est impair, soit $p = 2h + 1$ et $q = 2k$. Par définition,

$$x^{\frac{2h+1}{2k}} = \sqrt[2k]{x^{2h+1}};$$

cette fonction n'est définie que sur $[0, +\infty[$.

b) Si le dénominateur est impair, soit $q = 2k + 1$, le numérateur peut être pair ou impair.

Si p est pair, soit $p = 2h$,
$$x^{\frac{2h}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{x^{2h}};$$

cette fonction est définie sur $]-\infty, +\infty[$; elle est paire.

Si p est impair, soit $p = 2h + 1$,
$$x^{\frac{2h+1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{x^{2h+1}} \quad \text{si } x \text{ est positif}$$

 et
$$- \sqrt[2k+1]{|x|^{2h+1}} \quad \text{si } x \text{ est négatif}$$

cette fonction est définie sur $]-\infty, +\infty[$; elle est impaire.

Dans tous les cas il suffit d'étudier la fonction $\sqrt[q]{x^p}$ sur $[0, +\infty[$, en complétant par symétrie les résultats obtenus, lorsque q est impair.

La fonction $\sqrt[q]{x^p}$ est la fonction de fonction obtenue en remplaçant u par

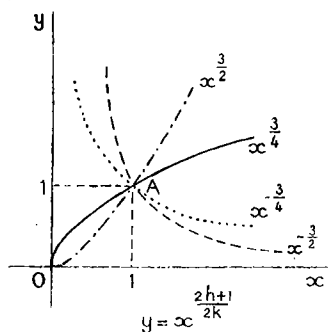


FIG. 15.

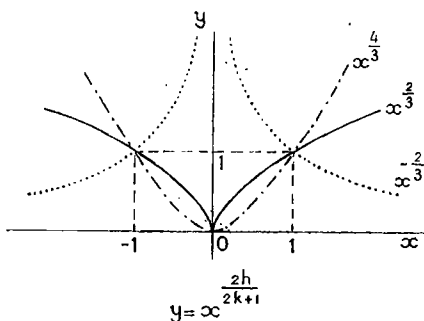


FIG. 16.

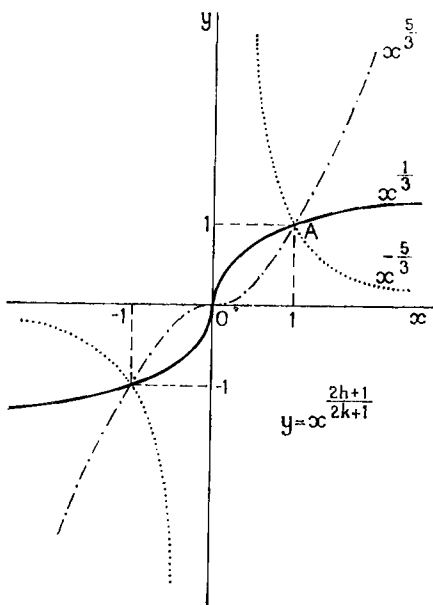


FIG. 17.

x^p dans $\sqrt[p]{u}$. D'après les études faites aux nos 60-2° et 61-1°, quand x croît de 0 à $+\infty$, $u = x^p$ croît de 0 à $+\infty$, et $\sqrt[p]{u}$ croît de 0 à $+\infty$; d'autre part la continuité des fonctions $u = x^p$ et $y = \sqrt[p]{u}$ entraîne celle de $\sqrt[p]{x^p}$.

Le graphe contient l'origine; la tangente en ce point a pour coefficient directeur la limite de $\frac{y}{x}$ quand x tend vers 0; si $m > 1$, $\frac{y}{x} = x^{m-1}$ tend vers 0 et la tangente est Ox; si $m < 1$, $\frac{y}{x} = \frac{1}{x^{1-m}}$ devient infini et la tangente est Oy.

Les figures 15, 16, 17 montrent quelques-uns de ces graphes. Ceux d'entre eux qui représentent $x^{\frac{2h+1}{2k+1}}$ admettent O pour centre de symétrie; ceux qui représentent $x^{\frac{2h}{2k+1}}$ admettent Oy pour axe de symétrie (du fait de l'orthogonalité des axes de coordonnées).

2° Fonction x^m , m rationnel négatif.

Posons $m = -\mu$; μ est une fraction irréductible. Par définition on a

$$x^{-\mu} = \frac{1}{x^{\mu}}.$$

Il suffit donc d'utiliser les résultats précédents.

Sur $]0, +\infty[$ la fonction x^m ($m < 0$) est continue et strictement décroissante. Son graphe est asymptote à Ox et à Oy puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^m = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^m = +\infty, \quad (m < 0).$$

Si les axes sont rectangulaires le graphe de la fonction $\frac{1}{x}$, qui correspond à $m = -1$ est une hyperbole équilatère.

REMARQUE I. — Soient (I') et (I'') les graphes des fonctions x^m et $x^{m'}$; supposons $m' > m$, et posons $y = x^m$ et $y' = x^{m'}$. Le rapport $\frac{y'}{y}$ égale $x^{m'-m}$, il est supérieur à 1 si x est plus grand que 1, compris entre 0 et 1 si x est compris entre 0 et 1; dans le premier cas y' est plus grand que y , dans le second cas y' est plus petit que y . Cette observation permet de placer les divers graphes les uns par rapport aux autres.

REMARQUE II. — Pour $x > 0$ on a $y = x^m \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{m}}$. Les fonctions x^m et $x^{\frac{1}{m}}$ sont réciproques l'une de l'autre. A deux valeurs inverses de l'exposant m correspondent donc des graphes dont les arcs $x > 0$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la bissectrice (B) des axes de coordonnées.

VI. FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Nous avons étudié la continuité des fonctions circulaires au n° 53-5°. L'étude de la variation de ces fonctions a été faite dans les classes antérieures; elle est reprise, par voie axiomatique, au n° 276.

Chacune des fonctions circulaires ne peut donner naissance à une fonction

réciroque que par une restriction à un segment sur lequel elle est continue et strictement monotone. Il existe une infinité de telles restrictions. Nous allons montrer que les diverses fonctions réciroques qu'elles fournissent se déduisent simplement de l'une d'elles, dite *détermination principale*, fournie par un *segment* dit *principal*, choisi par convention.

63. Inversion du sinus. — 1° DÉFINITION. — La restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus est une application continue et strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, +1]$. On peut donc définir une fonction réciroque, application continue et strictement croissante de $[-1, +1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Cette fonction réciroque est appelée *Arc sinus*; on la désigne par le symboile Arc sin. En résumé

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{Arc sin } x \\ |x| \leq 1 \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} x = \sin y \\ |y| \leq \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

2° La fonction Arc sin x est impaire. Son graphe est symétrique par rapport à la bissectrice (B) des axes de coordonnées de l'arc $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ du graphe de $\sin x$ (fig. 18).

REMARQUE I. — La fonction Arc sin(sin x) est définie sur $]-\infty, +\infty[$. Elle est impaire et admet la période 2π .

Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a
Arc sin(sin x) = x .

Sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ on a
Arc sin(sin x) = $\pi - x$.

Nous sommes ainsi en mesure de tracer (fig. 19) le graphe de cette fonction, souvent utile dans la pratique.

REMARQUE II. sih(Arc sin x) = x
entraîne $\cos^2(\text{Arc sin } x) = 1 - x^2$.

Arc sin $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
entraîne $\cos(\text{Arc sin } x) > 0$.

Nous avons donc

$$\cos(\text{Arc sin } x) = \sqrt{1 - x^2}$$

et

$$\text{tg}(\text{Arc sin } x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

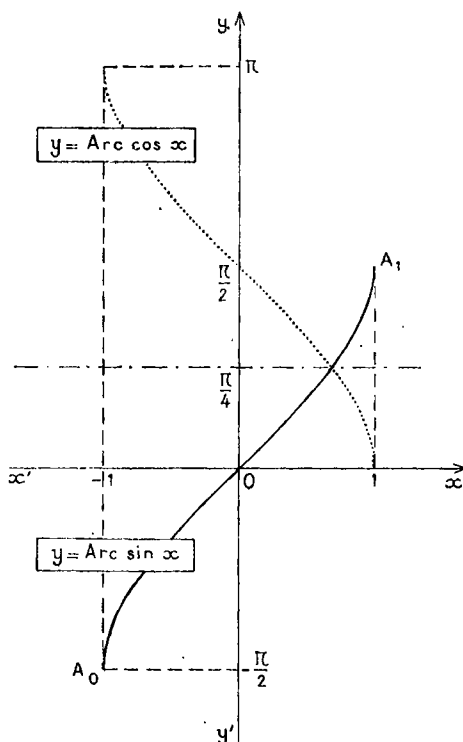


FIG. 18.

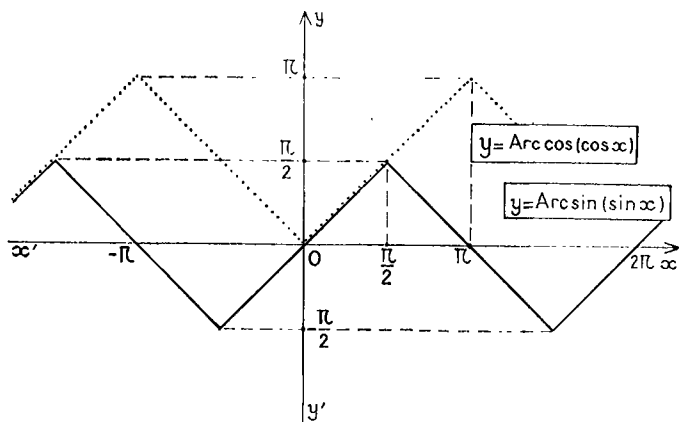


FIG. 19.

3° GÉNÉRALISATION. — D'après la définition même du sinus, étant donné un nombre $x \in [-1, +1]$, il existe une infinité d'arcs ayant pour sinus le nombre x . Arc $\sin x$ étant l'un d'eux, on sait qu'ils sont tous donnés par l'une des formules

$$y_{2p} = \text{Arc sin } x + 2p\pi, \quad y_{2p+1} = \pi - \text{Arc sin } x + 2p\pi,$$

p étant un entier relatif quelconque; y_{2p} appartient à $\left[\frac{\pi}{2} + (2p-1)\pi, \frac{\pi}{2} + 2p\pi\right]$ et y_{2p+1} à $\left[\frac{\pi}{2} + 2p\pi, \frac{\pi}{2} + (2p+1)\pi\right]$. Chaque nombre y_k est la valeur prise au point x par la fonction réciproque obtenue à partir de la restriction à $\left[\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

de la fonction sinus. Ces fonctions réciproques sont donc

$$f_{2p}^{-1}(x) = \text{Arc sin } x + 2p\pi$$

$$\text{et} \quad f_{2p+1}^{-1}(x) = \pi - \text{Arc sin } x + 2p\pi.$$

On considère leur ensemble comme formé des diverses déterminations d'une même fonction dite multiforme et notée arc $\sin x$. Cette fonction associée à tout $x \in [-1, +1]$ non pas une valeur unique, mais l'ensemble des racines y_k de l'équation $x = \sin y$.

On notera que la majuscule A caractérise la détermination choisie comme principale.

REMARQUE. — Traçons le graphe de la fonction $x = \sin y$. Les arcs A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 , etc., correspondent à

$$\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \text{ etc.}$$

La fonction $y = \text{Arc sin } x$ est aussi représentée par l'arc A_0A_1 .

D'une façon générale la détermination f_k^{-1} de arc $\sin x$ relative à $\left[\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ est représentée par l'arc A_kA_{k+1} .

Les ordonnées des points M_0, M_1 , etc., dont l'abscisse est x et qui sont situés sur ces arcs représentent les diverses déterminations.

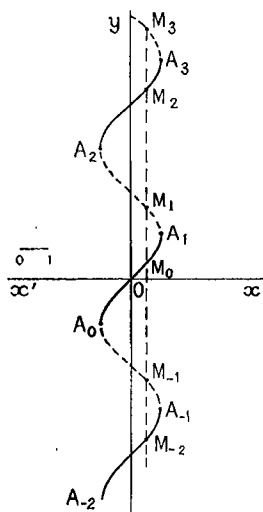


FIG. 20.

64. Inversion du cosinus. — 1^o DÉFINITION. — La restriction à $[0, \pi]$ de la fonction cosinus est une application continue et strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[1, -1]$. On peut donc définir une fonction réciproque, application continue et strictement décroissante de $[-1, +1]$ sur $[\pi, 0]$. Cette fonction réciproque est appelée *Arc cosinus*; on la désigne par le symbole *Arc cos*. En résumé

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{Arc cos } x \\ |x| \leq 1 \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{array}}$$

2^o Le graphe de la fonction *Arc cos* x est symétrique par rapport à la bissectrice (B) des axes de l'arc $x \in [0, \pi]$ du graphe de $\cos x$ (fig. 18).

THÉORÈME I. $\text{Arc cos } x + \text{Arc cos } (-x) = \pi.$ (1)

$$\text{Arc cos } (-x) \in [0, \pi] \implies \pi - \text{Arc cos } (-x) \in [0, \pi].$$

Les arcs $\text{Arc cos } x$ et $\pi - \text{Arc cos } (-x)$, tous deux compris entre 0 et π et ayant le même cosinus, sont égaux.

La relation (1) peut être également démontrée en constatant que le graphe de *Arc cos* x admet pour centre de symétrie le point $(0, \frac{\pi}{2})$.

THÉORÈME II. $\text{Arc cos } x + \text{Arc sin } x = \frac{\pi}{2}$ (2)

$$\text{Arc sin } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \implies \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x \in [0, \pi].$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x\right) = x$, on constate que les arcs $\text{Arc cos } x$ et $\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x$ sont compris entre 0 et π et qu'ils ont le même cosinus. Ils sont égaux.

La relation (2) peut être également démontrée en constatant que les graphes de *Arc sin* x et *Arc cos* x sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite $y = \frac{\pi}{4}$, ce qui résulte de la symétrie des graphes de $\sin x$ et $\cos x$ par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{4}$.

REMARQUE I. — Le graphe de la fonction *Arc cos* ($\cos x$) a été tracé sur la figure 19, en utilisant le fait que cette fonction est paire, de période 2π et qu'elle coïncide avec la fonction x sur $[0, \pi]$.

REMARQUE II. $\cos(\text{Arc cos } x) = x \implies \sin^2(\text{Arc cos } x) = 1 - x^2.$

$$\text{Arc cos } x \in [0, \pi] \implies \sin(\text{Arc cos } x) > 0.$$

Nous avons donc

$$\sin(\text{Arc cos } x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{et} \quad \text{tg}(\text{Arc cos } x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

3^o GÉNÉRALISATION. — Étant donné un nombre $x \in [-1, +1]$, il existe une infinité d'arcs ayant pour cosinus le nombre x ; *Arc cos* x étant l'un d'eux, ils sont tous donnés par l'une des formules

$$y_{2n} = \text{Arc cos } x + 2n\pi, \quad y_{2n+1} = -\text{Arc cos } x + (2n + 2)\pi,$$

n étant un entier relatif quelconque; y_{2n} appartient à $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, et y_{2n+1} que l'on peut écrire $2\pi - \text{Arc cos } x + 2n\pi$ appartient à $[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$.

On peut regarder ces arcs comme les diverses déterminations d'une fonction multiforme que l'on note $\text{arc cos } x$. La notation $\text{Arc cos } x$ est réservée à la détermination choisie pour *détermination principale*.

Les arcs du graphe de la fonction $x = \cos y$ qui correspondent aux intervalles tels que $[k\pi, (k+1)\pi]$, k entier, représentent aussi les diverses déterminations de $\text{Arc cos } x$.

65. Inversion de la tangente. — 1° DÉFINITION. — La restriction à $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ de la fonction *tangente* est une application continue et strictement croissante de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur $] -\infty, +\infty[$. On peut donc définir une fonction réciproque,

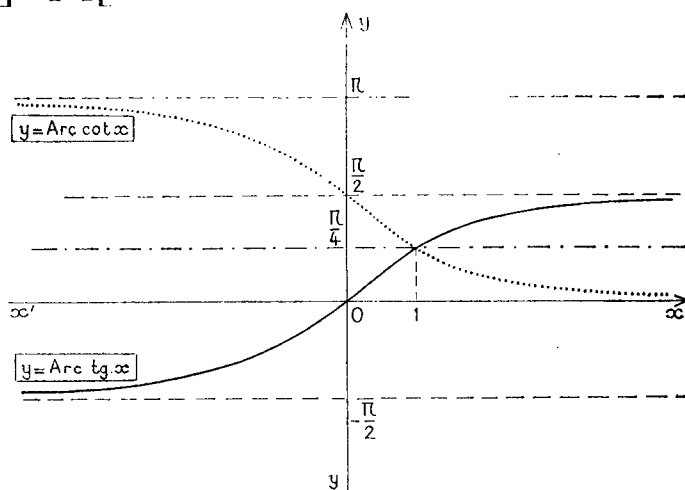


FIG. 21.

application continue et strictement croissante de $] -\infty, +\infty[$, sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Cette fonction réciproque est appelée *Arc tangente*; on la désigne par le symbole Arc tg . En résumé

$$\boxed{y = \text{Arc tg } x} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x = \text{tg } y \\ |y| < \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

2° La fonction $\text{Arc tg } x$ est impaire. Son graphe est symétrique par rapport à la bissectrice des axes de l'arc $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ du graphe de $\text{tg } x$ (fig. 21).

THÉORÈME. $\text{Arc tg } x + \text{Arc tg } \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2}; \quad \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

$$x > 0 \implies \text{Arc tg } \frac{1}{x} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\implies \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } \frac{1}{x} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Arc $\operatorname{tg} x$ et $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$, tous deux compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et ayant la même tangente sont égaux. On raisonne de la même manière si $x < 0$.

REMARQUE I. — Le graphe de la fonction $\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$ a été tracé sur la figure 22 en utilisant le fait que cette fonction admet la période π et qu'elle coïncide avec la fonction x sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; on notera les points de discontinuité de première espèce.

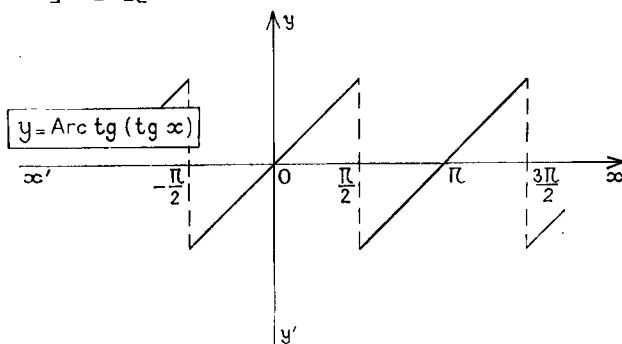


FIG. 22.

REMARQUE II. $\operatorname{tg}(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x) = x \implies \cos^2(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\implies \cos(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x) > 0$.

Nous avons donc

$$\cos(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3° GÉNÉRALISATION. — Il existe une infinité d'arcs ayant pour tangente un nombre donné x ; $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$ étant l'un d'eux, l'un quelconque de ces arcs est donné par la formule

$$y_k = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x + k\pi,$$

k étant un entier relatif quelconque; y_k appartient à $]\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

On peut regarder ces arcs comme les diverses déterminations d'une fonction multiforme que l'on note $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

Nous avons dessiné sur la figure 23 trois des branches du graphe de $x = \operatorname{tg} y$; les différentes branches correspondent aux diverses déterminations de la fonction réciproque, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, la détermination principale $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$ est représentée par la branche qui passe par l'origine.

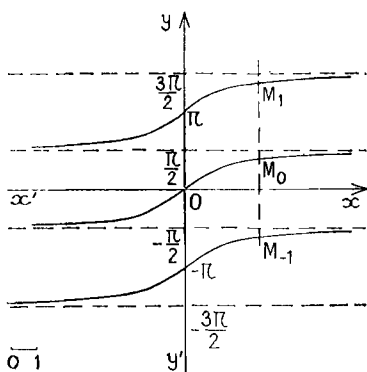


FIG. 23.

REMARQUE. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} a + \varepsilon \operatorname{arc} \operatorname{tg} b = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a + \varepsilon b}{1 - \varepsilon ab}$, modulo π , ($\varepsilon = \pm 1$)

Il suffit d'observer que

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} a + \varepsilon \operatorname{arc} \operatorname{tg} b) = \frac{a + \varepsilon b}{1 - \varepsilon ab}$$

66. Inversion de la cotangente. — DÉFINITION. — La restriction à $]0, \pi[$ de la fonction *cotangente* permet de définir une fonction réciproque, application continue et strictement décroissante de $] - \infty, + \infty [$ sur $] \pi, 0 [$. Cette fonction, dite *Arc cotangente*, est notée *Arc cot*. En résumé

$$\boxed{y = \text{Arc cot } x} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x = \cot y \\ 0 < y < \pi. \end{array}}$$

On constate que le graphe de la fonction *Arc cot* x est symétrique (fig. 21) de celui de la fonction *Arc tg* x par rapport à la droite $y = \frac{\pi}{4}$. Il en résulte la relation

$$\text{Arc cot } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } x$$

qui permet de remplacer systématiquement la fonction *Arc cot* x , par la fonction *Arc tg* x .

67. Utilisation pratique des fonctions circulaires réciproques. —

1° Calcul numérique. — a) Les tables de lignes trigonométriques naturelles donnent en degrés ou en grades la mesure de l'angle compris entre 0 et 1 droit ayant une ligne trigonométrique donnée. La mesure en radians est, suivant le cas, le produit par $\frac{\pi}{180}$ ou $\frac{\pi}{200}$ du nombre trouvé dans la table; cette mesure en radians est le nombre *Arc sin* x , *Arc cos* x , *Arc tg* x ou *Arc cot* x .

b) Les tables de logarithmes permettent de calculer successivement le logarithme d'un nombre donné x puis, par exemple, la mesure en grades de l'arc dont le sinus a pour logarithme $\log x$. En multipliant cette mesure par $\frac{\pi}{200}$ on trouve *Arc sin* x .

2° Nous allons, pour terminer, traiter quelques exercices.

EXERCICE I. — Étudier la variation de la fonction $y = \text{Arc sin } \frac{2x}{1+x^2}$.

Cette fonction est définie quel que soit x parce que $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1$; elle est impaire, nous pourrions donc nous borner à l'étudier pour $x > 0$.

En posant $\varphi = \text{Arc tg } x$, nous avons $y = \text{Arc sin } (\sin 2\varphi)$. D'où le tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
φ	0	$\nearrow \frac{\pi}{4} \searrow$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin 2\varphi$	0	$\nearrow 1 \searrow$	0
$y = \text{Arc sin } (\sin 2\varphi)$	0	$\nearrow \pi \searrow$	0

L'étude de la fonction *Arc sin* $(\sin x)$, faite au n° 63, nous apprend (en y substituant 2φ à x) que

$$\begin{aligned} 2\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] &\implies \text{Arc sin}(\sin 2\varphi) = 2\varphi \\ 2\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] &\implies \text{Arc sin}(\sin 2\varphi) = \pi - 2\varphi. \end{aligned}$$

En utilisant le tableau précédent, nous avons maintenant une expression plus simple de la fonction étudiée :

$$x \in [0, 1] \Rightarrow 2\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow y = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$$

$$x > 1 \Rightarrow 2\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow y = \pi - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x.$$

Pour tracer le graphe de la fonction y nous construisons d'abord l'arc $x > 0$ du graphe de $z = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$ (arc OHK de la fig. 24). Nous gardons la portion OH de cet arc qui correspond à $0 \leq x \leq 1$. Nous remplaçons la portion HK par la courbe HL, symétrique de HK par rapport à la droite $(\Delta) x = \frac{\pi}{2}$. Il ne reste plus qu'à compléter par symétrie par rapport à O.

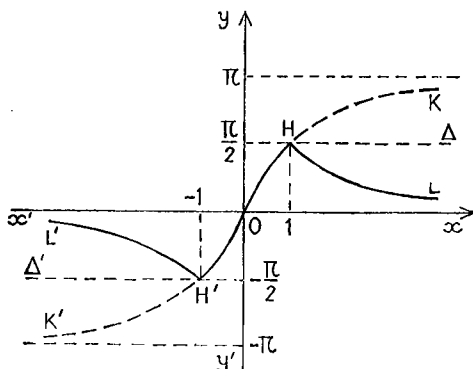


FIG. 24.

EXERCICE II. — Résoudre l'équation

$$4 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}.$$

En posant $\varphi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$ on constate que φ est un arc bien déterminé. D'ailleurs

$$0 < \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{16} < \varphi < \frac{\pi}{8}.$$

L'équation proposée admet donc une racine et une seule x_0 .

$$\text{On a} \quad \operatorname{tg} 4\varphi = \frac{1 + \frac{1}{239}}{1 - \frac{1}{239}} = \frac{240}{238} = \frac{120}{119}.$$

On pourrait penser à exprimer $\operatorname{tg} 4\varphi$ en fonction de $x = \operatorname{tg} \varphi$, ce qui fournirait une équation algébrique vérifiée par x_0 . Cette équation étant du quatrième degré, nous allons la résoudre en deux temps, en introduisant $l_0 = \operatorname{tg} 2\varphi$.

l_0 vérifie l'équation $\frac{2l}{1-l^2} = \frac{120}{119}$ qui s'écrit $60l^2 + 119l - 60 = 0$; les racines sont $\frac{5}{12}$ et $-\frac{12}{5}$; $\frac{\pi}{8} < 2\varphi < \frac{\pi}{4} \Rightarrow l_0 > 0$. On a donc $l_0 = \frac{5}{12}$.

x_0 vérifie l'équation $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{5}{12}$ qui s'écrit $5x^2 + 24x - 5 = 0$; les racines sont $\frac{1}{5}$ et -5 ; $\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{16} \Rightarrow x_0 > 0$. On a donc $x_0 = \frac{1}{5}$.

EXERCICE III. — Résoudre l'équation

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(x-2) + \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(x-1) + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(x+1) + \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(x+2) = 0$$

Le premier membre est une fonction $f(x)$ continue et strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$, comme somme de fonctions ayant ces propriétés. On constate que $f(0) = 0$. Il résulte de la stricte monotonie :

$$f(x) \neq 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

L'équation proposée admet donc une racine et une seule, $x_0 = 0$.

EXERCICES

1. — On désigne par f toute fonction réelle de la variable réelle qui est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et qui vérifie pour *tout* couple de nombres (x, y) la relation

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

- a) Montrer que l'ensemble des fonctions f est un espace vectoriel.
 b) Montrer que si une fonction f prend la valeur 0 en deux points distincts a et b , elle prend la valeur 0 en tout point de $] -\infty, +\infty[$.

c) En déduire que les fonctions f sont les fonctions $f(x) = ax + b$.

2. — On désigne par f toute fonction réelle de la variable réelle qui est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et qui vérifie pour *tout* couple (x, y) la relation

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Trouver, en s'inspirant de l'exercice précédent, toutes les fonctions f .

3. — On donne n nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

On désigne par f toute fonction réelle de la variable réelle continue sur $[a_1, a_n]$, et qui est linéaire sur chacun des segments

$$[a_i, a_{i+1}]; \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

a) Montrer que l'ensemble des fonctions f est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension?

b) Montrer que toute fonction f peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme :

$$f(x) = \lambda_1 |x - a_1| + \lambda_2 |x - a_2| + \dots + \lambda_n |x - a_n|$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant des nombres réels.

4. — Vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x &= \frac{\pi}{2}; & 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{Arc} \sin x &= \frac{\pi}{2} \\ 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \operatorname{Arc} \sin(2x-1) &= \frac{\pi}{2}; & \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \dots + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8} &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5. — Variation et représentation graphique des fonctions :

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}; & \quad \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \right); & \quad \sin(4 \operatorname{Arc} \sin x) \\ \operatorname{Arc} \sin(3x - 4x^3); & \quad \operatorname{Arc} \cos \frac{x^2 \cos a - 2x \cos a + 1}{x^2 - 2x \cos a + 1}; & \quad \operatorname{Arc} \sin \frac{2(x - \cos a) \sin a}{x^2 - 2x \cos a + 1} \\ \operatorname{Arc} \sin(2x\sqrt{1-x^2}); & \quad \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}; & \quad \operatorname{Arc} \sin \frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

6. — Construire les courbes d'équation

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} y &= \frac{\pi}{4}; \\ \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{x}} + \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{1}{2} - 2\sqrt{x}} &= \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{y}} + \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{1}{2} - 2\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

7. — Pour quelles valeurs de a et de b est-il légitime d'écrire l'égalité

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} a + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} b = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{a+b}{1-ab}?$$

CHAPITRE V

FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

C) DÉRIVÉES

I. NOTION DE DÉRIVÉE

68. Dérivée en un point. — 1° DÉFINITION. — Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur un segment ou sur un intervalle $\mathcal{C}$. On dit que f est dérivable au point x_0 de $\mathcal{C}$ si le rapport

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie l quand x tend vers x_0 sur $\mathcal{C}$.

Le nombre l est appelé *dérivée* de la fonction f au point x_0 . Pour rappeler son origine on l'écrit $l = f'(x_0)$.

REMARQUE. — Le quotient m est défini en tout point x de $\mathcal{C}$ autre que x_0 , mais n'est pas défini au point x_0 . Cela n'empêche pas la recherche d'une limite éventuelle de m quand x tend vers x_0 , puisque, par convention, la valeur x_0 est alors exclue (n° 41).

EXEMPLE. — Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$ pour $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$.

Pour rechercher si cette fonction admet une dérivée au point $x_0 = 0$, formons le rapport $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$. On constate $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq 3|x|$.

Le rapport tend vers 0 avec x , et, pour $x_0 = 0$, f admet une dérivée égale à 0.

2° Interprétation géométrique de la dérivée. — Le rapport m est le coefficient directeur de la droite qui joint les points M_0 et M , dont les abscisses sont x_0 et x , sur le graphe (1') de la fonction f .

On peut mettre m en évidence en portant (fig. 25) :

$$\overrightarrow{M_0U} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{UH} = m \vec{j},$$

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ désignant les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy .

Or m admet la limite l si, et seulement si, le point H admet pour limite un point T défini par $\vec{UT} = l \vec{j}$, c'est-à-dire si et seulement si la droite M_0M admet pour limite une droite M_0T non parallèle à Oy ou encore si et seulement si la courbe (Γ) admet la droite M_0T pour tangente au point M_0 . Nous énoncerons donc :

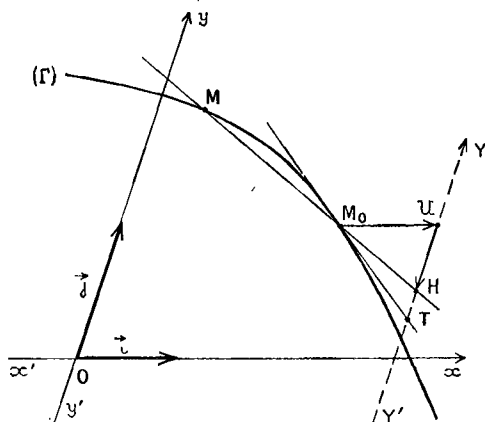


FIG. 25.

THÉORÈME. — La fonction f est dérivable au point x_0 si, et seulement si, son graphe (Γ) admet au point M_0 d'abscisse x_0 une tangente non parallèle à Oy . La dérivée $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente en M_0 à (Γ) .

L'équation de cette tangente est :

$$Y - f(x_0) = f'(x_0) [X - x_0].$$

3° (Γ) admet en M_0 une tangente parallèle à Oy si et seulement si m tend vers l'infini quand x tend vers x_0 . Nous considérons dans ce cas que la fonction f n'est pas dérivable au point x_0 . Autrement dit nous n'introduisons pas la notion de dérivée infinie.

4° Dérivée à droite, à gauche. — **DÉFINITION.** — Si le quotient $m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet, au point

x_0 , une limite à droite μ_1 (resp. une limite à gauche μ_2) on dit que la fonction f est dérivable à droite (resp. à gauche) au point x_0 .

Si le champ de définition $\mathcal{C}$ est un segment d'extrémité supérieure x_0 il y a identité entre la notion de dérivée au point x_0 et de dérivée à gauche au point x_0 .

Si, $\mathcal{C}$ étant un intervalle ouvert contenant x_0 , les limites μ_1 et μ_2 existent simultanément et sont distinctes nous avons

vu (n° 41, 4°) que m n'admet pas de limite quand x tend vers x_0 sur $\mathcal{C}$: la fonction f n'est pas dérivable au point x_0 . L'arc de (Γ) qui aboutit au point M_0 à droite (resp. à gauche) admet pour tangente en M_0 la droite M_0T_1 (resp. M_0T_2) de coefficient directeur μ_1 (resp. μ_2). On dit que M_0 est un point anguleux de (Γ) et que le graphe admet en M_0 deux demi-tangentes (fig. 26).

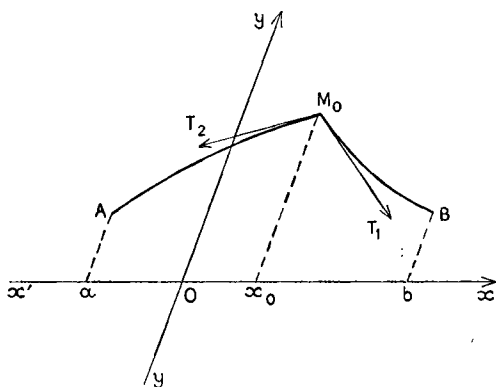


FIG. 26.

EXEMPLE. — La fonction $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$ est définie sur $[-1, +\infty[$. Pour l'étudier au voisinage de $x_0 = 0$, écrivons $f(x) = |x|\sqrt{1+x}$. On a $f(0) = 0$.

$$\text{Sur }]0, +\infty[, \text{ on a } \frac{f(x)}{x} = \sqrt{1+x} \implies \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\text{Sur } [-1, 0[, \text{ on a } \frac{f(x)}{x} = -\sqrt{1+x} \implies \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

La fonction f admet au point $x_0 = 0$ une dérivée à droite égale à $+1$ et une dérivée à gauche égale à -1 , mais elle n'est pas dérivable au point x_0 . Les deux arcs du graphe (F) qui aboutissent à l'origine sont respectivement tangents à la première et à la deuxième bissectrice (repère orthonormé) (fig. 27).

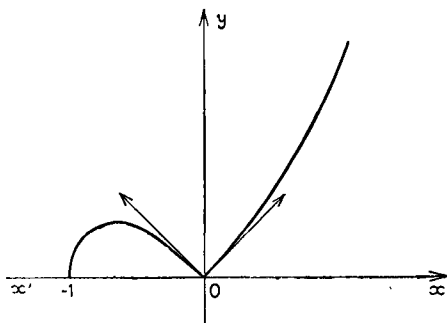


FIG. 27.

5° Dérivabilité et continuité.

— THÉORÈME. — Si une fonction est dérivable en un point, elle est continue en ce point.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{C}$, admettant au point x_0 de $\mathcal{C}$ la dérivée $f'(x_0)$. Considérons la fonction ε ainsi définie sur $\mathcal{C}$

$$(1) \quad \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{si} \quad x \neq x_0; \quad \varepsilon(x_0) = 0.$$

La définition de $f'(x_0)$ montre que la fonction ε est continue au point x_0 . En posant $x = x_0 + h$, on a sur $\mathcal{C}$, pour $h \neq 0$ et pour $h = 0$,

$$(2) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + h\varepsilon; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Le premier membre de (2) admet donc la limite 0 quand h tend vers 0, et la fonction f est continue au point x_0 .

REMARQUE I. — Si $f'(x_0) \neq 0$, la formule (2) montre que $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est un infiniment petit du premier ordre par rapport à h , dont la partie principale est $hf'(x_0)$.

On en déduit (48, 3°) qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel

$$x \neq x_0 \implies f(x) \neq f(x_0).$$

Au contraire, si $f'(x_0) = 0$ il peut se faire que sur tout voisinage de x_0 il existe une infinité de points $x \neq x_0$ tels que $f(x) = f(x_0)$. C'est le cas, au point $x_0 = 0$, pour la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

On a $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ et $f(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{k\pi}$, quel que soit l'entier relatif $k \neq 0$.

REMARQUE II. — La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie : Une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. C'est ce que montre l'exemple étudié au 4°.

6° **Différentielle.** — a) On dit que la fonction f définie sur $\mathcal{C}$ est différentiable au point x_0 de $\mathcal{C}$ s'il existe un nombre α tel que la fonction ε définie, pour $h \neq 0$, par la formule

$$(3) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha h + |h| \times \varepsilon(h)$$

admette la limite 0 quand h tend vers 0.

(On suppose $|h|$ assez petit pour que $x_0 + h \in \mathcal{C}$).

L'égalité (3) montre que le rapport

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha + \varepsilon \frac{|h|}{h}$$

tend vers α quand h tend vers 0 : si une fonction numérique, f , d'une variable, est différentiable en un point, elle est dérivable en ce point. Le 5° montre que la réciproque est vraie. En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME. — Une fonction numérique d'une variable est différentiable en un point si, et seulement si, elle est dérivable en ce point.

b) La forme linéaire $\mathcal{L}$, sur $\mathbf{R}$, telle que $\mathcal{L}(h) = f'(x) \times h$ est dite *application différentielle* de f au point x . De la même façon que l'on désigne par y l'image par f de l'élément générique de $\mathcal{C}$, on désigne par dy l'image par l'application linéaire $\mathcal{L}$ de l'élément générique de $\mathbf{R}$, que l'on convient d'écrire dx au lieu de h . On a ainsi, au point considéré x de $\mathcal{C}$

$$(4) \quad dy = f'(x) dx.$$

Par abus de langage, on dit que dy est la différentielle de f au point x .

$$\text{On peut écrire aussi} \quad d[f(x)] = f'(x) dx,$$

ou, par abus d'écriture $df = f'(x) dx$.

69. Fonction dérivée. — 1° Si la fonction f définie sur $\mathcal{C}$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathcal{C}$ nous avons une loi qui à tout point x_0 de $\mathcal{C}$ associe un nombre $f'(x_0)$, donc une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}$. Cette application est dite *fonction dérivée* de f et désignée par le symbole f' .

REMARQUE. — La connaissance de la fonction dérivée f' entraîne celle de la tangente en tout point du graphe (Γ) ; mais pour déterminer la tangente en un point particulier (x_0, y_0) de (Γ) il peut être commode de chercher directement la limite du rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0 ; en particulier si le point considéré est l'origine $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, le coefficient directeur de la tangente en ce point est la limite du rapport $\frac{y}{x}$ quand x tend vers zéro.

2° Dérivées successives. — Si la fonction dérivée f' admet à son tour une fonction dérivée, celle-ci est dite dérivée seconde de f et est désignée par

le symbole f'' . On peut ainsi de proche en proche être amené à définir la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre n) qui s'écrira $f^{(n)}$.

Autre notation : y ou $(y)^{(0)}$; y' ou $(y)'$; y'' ou $(y)''$; ...; $y^{(n)}$ ou $(y)^{(n)}$;

Il est commode, dans la pratique, de dire que si la fonction f définie sur l'intervalle $\mathcal{C}$ y admet des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre k inclus, elle est de classe C^k ; une fonction continue sur $\mathcal{C}$ est dite de classe C^0 .

3° Notation différentielle. — D'après la formule (4) du n° 68, 6°, la dérivée $f'(x)$ peut se noter $\frac{dy}{dx}$.

Plus généralement, les dérivées d'ordres 2, ..., n de la variable y considérée comme fonction de la variable indépendante x se noteront

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Les symboles précédents constituent ce qu'on appelle la notation différentielle des dérivées successives. Insistons sur le fait qu'il s'agit de symboles, et non de quotients, car nous ne donnerons pas de sens aux symboles d^2y , ...

d^ny ; quant à dy , nous l'avons défini à partir de $f'(x)$, c'est dire que, ici, $\frac{dy}{dx}$ ne sert que de symbole pour noter la dérivée de y par rapport à x .

II. CALCUL DES DÉRIVÉES

70. Théorèmes généraux sur le calcul des dérivées. — **1° Méthode générale et notations.** — Nous traiterons simultanément les deux problèmes suivants :

- la fonction $f(x)$ admet-elle une dérivée au point x_0 ?
- quelle est (s'il y a lieu) cette dérivée?

Précisons dans le tableau suivant les notations utilisées dans ce paragraphe; $u(x)$, $v(x)$ sont des fonctions intermédiaires qui seront supposées dérivables au point considéré x_0 .

FONCTION		$u(x)$	$v(x)$	$y = f(x)$	$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$
valeur numérique	au point x_0	u_0	v_0	y_0	$\Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)$
	au point $x_0 + \Delta x$	$u_0 + \Delta u$	$v_0 + \Delta v$	$y_0 + \Delta y$	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Δu , Δv , Δy sont appelés accroissements de $u(x)$, $v(x)$, $y = f(x)$ relatifs à l'accroissement Δx de x à partir de x_0 .

D'après l'hypothèse $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_0$ et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'_0$.

Nous savons (continuité d'une fonction dérivable) que Δu et Δv admettent

pour limite 0 quand Δx tend vers 0. Rappelons enfin que, d'après la définition d'une limite, nous pouvons exclure $\Delta x = 0$.

2° Dérivée d'une constante : $f(x) = \lambda$.

$$\forall x_0 \text{ et } \Delta x, \Delta y = 0 \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0. \text{ D'où :}$$

THÉORÈME. — Une fonction constante admet en tout point une dérivée égale à 0.

Dérivée de la fonction $f(x) = x$.

$$\forall x_0 \text{ et } \Delta x, \Delta y = \Delta x \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1. \text{ D'où :}$$

THÉORÈME. — La fonction $f(x) = x$ admet en tout point une dérivée égale à 1.

3° Dérivée du produit d'une fonction par une constante. — Soit $f(x) = \lambda u(x)$, λ étant une constante; $\Delta y = \lambda \Delta u$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda \frac{\Delta u}{\Delta x} \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda u'_0. \text{ D'où}$$

THÉORÈME. — Si la fonction $u(x)$ est dérivable au point x , il en est de même de la fonction $\lambda u(x)$, où λ est une constante, et on a, en ce point,

$$(\lambda u)' = \lambda u'.$$

4° Dérivée de la somme de deux fonctions dérivables.

$$f(x) = u(x) + v(x); \quad \Delta y = \Delta u + \Delta v;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'_0 + v'_0. \text{ D'où}$$

THÉORÈME. — Si les deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables au point x , il en est de même de la fonction $u(x) + v(x)$, et on a, en ce point,

$$(u + v)' = u' + v'$$

LINÉARITÉ DE LA DÉRIVATION. — On résume les propriétés 3° et 4° en disant que la dérivée d'une fonction est linéaire par rapport à cette fonction; toute combinaison linéaire à coefficients constants de fonctions dérivables est une fonction dérivable :

$$\left[\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \right]' = \sum_{k=1}^p \lambda_k u'_k.$$

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL. — Nous savons (40, 3°) que l'ensemble (Φ) des fonctions réelles définies sur un segment donné $[a, b]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; l'ensemble (Θ) des fonctions dérivables sur $[a, b]$ est une partie de (Φ) ; on exprime le 3° et le 4° en disant que (Θ) est un sous-espace vectoriel de (Φ) .

A toute fonction $u \in (\Theta)$, associons $u' \in (\Phi)$; l'application $u \mapsto u'$ vérifie les critères de linéarité (I, n° 161), c'est donc une application linéaire de (Θ) dans (Φ) .

5^e Dérivée du produit de deux fonctions dérivables.

$$f(x) = u(x) \times v(x); \quad \Delta y = (\Delta u \times v_0) + (u_0 \times \Delta v) + (\Delta u \times \Delta v);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \times v_0 \right) + \left(u_0 \times \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \times \Delta v \right).$$

Au second membre, le premier terme admet, quand Δx tend vers 0, la limite $u'_0 v_0$, le second terme la limite $u_0 v'_0$, le troisième terme la limite 0 (d'après $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$). Il en résulte :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'_0 v_0 + u_0 v'_0. \quad \text{D'où :}$$

THÉORÈME. — Si les deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables au point x , il en est de même de la fonction $u(x) \times v(x)$ et on a, en ce point,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

GÉNÉRALISATION. — Démontrons par récurrence que la dérivée du produit de p fonctions dérivables (p fixe, quelconque) est la somme des p produits formés en remplaçant successivement chaque facteur du produit donné par sa dérivée.

Soit

$$y = u_1 u_2 \dots u_p.$$

La règle étant vraie pour un produit de deux fonctions, pour démontrer qu'elle est générale, il suffit de prouver que, si elle est vraie pour un produit de $p - 1$ fonctions, elle l'est aussi pour un produit de p fonctions.

y s'obtenant en multipliant le produit $u_1 u_2 \dots u_{p-1}$ par u_p , sa dérivée est donnée par la règle énoncée soit :

$$y' = (u_1 u_2 \dots u_{p-1})' u_p + u_1 u_2 \dots u_{p-1} u'_p,$$

et la règle énoncée étant supposée valable pour un produit de $p - 1$ facteurs,

$$y' = [u'_1 u_2 \dots u_{p-1} + u_1 u'_2 u_3 \dots u_{p-1} + \dots + u_1 u_2 \dots u_{p-2} u'_{p-1}] u_p + u_1 u_2 \dots u_{p-1} u'_p.$$

Finalement on a bien :

$$y' = u'_1 u_2 \dots u_{p-1} u_p + u_1 u'_2 u_3 \dots u_{p-1} u_p + \dots + u_1 u_2 \dots u_{p-2} u'_{p-1} u_p + u_1 u_2 \dots u_{p-1} u'_p.$$

CONSÉQUENCES. — I. *Dérivée de u^m , m étant un entier naturel.* — Soit u une fonction dérivable de x , u^m est le produit $u \times u \times \dots \times u$ de m fonctions égales à u . Sa dérivée est la somme des m produits égaux à $u^{m-1} u'$ que l'on peut former en remplaçant chacun des m facteurs du produit $u \times u \times \dots \times u$ par sa dérivée : si m est un entier naturel, la dérivée de u^m est $mu^{m-1} u'$.

En particulier, m étant un entier naturel, la dérivée de x^m est mx^{m-1} .

II. *Dérivée d'un polynôme.* — Le polynôme de degré n , considéré ici comme une fonction réelle de la variable réelle :

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_p x^p + \dots + A_1 x + A_0$$

admet pour dérivée la somme des dérivées de ses termes, somme qui est le polynôme de degré $n - 1$

$$f'(x) = nA_n x^{n-1} + (n-1)A_{n-1}x^{n-2} + \dots + pA_p x^{p-1} + \dots + 2A_2x + A_1.$$

Il ne faut pas confondre ce point de vue avec celui que nous avons adopté dans le cours d'Algèbre. Rappelons que nous avons alors (I, n° 108) *défini*, indépendamment de toute considération de limite, la dérivée du polynôme de degré n dont les coefficients sont $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ comme étant le polynôme de degré $n - 1$ dont les coefficients sont $(A_1, 2A_2, \dots, nA_n)$.

III. *Dérivée d'un déterminant.* — Supposons que dans un déterminant Δ d'ordre n les éléments a_{pq} soient des fonctions d'une variable x , soit

$$\Delta = \Sigma(-1)^i a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\lambda}$$

le développement du déterminant, les notations étant celles que nous avons employées dans le cours d'Algèbre (I, chapitre XIV). La dérivée de chacun des produits tels que $a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\lambda}$, est la somme des n produits que l'on en déduit en remplaçant successivement chacun des n facteurs $a_{1\alpha}, a_{2\beta}, \dots, a_{n\lambda}$, par sa dérivée.

L'ensemble des produits formés en remplaçant dans chaque terme du développement de Δ le premier facteur par sa dérivée est la somme $\Sigma(-1)^i a'_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\lambda}$, c'est le développement du déterminant déduit de Δ en y remplaçant chaque élément de la première ligne par sa dérivée. De même l'ensemble des produits formés en remplaçant dans chaque terme du développement de Δ le deuxième facteur par sa dérivée est la somme $\Sigma(-1)^i a_{1\alpha} a'_{2\beta} \dots a_{n\lambda}$, c'est le développement du déterminant formé en remplaçant dans Δ chaque élément de la deuxième ligne par sa dérivée et ainsi de suite d'où la règle suivante :

La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants formés en remplaçant successivement dans le déterminant donné les éléments des diverses lignes (ou colonnes) par leurs dérivées.

6° Dérivée de $f(x) = \frac{1}{v(x)}$, $v(x)$ étant dérivable. — Nous supposons que, au point x_0 considéré, on a $v_0 \neq 0$, ce qui est nécessité par l'existence de y_0 .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \Delta y &= \frac{1}{v_0 + \Delta v} - \frac{1}{v_0} = -\frac{\Delta v}{v_0(v_0 + \Delta v)} \quad \text{et, puisque } \Delta x \neq 0, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{1}{v_0(v_0 + \Delta v)}. \end{aligned}$$

Il en résulte : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{v'_0}{v_0^2}$. Nous retiendrons :

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}} \quad (v \neq 0) \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0).$$

7° Dérivée du quotient de deux fonctions dérivables $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Nous supposons en outre que, au point x considéré, on a $v \neq 0$.

En regardant le quotient $\frac{u}{v}$ comme le produit des fonctions u et $\frac{1}{v}$ on a

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \cdot \left(\frac{1}{v}\right) + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2}. \quad \text{D'où}$$

THÉORÈME. — Si les deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables en un point x où la fonction v ne prend pas la valeur 0, la fonction $\frac{u(x)}{v(x)}$ admet au point x une dérivée égale à

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

8° Dérivée logarithmique. — **DÉFINITION.** — Si la fonction f est dérivable au point x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, le nombre $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ est dit dérivée logarithmique de la fonction f au point x_0 .

La raison de cette dénomination sera donnée au n° 93.

THÉORÈME. — La dérivée logarithmique d'un produit est égale à la somme des dérivées logarithmiques des facteurs.

En utilisant la formule qui donne la dérivée d'un produit on a en effet

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v},$$

relation qui s'étend par récurrence au cas d'un produit d'un nombre quelconque de facteurs.

THÉORÈME. — La dérivée logarithmique d'un quotient est l'excès de la dérivée logarithmique du dividende sur celle du diviseur.

En utilisant la formule qui donne la dérivée d'un quotient, on a en effet

$$\left(\frac{u}{v}\right)' : \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2} \cdot \frac{v}{u} = \frac{vu' - uv'}{uv} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.$$

9° Dérivée d'une fonction composée. — Le schéma est le suivant, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ étant respectivement des intervalles contenant les points x_0 et $u_0 = f(x_0)$:

$$\begin{array}{ccccc} x \in \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & u = f(x) \in \mathcal{E} & \xrightarrow{g} & y = g(u) \in \mathcal{F} \\ & & g \circ f = F & & \\ x \in \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \ominus & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & y = g[f(x)] \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Nous faisons ici les hypothèses suivantes :

(H₁) la fonction f admet au point x_0 la dérivée $f'(x_0)$,

(H₂) la fonction g admet au point $u_0 = f(x_0)$ la dérivée $g'(u_0)$.

Montrons alors que la fonction $F = g \circ f$ admet une dérivée au point x_0 .

Comme nous l'avons fait précédemment (n° 68, 5°), introduisons la fonction ε définie sur $\mathcal{E}$ par

$$\frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} = g'(u_0) + \varepsilon(u) \quad \text{si} \quad u \neq u_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(u_0) = 0.$$

Cette fonction est continue au point u_0 et on peut écrire, quel que soit $u \in \mathcal{E}$, y compris $u = u_0$

$$g(u) - g(u_0) = (u - u_0) [g'(u_0) + \varepsilon(u)].$$

Il en résulte qu'en tout point x de $\mathcal{C}$ distinct de x_0 on peut écrire l'égalité :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{u - u_0}{x - x_0} [g'(u_0) + \varepsilon(u)].$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u - u_0}{x - x_0} = f'(x_0);$$

d'autre part la continuité de u au point x_0 et celle de ε au point u_0 entraînent la continuité de la fonction $\varepsilon \circ u$ au point x_0 (n° 55) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon[u(x)] = 0.$$

Il en résulte que $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ admet, quand x tend vers x_0 , une limite égale à $f'(x_0) \times g'(u_0)$. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — Si les fonctions f et g admettent respectivement aux points x et $u = f(x)$ les dérivées $f'(x)$ et $g'(u)$, la fonction composée $F = g \circ f$ est dérivable au point x . Sa dérivée est

$$F'(x) = g'(u) \times f'(x).$$

GÉNÉRALISATION. — Soit

$$y = f_1(u_1), \quad u_1 = f_2(u_2), \quad u_2 = f_3(x).$$

Ces relations permettent de regarder successivement u_1 comme une fonction composée de x par l'intermédiaire de u_2 , et y comme une fonction composée de x par l'intermédiaire de u_1 et u_2 . En convenant de désigner par les notations y' et u'_1 les dérivées de y et u_1 considérées comme des fonctions de x , on a successivement

$$u'_1 = f'_2(u_2) \times f'_3(x)$$

et

$$y' = f'_1(u_1) \times f'_2(u_2) \times f'_3(x).$$

APPLICATION. — Si $f(x)$, fonction paire (resp. impaire), est dérivable sur $[-a, +a]$, $f'(x)$ est une fonction impaire (resp. paire).

$f(-x)$ s'écrit en effet $f(u)$, avec $u = -x$ et admet pour dérivée (par rapport à x) $f'(u) \times u'(x)$, c'est-à-dire $-f'(-x)$. Cela posé

$$\forall x, f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \forall x, f'(-x) = -f'(x)$$

$$\forall x, f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \forall x, f'(-x) = f'(x).$$

L'interprétation géométrique de cette propriété est immédiate.

APPLICATION AU CALCUL DES DIFFÉRENTIELLES. — La différentielle de la fonction F étudiée au début du 9°

$$x \xrightarrow{F} y = F(x) \quad \text{ou} \quad g[f(x)]$$

est $dy = F'(x)dx$, ou par application du théorème précédent,

$$dy = g'(u) \times f'(x) \times dx;$$

mais la différentielle de g est $du = f'(x) dx$,

en sorte qu'on peut écrire $dy = g'(u) du$.

Ainsi la formule : $dy = g'(u) du$ est valable

— si u est « variable indépendante »; du est alors l'élément générique de R ;

— si u est fonction d'une variable indépendante, soit $u = f(x)$; du est alors la différentielle de f au point x .

10° Dérivée d'une fonction réciproque. — Rappelons que, f étant une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ nous avons pu définir une fonction réciproque $g = f^{-1}$, continue et strictement monotone sur $[f(a), f(b)]$, suivant le schéma

$$y = f(x) \iff x = g(y); \quad x \in [a, b], \quad y \in [f(a), f(b)].$$

Donnons-nous un point y_0 de $[f(a), f(b)]$ et posons $x_0 = g(y_0)$; on a $y_0 = f(x_0)$. Nous supposons en outre que f admet au point x_0 la dérivée $f'(x_0) \neq 0$.

Reprenons la fonction ε définie par la formule (1) du n° 68, 5° :

$$(1) \quad f(x) - f(x_0) = (x - x_0) [f'(x_0) + \varepsilon(x)] \quad \text{si} \quad x \neq x_0; \quad \varepsilon(x_0) = 0.$$

ε est continue au point x_0 . Les fonctions f et g étant strictement monotones,

$$x \neq x_0 \iff y \neq y_0$$

en sorte que la relation (1) entraîne, pour tout $y \neq y_0$,

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \varepsilon[g(y)]}.$$

D'après la continuité de g au point y_0 , et celle de ε au point x_0 , la fonction $\varepsilon \circ g$ est continue au point y_0 (n° 55) :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varepsilon[g(y)] = 0.$$

La fonction réciproque f^{-1} admet au point y_0 la dérivée $\frac{1}{f'(x_0)}$.

THÉORÈME. — Si la fonction f continue et strictement monotone sur $[a, b]$ admet au point x de $[a, b]$ la dérivée $f'(x) \neq 0$, la fonction réciproque est dérivable au point $y = f(x)$; elle admet pour dérivée $\frac{1}{f'(x)}$.

71. Dérivée de x^m , pour m rationnel. — 1° **Dérivée de x^m , m étant un entier naturel.** — Cette fonction est définie sur $] - \infty, + \infty [$; une identité usuelle permet d'écrire

$$\frac{x^m - x_0^m}{x - x_0} = x^{m-1} + x_0 x^{m-2} + \dots + x_0^{m-1};$$

lorsque x tend vers x_0 , le second membre de l'égalité précédente admet la limite $m x_0^{m-1}$; par suite la fonction x^m (m naturel) a pour dérivée $m x^{m-1}$, résultat que nous avons déjà obtenu comme conséquence de la dérivation d'un produit.

2° **Dérivée de $\sqrt[q]{x}$ sur $[0, + \infty [$.** — La fonction $y = \sqrt[q]{x}$ est réciproque de $x = y^q$; sa dérivée est donc l'inverse de la dérivée de $x = y^q$, c'est-à-dire de $q y^{q-1}$, c'est donc

$$\frac{1}{q (\sqrt[q]{x})^{q-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{q x^{\frac{q-1}{q}}} \quad \text{ce qui s'écrit encore } \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}.$$

Or $\sqrt[q]{x} = x^m$, en posant $m = \frac{1}{q}$. La dérivée de la fonction x^m est donc encore donnée par la formule $m x^{m-1}$, quand m est l'inverse d'un entier naturel.

3° **Dérivée de la fonction $x^{\frac{p}{q}}$ sur $[0, + \infty [$.** — Quels que soient les entiers naturels p et q , la fonction $y = x^{\frac{p}{q}}$ est définie sur $[0, + \infty [$. On peut regarder cette fonction y comme la fonction composée formée en remplaçant u par x^p dans $y = \sqrt[q]{u}$.

La dérivée de la fonction y de la variable x peut donc s'obtenir en calculant la dérivée de y comme si u était la variable et multipliant le résultat par $p x^{p-1}$ dérivée de u , on trouve ainsi

$$y' = \frac{1}{q} u^{\frac{1}{q}-1} \times p x^{p-1} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{p}{q x} (x^p)^{\frac{1}{q}-1} x^p$$

ce qui est $\frac{p}{q x} (x^p)^{\frac{1}{q}-1}$. Finalement $y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$.

4° **Dérivée de la fonction $x^{\frac{p}{q}}$ sur $] - \infty, 0 [$.** Lorsque les entiers naturels p et q sont premiers entre eux et que q est impair, la fonction $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ est définie sur $] - \infty, + \infty [$. Sur $[0, + \infty [$, cette fonction admet pour dérivée

$$g(x) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

L'extension de ce résultat à $] - \infty, 0 [$ résultera de considérations de parité (9°).

Distinguons deux cas :

1° Si p est impair, $f(x)$ est une fonction impaire; $g(x)$ étant une fonction paire puisque $p - q$ est pair, est aussi la dérivée de $f(x)$ sur $] - \infty, 0 [$.

2° Si p est pair, $f(x)$ est une fonction paire; $g(x)$ étant une fonction impaire puisque $p - q$ est impair, est aussi la dérivée de $f(x)$ sur $] -\infty, 0]$.

En résumé, m étant un nombre rationnel positif, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction x^m est définie, elle admet pour dérivée mx^{m-1} .

5° Dérivée de x^m pour les valeurs rationnelles négatives de m . —

Soit $m = -\mu$ un nombre rationnel négatif, $x^m = \frac{1}{x^\mu}$. Pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction x^μ est définie, elle a une dérivée; par suite $\frac{1}{x^\mu}$ a pour dérivée $-\frac{\mu x^{\mu-1}}{x^{2\mu}}$ ou $-\frac{\mu}{x^{\mu+1}}$, qui est encore $-\mu x^{-\mu-1}$ ou enfin mx^{m-1} .

Pour toutes les valeurs rationnelles de m , la dérivée de x^m est mx^{m-1} .

Il en résulte que pour toutes les valeurs rationnelles de m , la fonction u^m admet pour dérivée $mu^{m-1}u'$. Nous retiendrons :

$$\forall m \text{ rationnel : } \boxed{(u^m)' = mu^{m-1}u'}$$

EXEMPLE : $(\sqrt{u})' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u' \quad \text{ou} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$

REMARQUE I. — Dans la pratique, au lieu d'utiliser la règle de dérivation de $\frac{1}{v}$ pour une fonction de la forme $\frac{1}{[f(x)]^p}$, il est préférable d'introduire un exposant négatif et d'écrire $[f(x)]^{-p}$ dont la dérivée est $\frac{-p}{[f(x)]^{p+1}}f'(x)$. Par exemple la dérivée de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{2}{x^3}$, celle de $\frac{1}{(x-a)^p}$ est $\frac{-p}{(x-a)^{p+1}}$.

REMARQUE II. — La dérivée logarithmique d'une puissance rationnelle de u est le produit de la dérivée logarithmique de u par l'exposant de la puissance. En effet

$$\frac{(u^m)'}{u^m} = \frac{mu'u^{m-1}}{u^m} \quad \text{ou} \quad m \frac{u'}{u}$$

Pour la pratique du calcul il est bon d'observer que la dérivée de

$$y = \frac{u^p}{v^q}$$

où u et v sont deux fonctions de x et p et q deux exposants rationnels, peut s'obtenir à partir de la dérivée logarithmique :

$$\frac{y'}{y} = p \frac{u'}{u} - q \frac{v'}{v}$$

d'où

$$y' = \frac{u^{p-1}}{v^{q+1}}(pu'v - qv'u).$$

EXEMPLE. — Calculer la dérivée de $y = \frac{x-5}{x+3} \sqrt{x^2+1}$. Écrivons

$$y = (x-5) \cdot (x+3)^{-1} \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}}; \text{ d'où la dérivée logarithmique de } y$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1};$$

par réduction au même dénominateur, $\frac{y'}{y} = \frac{x^3 + 6x^2 - 15x + 8}{(x-5)(x+3)(x^2+1)}$

et finalement $y' = \frac{(x-1)^2(x+8)}{(x+3)^3\sqrt{x^2+1}}.$

72. Dérivées des fonctions circulaires directes. — Les calculs suivants sont faits en supposant que x est exprimé en radians (1).

1° Dérivée de $\sin x$. — Cherchons si le rapport

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$$

admet une limite quand h tend vers 0. Ce rapport s'écrit

$$\frac{2 \sin \frac{h}{2} \times \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right).$$

h étant exprimé en radians (n° 41), le quotient de $\sin \frac{h}{2}$ par $\frac{h}{2}$ admet la limite 1 quand h tend vers 0; la fonction $\cos x$ étant continue au point x_0 , $\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$ admet la limite $\cos x_0$. D'où la conclusion, valable en tout point x ,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

2° Dérivée de $\cos x$. On a $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, ce qui permet d'écrire :

$$\cos x = \sin u \quad \text{avec} \quad u = x + \frac{\pi}{2}. \quad \text{D'où}$$

$$(\cos x)' = \cos u \times u' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \times 1 \quad \text{et, en tout point } x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

3° Dérivée de $\operatorname{tg} x$. — En regardant $\operatorname{tg} x$ comme le quotient de $\sin x$ par $\cos x$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

et, en tout point $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

ou

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(1) La dérivation de $\sin x$ et de $\cos x$ est une conséquence du n° 41; voir à la fin de l'ouvrage un exposé de pure analyse (n° 276 et la suite).

4° **Dérivée de $\cot x$.** — Un calcul analogue montre qu'en tout point $x \neq k\pi$

$$(\cot x)' = -1 - \cot^2 x$$

ou

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

REMARQUE. — Soit x la mesure d'un arc en degrés, si u est la mesure du même arc en radians $u = \frac{\pi x}{180}$; la dérivée de $\sin u$ par rapport à u serait $\cos u$, sa dérivée par rapport à x est donc $\frac{\pi}{180} \cos u$ ou $\frac{\pi}{180} \cos x$.

73. Dérivées des fonctions circulaires réciproques.

1° **Dérivée de Arc sin x .** — Rappelons :

$$\left. \begin{array}{l} y = \text{Arc sin } x \\ |x| \leq 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \sin y \\ |y| \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

La dérivée de la fonction $x = \sin y$ étant $\cos y$, celle de la fonction réciproque est $y' = \frac{1}{\cos y}$, sous réserve que $\cos y \neq 0$ c'est-à-dire que $x \neq \pm 1$.

On a $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$ et, en tenant compte de ce que $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ entraîne $\cos y \geq 0$, $\cos y = +\sqrt{1-x^2}$. Finalement en tout point x de $] -1, +1[$ on a

$$(\text{Arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

REMARQUE. — Les déterminations de la fonction $y = \text{arc sin } x$ données par la formule $\text{Arc sin } x + 2k\pi$ ont pour dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, celles qui sont données par la formule $\pi - \text{Arc sin } x + 2k\pi$ ont pour dérivée $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2° **Dérivée de Arc cos x .** — Les fonctions Arc sin et Arc cos sont définies sur le même segment $[-1, +1]$. Elles sont liées par la relation (n° 64, 2°)

$$\text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x$$

Il résulte du 1° que, en tout point x de $] -1, +1[$ on a

$$(\text{Arc cos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

REMARQUE. — Les déterminations de la fonction arc cos x qui sont données par la formule $\text{Arc cos } x + 2k\pi$ ont pour dérivée $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, celles qui sont données par la formule $-\text{Arc cos } x + 2k\pi$ ont pour dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3° **Dérivée de Arc tg x.** — Rappelons :

$$y = \text{Arc tg } x \iff \begin{cases} x = \text{tg } y \\ |y| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La dérivée de la fonction $x = \text{tg } y$ étant $1 + \text{tg}^2 y$, celle de la fonction réciproque est $y' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y}$. Ainsi, pour toute valeur de x ,

$$(\text{Arc tg } x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

REMARQUE. — Toutes les déterminations de la fonction $\text{arc tg } x$ s'obtiennent en ajoutant à $\text{Arc tg } x$ les divers multiples de π , leurs dérivées sont égales à celle de $\text{Arc tg } x$.

4° **Dérivée de Arc cot x.** — De ce que, sur $] -\infty, +\infty [$ on a (n° 66)

$$\text{Arc cot } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } x$$

on déduit que, pour toute valeur de x ,

$$(\text{Arc cot } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

5° EXERCICE. — *Dérivée de la fonction $y = \text{Arc sin} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$ étudiée au n° 67.* Cette fonction est définie quel que soit x . Elle s'écrit $y = \text{Arc sin } u$; $u = \frac{2x}{1+x^2}$.

La règle de la dérivation d'une fonction composée donne $y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times u'$. On trouve, pour $x \neq \pm 1$,

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} \quad \text{soit :}$$

$$y' = \frac{2}{1+x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \quad \text{et} \quad y' = -\frac{2}{1+x^2} \quad \text{si } |x| > 1.$$

Aux points $x = \pm 1$ il y a dérivée à droite et dérivée à gauche, mais pas de dérivée.

Notons que y' se calcule plus rapidement en utilisant l'expression de y en fonction de $\text{Arc tg } x$ trouvée au n° 67.

III. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

74. *Dérivées successives des fonctions usuelles.*

1° $f(x) = \sin(ax + b)$. On a $f(x) = \sin u$ avec $u = ax + b$. D'où :

$$f'(x) = \cos u \times u' = \cos(ax + b) \times a \quad \text{qui s'écrit} \quad f'(x) = a \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{On en déduit : } [\sin(ax + b)]^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + n\frac{\pi}{2}\right).$$

2° $f(x) = \cos(ax + b)$. De la même façon

$$f'(x) = -a \sin(ax + b) = a \cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{et} \quad [\cos(ax + b)]^{(n)} = a^n \cos\left(ax + b + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$3^\circ f(x) = (x + a)^\alpha, \alpha \text{ rationnel. } f'(x) = \alpha(x + a)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(x + a)^{\alpha-2}, \dots$$

$$f^{(p)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-p+1)(x + a)^{\alpha-p}.$$

$$\text{Cas de } \alpha = m \text{ (} m \text{ entier naturel). Si } p \leq m \text{ on a } f^{(p)}(x) = \frac{m!}{(m-p)!} (x + a)^{m-p}.$$

$$\text{Si } p > m \text{ on a } f^{(p)}(x) = 0.$$

$$\text{Cas de } \alpha = -m \text{ (} m \text{ entier naturel). } f^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{(m+p-1)!}{(m-1)!} \frac{1}{(x + a)^{m+p}},$$

quel que soit p .

4° *Fraction rationnelle.* — On commence à décomposer la fraction rationnelle en éléments simples de première espèce, en ne faisant aucune différence entre les pôles réels et les pôles complexes (cf. I, n° 119).

Le calcul des dérivées successives de la partie entière (polynôme) et des éléments de la forme $\frac{A}{(x + a)^m}$, a réel, est une application de ce qui vient d'être vu au 3°.

Avec $\frac{A}{(x + a)^m}$, a complexe, nous sommes en présence d'une fonction complexe de la variable réelle. La définition et le calcul des dérivées de telles fonctions seront traités au n° 156 (le résultat trouvé au 3° reste valable).

75. *Dérivées successives d'un produit de 2 facteurs.* — En utilisant la règle qui donne la dérivée du produit de deux fonctions on trouve successivement :

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv'; & (uv)'' &= u''v + 2u'v' + uv''; \\ (uv)''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''. \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant le raisonnement par récurrence,

$$(uv)^{(n)} = \sum_{p=0}^n A_p u^{(p)} v^{(n-p)}$$

formule dans laquelle les coefficients A_p sont indépendants des fonctions u et v (on a posé $u = u^{(0)}$ et $v = v^{(0)}$ pour harmoniser les notations).

Pour calculer le coefficient A_q correspondant à une valeur donnée de l'entier q , entre 0 et n , choisissons les fonctions suivantes :

$$u = x^q, \quad v = x^{n-q} \text{ ce qui entraîne } uv = x^n.$$

Il en résulte

$$n! = \sum_{p=0}^n A_p (x^q)^{(p)} (x^{n-q})^{(n-p)}.$$

Si $p > q$ on a $(x^q)^{(p)} = 0$; si $n - p > n - q$ on a $(x^{n-q})^{(n-p)} = 0$. Au

second membre un seul terme de la somme n'est pas nul, celui qui correspond à $p = q$. D'où

$$n! = A_q q! (n - q)! \quad \text{et} \quad A_q = \frac{n!}{q! (n - q)!} = C_n^q = C_n^{n-q}.$$

Finalement on obtient la formule, attribuée à Leibniz

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \dots + C_n^q u^{(n-q)}v^{(q)} + \dots + C_n^{q-1} u'v^{(n-1)} + C_n^n uv^{(n)}.$$

REMARQUE. — A titre d'exercice le lecteur pourra généraliser ce calcul. Il obtiendra

$$(uvw)^{(n)} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!} u^{(\alpha)} v^{(\beta)} w^{(\gamma)},$$

la somme Σ étant étendue à tous les triplets (α, β, γ) d'entiers positifs ou nuls de somme n .

IV. THÉORÈME DE ROLLE

76. Théorème de Rolle. — 1° *Énoncé et Démonstration.* — Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$. On suppose que f est continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$. Dans ces conditions il existe au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Si f est constante sur $[a, b]$, elle admet en tout point de $[a, b]$ une dérivée égale à 0 et le théorème est démontré.

Si f n'est pas constante, elle admet, du fait de sa continuité sur le segment $[a, b]$, une borne supérieure M et une borne inférieure m dont l'une au moins n'est pas égale à $f(a) = f(b)$. Supposons, pour fixer les idées, $m < f(a)$. Nous savons que, toujours du fait de la continuité de f sur le segment $[a, b]$, la borne m est atteinte en au moins un point c de $[a, b]$.

$f(c) = m$ entraîne $f(c) \neq f(a)$ et $f(c) \neq f(b)$; c est donc un point de l'intervalle $]a, b[$ et, d'après la deuxième partie de l'hypothèse, $f'(c)$ existe. Autrement dit le rapport

$$\varphi(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

admet la limite $f'(c)$ quand h tend vers 0, et par conséquent (n° 41) d'une part quand h tend vers $+0$, d'autre part quand h tend vers -0 .

Sous réserve que $|h| \leq \sup(|c-a|, |b-c|)$, c'est-à-dire que $c+h$ soit un point de $[a, b]$, on a

$$f(c+h) - f(c) = f(c+h) - m \geq 0.$$

Si en outre h est positif on a $\varphi(h) \geq 0$, ce qui entraîne (n° 41).

$$(1) \quad f'(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \varphi(h) \geq 0.$$

Si en outre h est négatif on a $\varphi(h) \leq 0$, ce qui entraîne

$$(2) \quad f'(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \varphi(h) \leq 0.$$

Des inégalités (1) et (2) on déduit $f'(c) = 0$.

CAS PARTICULIER. — Si $f(a) = f(b) = 0$ le théorème de Rolle s'énonce :

Entre deux zéros de la fonction f dérivable il existe au moins un zéro de la fonction dérivée f' .

2° **Interprétation graphique du théorème de Rolle.** — Sur l'arc AB qui représente $y = f(x)$ (fig. 28) il existe au moins un point C, distinct de A et B, où la courbe admet une tangente parallèle à la droite AB.

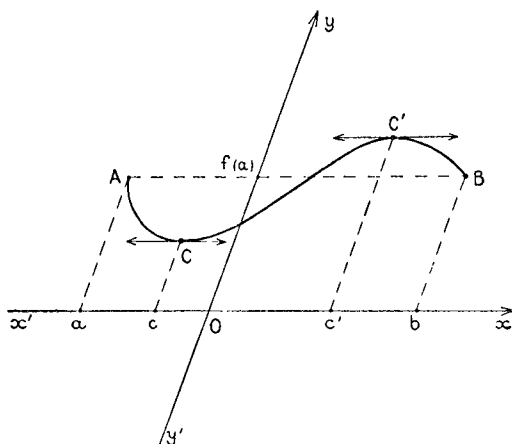


FIG. 28

Les figures 29 et 30 font comprendre la nécessité des hypothèses. Il s'agit des fonctions $|x|$ et $\sqrt{|x|}$ étudiées sur $[-1, +1]$, segment sur lequel elles sont continues. Elles admettent la borne inférieure $m = 0$, atteinte au point $c = 0$. Le fait que le théorème ne s'applique pas provient de ce que $f'(c)$ n'existe pas (bien que, dans le cas de la fonction $|x|$, il y ait au point c une dérivée à droite et une dérivée à gauche).

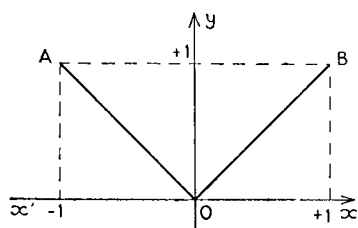


FIG. 29.

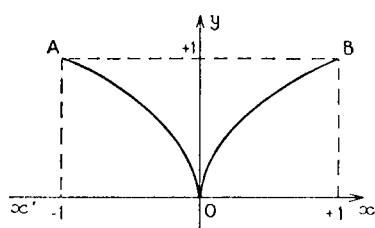


FIG. 30.

3° ***GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE ROLLE.** — Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers $+\infty$. Dans ces conditions il existe au moins un point c de $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Si f est constante sur $[a, +\infty[$ le théorème est démontré. Sinon il existe au moins un point x_1 de $]a, +\infty[$ tel que $f(x_1) \neq f(a)$. Désignons par k un nombre quelconque de l'intervalle $]f(a), f(x_1)[$. La valeur k est atteinte par f en au moins un point a_1 de $[a, x_1]$ et plus précisément de $]a, x_1[$. Par ailleurs, du fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$ on déduit, en choi-

sisant $\epsilon = |k - f(a)|$, qu'il existe un nombre x_2 fixe (supérieur à x_1) tel que $x > x_2$ entraîne

$$|f(x) - f(a)| < |k - f(a)|.$$

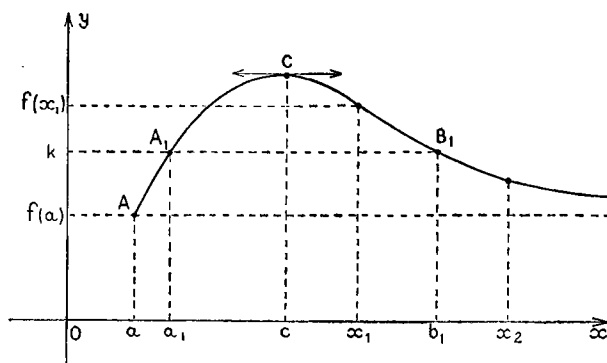


FIG. 31.

Il en résulte que k est un point de l'intervalle $]f(x_1), f(x_2)[$ et que la valeur k est atteinte par f en au moins un point b_1 de $]x_1, x_2[$. On a alors

$$f(a_1) = f(b_1) = k,$$

et il suffit d'appliquer le théorème de Rolle au segment $[a_1, b_1]$. La figure 31 fournit une interprétation graphique; pour fixer les idées on a supposé $f(x_1) > f(a)$.

77. Théorème des accroissements finis. — 1° Énoncé et Démonstration. — Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Il existe au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que :

$$(1) \quad \boxed{f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).}$$

Définissons le nombre A par l'égalité

$$(2) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = A,$$

et considérons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - A(x - a).$$

Comme la fonction f , la fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $\varphi(b) = 0$ d'après l'égalité (2), et manifestement $\varphi(a) = 0$. Le théorème de Rolle est applicable à la fonction φ . Il existe au moins un point c de $]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(x) = f'(x) - A$$

$\varphi'(c) = 0$ s'écrit $f'(c) = A$. En remplaçant A par $f'(c)$ dans l'égalité (2) on obtient la formule (1).

Autre écriture : $c \in]a, b[$ équivaut à $0 < \frac{c-a}{b-a} < 1$ ou

$$c - a = \theta (b - a) \quad \text{avec} \quad \theta \in]0, 1[.$$

Si nous posons $b = a + h$, la formule (1) prend la forme

$$(3) \quad f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

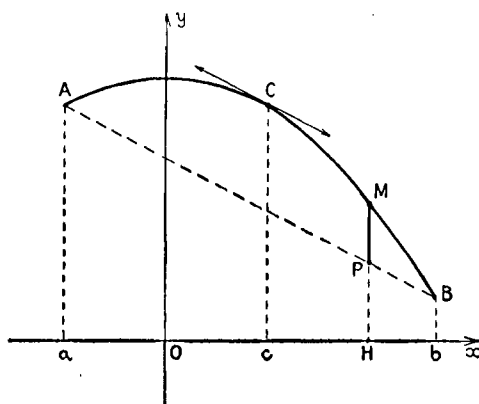


FIG. 32.

Cette formule est connue sous le nom de *formule des accroissements finis*.

2° Interprétation graphique du théorème des accroissements finis. — Elle ne diffère pas de celle du théorème de Rolle : sur l'arc AB qui représente $y = f(x)$ (fig. 32), il existe au moins un point C, distinct de A et B, où la courbe admet une tangente parallèle à la droite AB. La démonstration a d'ailleurs été inspirée par cette

interprétation car la fonction auxiliaire n'est autre que :

$$\varphi(x) = f(x) - [f(a) + A(x - a)] = \overline{HM} - \overline{HP} = \overline{PM}.$$

3° Application à une question de limite et de tangente. — **THÉORÈME.** — Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, avec $a < b$. Si $f'(x)$ admet une limite l quand x tend vers a à droite (resp. vers b à gauche) la fonction f admet une dérivée à droite au point a (resp. à gauche au point b). Cette dérivée est égale à l .

Le théorème des accroissements finis est applicable à la fonction f sur $[a, x]$, x étant un point quelconque de $]a, b[$. Il s'écrit :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(X) \quad \text{avec} \quad X \in]a, x[.$$

Quand $x \rightarrow a + 0$, $X \rightarrow a + 0$, $f'(X) \rightarrow l$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow l$. D'où le théorème ci-dessus, dont l'interprétation géométrique est la suivante :

Si une courbe admet une tangente MT en tout point M d'un arc AB distinct des extrémités A et B et si la droite MT admet une position limite quand M tend vers A (resp. vers B) celle-ci est demi-tangente à la courbe en A (resp. en B).

REMARQUE. — La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie. Montrons-le par

le contre-exemple de la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| < |x|$ montre que la fonction admet au point $a = 0$ une dérivée égale à 0. D'autre part, en tout point $x \neq 0$, la fonction admet la dérivée

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

On constate que $f'(x)$ n'admet pas de limite quand $x \rightarrow +0$, ni quand $x \rightarrow -0$.

4^o Application aux erreurs. — Si le calcul de la valeur numérique d'une fonction $f(x)$ pour la valeur $a + h$ de la variable est plus difficile que le calcul de $f(a)$ et si, pour le but que l'on se propose, il suffit de connaître une valeur approchée de $f(a + h)$, la formule des accroissements finis donne un moyen d'évaluer un majorant de l'erreur que l'on commet en prenant $f(a)$ pour valeur approchée de $f(a + h)$. Si en effet on sait déterminer un majorant M de $|f'(x)|$ sur $[a, a + h]$ la formule montre que l'on a

$$|f(a + h) - f(a)| < M|h|.$$

Des applications seront données dans le chapitre XX consacré au Calcul numérique.

78. Généralisation du théorème des accroissements finis. —

1^o THÉORÈME. — Si f, g, h sont trois fonctions continues sur le segment $[a, b]$ et dérivables sur l'intervalle $]a, b[$, il existe au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

Considérons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{vmatrix}$$

On a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

D'autre part la fonction φ , combinaison linéaire des fonctions f, g, h , est comme celles-ci, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Le théorème de Rolle est applicable. Il existe au moins un point c tel que $\varphi'(c) = 0$. Or (n^o 70, 5^o)

$$\varphi'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix}$$

En écrivant $\varphi'(c) = 0$ on obtient la formule (1).

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. — Nous montrerons dans le tome IV que les relations

$$X = f(u), \quad Y = g(u), \quad Z = h(u), \quad \text{avec} \quad u \in [a, b]$$

définissent un arc de courbe gauche AB et que, au point courant M (X, Y, Z) de cet arc, il existe une tangente qui porte le vecteur de composantes $f'(u)$, $g'(u)$, $h'(u)$.

La relation (1) exprime que la tangente en C à l'arc et les droites OA, OB sont coplanaires; il existe donc au moins un point C de l'arc de courbe gauche AB, distinct des extrémités, où la tangente à la courbe est parallèle au plan AOB et plus généralement à tout plan passant par la droite AB. On se gardera d'en conclure qu'il existe forcément un point de l'arc où la tangente est parallèle à la droite AB.

2° Formule des accroissements finis généralisée. — Dans le cas particulier où la fonction h est une constante non nulle, par exemple $h(x) = 1$, la relation (1) devient

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

En retranchant les éléments de la première colonne des éléments homologues de la deuxième, puis en développant suivant la dernière ligne on obtient :

$$(2) \quad \begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$$

formule valable pour deux fonctions f et g continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. En supposant en outre qu'il n'existe aucun point de $[a, b]$ pour lequel $f'(x)$ et $g'(x)$ sont simultanément nuls on obtient :

$$(3) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

qui s'écrit, en posant comme plus haut $b - a = h$,

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{g(a + h) - g(a)} = \frac{f'(a + \theta h)}{g'(a + \theta h)} \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

La formule (3) est dite *formule des accroissements finis généralisée*.

On notera que la proposition n'est qu'une traduction analytique nouvelle du fait que sur l'arc de courbe plane AB défini par

$$X = f(u), \quad Y = g(u) \quad \text{avec} \quad u \in [a, b]$$

il existe un point C où la tangente est parallèle à la droite AB.

3° Application à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: règle de l'Hôpital. —

THÉORÈME. f et g étant deux fonctions continues sur un voisinage $\mathcal{C}$ de a , dérivables sur $\mathcal{C}$, sauf peut-être au point a , et telles que $f(a) = g(a) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (\text{fini ou infini}) \quad \text{entraîne} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

En effet x étant un point quelconque de $\mathcal{C}$, autre que a , la formule des

accroissements finis généralisée appliquée sur $[a, x]$ donne

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}; \quad \xi \in]a, x[.$$

On a $\lim_{x \rightarrow a} \xi = a$ ce qui entraîne $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l$. Compte tenu de $f(a) = g(a) = 0$, la proposition en résulte.

REMARQUE. — Le contre-exemple suivant montre que la réciproque du théorème précédent est fausse. Soit :

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0; \quad g(x) = \sin x; \quad a = 0.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \sim x \sin \frac{1}{x} \quad \text{admet la limite 0 quand } x \rightarrow 0$$

alors que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\cos x} \left[2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right] \quad \text{n'admet pas de limite quand } x \rightarrow 0.$$

V. FORMULE DE TAYLOR

79. Formule de Taylor-Lagrange. — 1° Nous avons démontré dans le cours d'algèbre (I, n° 109) que si f est un polynôme sur le corps des réels, de degré inférieur ou égal à n , la différence

$$f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

est égale à 0 quels que soient a et b . Nous nous proposons de trouver une expression de cette différence quand f est une fonction réelle de la variable réelle qui est définie et continue sur le segment $[a, b]$, et y admet des dérivées $f', f'', \dots, f^{(n)}$ continues.

Définissons le nombre A par l'égalité

$$(1) \quad f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) - \dots \\ \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

et considérons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - A \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cette fonction φ prend la valeur 0 au point $x = b$ d'après l'égalité (1) qui définit A . Elle prend manifestement la valeur 0 au point $x = a$. Elle est de

plus continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, car c'est une somme de fonctions ayant ces diverses propriétés. Il existe donc un point x_1 de $]a, b[$ tel que $\varphi'(x_1) = 0$. Or

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{x-a}{1!} f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(a) - \dots \\ \dots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a) - \frac{\Lambda(x-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

La fonction φ' s'annule pour x_1 et pour a , de plus elle remplit les autres conditions qui permettent de lui appliquer le théorème de Rolle, il existe donc un nombre x_2 de $]a, x_1[$ tel que $\varphi''(x_2) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} \varphi''(x) = f''(x) - f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^{p-2}}{(p-2)!} f^{(p)}(a) - \dots \\ \dots - \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(a) - \frac{\Lambda(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

En continuant ainsi on arrive à montrer qu'il existe un point x_n de $]a, x_{n-1}[$, et *a fortiori* de $]a, b[$, tel que $\varphi^{(n)}(x_n) = 0$, avec

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - \Lambda(x-a).$$

En plus des hypothèses énoncées au début (continuité de $f, f', \dots, f^{(n)}$ sur $[a, b]$), supposons que f admette une dérivée d'ordre $n+1$, $f^{(n+1)}$, définie sur $]a, b[$. Comme manifestement $\varphi^{(n)}(a) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction $\varphi^{(n)}$ sur $[a, x_n]$. Il existe au moins un point c de $]a, x_n[$ et *a fortiori* de $]a, b[$ tel que $\varphi^{(n)}(c) = 0$, ce qui s'écrit $0 = f^{(n+1)}(c) - \Lambda$, et fournit une expression de Λ . Énonçons le résultat de cette étude :

THÉORÈME. — Si une fonction f définie sur le segment $[a, b]$ admet des dérivées $f', f'', \dots, f^{(n)}$ continues sur ce segment et une dérivée d'ordre $n+1$ définie sur l'intervalle $]a, b[$, il existe au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$(2) \quad \boxed{f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).}$$

Telle est la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$.

On dit que $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est le *reste de Lagrange*.

En posant $b = a + h$ et $c = a + \theta h$ avec $0 < \theta < 1$, on obtient

$$(3) \quad \boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h).}$$

Pour $n = 0$ on reconnaît la formule des accroissements finis.

2° Formule de Mac-Laurin. — En remplaçant dans la formule (3) a par 0 et h par x on constate que si $f, f', \dots, f^{(n)}$ sont continues sur $[0, x]$ et si $f^{(n+1)}$ est définie sur $]0, x[$, il existe au moins un nombre θ de $]0, 1[$ tel que :

$$(4) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

Telle est la formule de Mac-Laurin à l'ordre $n + 1$, avec reste de Lagrange.

3° Application aux erreurs. — Cette étude sera faite dans le chapitre XX consacré au Calcul numérique.

80. Développement de Taylor-Young d'une fonction f au voisinage d'un point a . — Reprenons le calcul du n° 79 avec les mêmes hypothèses initiales, à savoir la continuité de $f, f', \dots, f^{(n)}$ sur $[a, b]$ auxquelles nous ajouterons cette fois non plus l'existence de $f^{(n+1)}$ sur $]a, b[$, mais seulement l'existence du nombre $f^{(n+1)}(a)$, ce qui est visiblement plus restrictif.

Dans l'égalité (1) du n° 79 remplaçons b par un nombre quelconque x de $]a, b[$. Nous définissons ainsi un nombre A qui dépend naturellement de x . Le calcul précédent nous permet d'associer à tout $x \in]a, b[$ un point x_n de $]a, x[$ tel que $\varphi^{(n)}(x_n) = 0$, ce qui s'écrit

$$f^{(n)}(x_n) - f^{(n)}(a) - A(x_n - a) = 0$$

et, comme $x_n - a \neq 0$,

$$A = \frac{f^{(n)}(x_n) - f^{(n)}(a)}{x_n - a},$$

relation dans laquelle A et x_n sont des fonctions de x .

En tenant compte de l'hypothèse sur l'existence de $f^{(n+1)}(a)$, il en résulte que quand x , et *a fortiori* x_n , tend vers a sur $[a, b]$ la fonction $A(x)$ admet la limite $f^{(n+1)}(a)$ ce qui montre que la fonction ε définie sur $]a, b[$ par

$$A(x) = f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x)$$

tend vers 0 quand x tend vers a . Nous énoncerons :

THÉORÈME. — Si une fonction f définie sur le segment $[a, b]$ est dérivable jusqu'à l'ordre n sur ce segment et admet au point a une dérivée d'ordre $n + 1$, la relation

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

définit sur $]a, b[$ une fonction $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers a .

Le second membre de cette relation s'appelle le développement de Taylor-Young de la fonction f au voisinage du point a et à l'ordre $n + 1$. Il comprend une *partie régulière* qui est un polynôme en $x - a$, de degré $n + 1$, et un *terme complémentaire* $\varepsilon(x)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ qui est dit *reste de Young*.

Dans le cas particulier de $\alpha = 0$ on obtient la formule de Mac-Laurin à l'ordre $n + 1$, avec reste de Young, très usitée dans les applications :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \epsilon(x).$$

Le lecteur peut d'ores et déjà écrire cette formule pour les fonctions $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Il pourra vérifier les résultats obtenus en se reportant au n° 116.

REMARQUE. — Il y a lieu de noter dès maintenant une différence fondamentale entre les deux aspects de la formule de Taylor. Le développement de Taylor-Young est essentiellement local; il interviendra par la suite lors de l'étude d'une fonction au voisinage d'un point (développement limité, concavité locale, ordre de multiplicité d'un zéro...). La formule de Taylor-Lagrange, et en particulier celle des accroissements finis, seront utilisées d'une part dans le calcul numérique, d'autre part dans l'étude globale d'une fonction (sens de variation et concavité sur un intervalle).

VI. APPLICATION DU CALCUL DES DÉRIVÉES A L'ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS

81. Utilisation du signe de la dérivée. — 1° **Généralités.** — Rappelons qu'étudier la variation d'une fonction, c'est partager si possible les intervalles sur lesquels cette fonction est définie en intervalles partiels sur lesquels elle est monotone. Quand l'examen de la fonction ne permet pas de résoudre cette question, on se ramène à l'étude du signe de la dérivée au moyen des théorèmes suivants. Avant de les énoncer, rappelons également que si une fonction f est croissante sur un intervalle, quels que soient les nombres x et x' de cet intervalle

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} > 0.$$

Si x restant fixe, x' tend vers x et si la fonction f admet une dérivée au point x , l'inégalité précédente exige que cette dérivée soit positive ou égale à 0. On reconnaît de même que si une fonction est décroissante sur un intervalle et admet une dérivée en un point de cet intervalle, cette dérivée est négative ou égale à 0. Rappelons enfin que si une fonction est constante sur un intervalle, elle admet une dérivée égale à 0 en tout point de cet intervalle.

Nous allons maintenant, par application du théorème des accroissements finis, donner le sens de la variation d'une fonction dont on sait que la dérivée est, soit égale à 0, soit d'un signe déterminé.

2° THÉORÈME I. — Si une fonction f définie sur un intervalle $\mathcal{J}$ admet en tout point de $\mathcal{J}$ une dérivée égale à 0, la fonction est constante sur $\mathcal{J}$.

Choisissons un point fixe quelconque x_0 de $\mathcal{J}$. Quel que soit $x \in \mathcal{J}$ nous savons, d'après le théorème des accroissements finis, qu'il existe au moins

un point $\xi \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi).$$

D'après l'hypothèse $f'(\xi) = 0 \implies f(x) = f(x_0), \quad \forall x \in \mathcal{J}$.

COROLLAIRE I. — Si deux fonctions f et g définies sur un même intervalle $\mathcal{J}$ ont la même dérivée en tout point de $\mathcal{J}$, leur différence est constante sur $\mathcal{J}$.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $f - g$; cette fonction, admettant une dérivée égale à 0 en tout point de $\mathcal{J}$, est constante sur $\mathcal{J}$.

COROLLAIRE II. — Si deux fonctions f et g définies sur un même intervalle $\mathcal{J}$ ont la même dérivée logarithmique en tout point de $\mathcal{J}$, leur quotient est constant sur $\mathcal{J}$.

Par hypothèse, $\forall x \in \mathcal{J}$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad (\text{n}^\circ 70, 8^\circ).$$

L'hypothèse entraîne que f et g ne prennent la valeur 0 en aucun point de $\mathcal{J}$; par suite la fonction $z = \frac{f}{g}$ est définie et dérivable sur $\mathcal{J}$; la dérivée $z' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$ a pour valeur 0 en tout point de $\mathcal{J}$; z est donc constante sur $\mathcal{J}$; en d'autres termes, il existe une constante k telle que, sur $\mathcal{J}$, $f = kg$.

REMARQUE. — Si l'on donne deux fonctions f et g , définies, continues et dérivables sur $[a, b]$ et telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad gf' - fg' = 0,$$

on fera attention que la fonction $z = \frac{f}{g}$ n'est continue et dérivable que sur chaque sous-intervalle de $[a, b]$ où g ne prend pas la valeur 0.

Supposons, par exemple que, sur $[a, b]$, il existe une valeur x_0 , et une seule pour laquelle $g(x_0) = 0$.

Sur $[a, x_0[$, le rapport $\frac{f}{g}$ est dérivable, a une dérivée nulle, et par suite $\frac{f}{g}$ a une valeur constante, soit k_1 ;

Sur $]x_0, b]$, le rapport $\frac{f}{g}$ est dérivable, a une dérivée nulle, et par suite $\frac{f}{g}$ a une valeur constante k_2 , dont rien n'impose *a priori* qu'elle soit égale à k_1

$$\text{sur } [a, x_0[\quad f = k_1 g$$

$$\text{sur }]x_0, b] \quad f = k_2 g.$$

La continuité de f pour x_0 nécessite alors $f(x_0) = 0$. L'égalité des dérivées à droite et à gauche de f au point x_0 , qui sont les limites respectives de $k_2 \frac{g(x)}{x - x_0}$ et $k_1 \frac{g(x)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0 nécessite $k_1 = k_2$, sauf si $g'(x_0) = 0$.

3° THÉORÈME II. — Si une fonction f définie sur un intervalle $\mathcal{J}$ admet en tout point de $\mathcal{J}$ une dérivée non négative (resp. non positive) elle est croissante (resp. décroissante) au sens large sur $\mathcal{J}$.

Nous allons nous borner à faire la démonstration dans le cas où $f'(x) \geq 0$.

Soient x' et x'' deux points quelconques de $\mathfrak{J}$, x'' étant le plus grand des deux. D'après le théorème des accroissements finis, il existe au moins un point $\xi \in]x', x''[$ tel que

$$f(x'') - f(x') = (x'' - x') f'(\xi).$$

D'après l'hypothèse, $f'(\xi)$ n'est pas négatif et par suite on a

$$f(x'') \geq f(x'),$$

ce qui démontre la proposition.

REMARQUE. — Si on a $f'(x) \geq 0$ en tout point de $\mathfrak{J}$ et s'il n'existe pas de sous-intervalle de $\mathfrak{J}$ sur lequel $f'(x) = 0$ on peut préciser que la fonction f est croissante au sens strict sur $\mathfrak{J}$.

Reprenons la démonstration du théorème II et démontrons que l'égalité $f(x') = f(x'')$ est impossible. Du fait que nous savons maintenant que la fonction f est croissante au sens large sur $[x', x'']$ cette égalité impliquerait que $f(x)$ est constante sur ce segment; on aurait $f'(x) = 0$ en tout point x de $[x', x'']$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

EXERCICES

1. — Calculer les dérivées des fonctions :

$$\begin{aligned} & \text{Arc tg } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad (2x-3)\sqrt{(x-1)^3}; \quad \frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x} \\ & x^2 + (\text{Arc sin } x)^2 - 2x\sqrt{1-x^2} \text{Arc sin } x; \quad 3x + \left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right) \sin 2x. \end{aligned}$$

2. — Calculer les dérivées des fonctions :

$$\text{Arc tg } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{Arc cos } \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2 \text{Arc tg } x; \quad \text{Arc sin } (2x\sqrt{1-x^2})$$

et expliquer les résultats trouvés.

3. — Constater que, sous certaines réserves, les fonctions

$$\text{Arc tg } \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sin x}{b + a \cos x}, \quad 2 \text{Arc tg } \left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{tg } \frac{x}{2} \right) \quad \text{et} \quad \text{Arc cos } \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$$

ont même dérivée et expliquer pourquoi.

4*. — Calculer la dérivée d'ordre n de chacune des fonctions

$$e^x \sqrt[3]{\sin x}; \quad \frac{1}{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}; \quad \frac{1}{a^2 + b^2 x^2}; \quad x^{n-1} \text{Log}(1+x).$$

5*. — Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions $\frac{1}{x^2-1}$ et $\frac{1}{x^2+1}$; trouver les zéros de ces dérivées.

6*. — Démontrer que la dérivée d'ordre n de la fonction $x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$ est $(-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$.

7*. — La dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$ est un polynôme y qui est lié à ses deux premières dérivées par la relation

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

Les zéros de ce polynôme sont réels, distincts et compris entre -1 et $+1$.

8*. — Les fonctions

$$A \operatorname{Log} |x-a| + B \operatorname{Log} |x-b| + M \operatorname{Log} |x-m| + P \\ A e^{ax} + B e^{bx} + \dots + M e^{mx} + P$$

$A \cos ax + A' \sin ax + B \cos bx + B' \sin bx + \dots + M \cos mx + M' \sin mx + P$ dans lesquelles x est la seule variable ne peuvent s'annuler pour toutes les valeurs d'un intervalle que si les constantes $A, B, \dots, M, A', B', \dots, M', P$ sont toutes nulles.

9*. — La dérivée d'ordre n de $e^{(x)}$ est le produit de cette fonction par un polynôme de degré n , $P_n(x)$ qui est une fonction paire ou impaire.

a) Écrire la relation (I) qui donne P_{n+1} connaissant $P_n(x)$ et $P'_n(x)$;

b) Trouver une relation (II) entre P_{n+1} , P_n et P_{n-1} en appliquant la formule de Leibniz au produit $2xy = y'$;

c) Dédire des relations (I) et (II) une relation entre $P'_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ et établir l'égalité

$$P''_n(x) + 2xP'_n(x) - 2nP_n(x) = 0.$$

d) Utiliser cette égalité pour calculer les coefficients de $P_n(x)$.

10*. — La dérivée d'ordre n de $e^{\frac{1}{x}}$ peut s'écrire $\frac{e^{\frac{1}{x}} P_{n-1}(x)}{x^{2n}}$ et celle de $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$, $\frac{Q_{n-1}(x)}{(x^2+1)^n}$

$P_{n-1}(x)$ et $Q_{n-1}(x)$ étant des polynômes de degré $n-1$, le deuxième étant une fonction paire ou impaire. La méthode indiquée pour l'exercice précédent permet de calculer les coefficients de ces polynômes.

11*. — Trouver toutes les fonctions f qui sont dérivables et qui vérifient, pour tout couple de nombres (x, y) la relation

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

12*. — Étant donnés les fonctions f, g et le nombre a , chacune des égalités :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h); \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)};$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

définissent une fonction θ de la variable h .

Chercher si cette fonction admet une limite quand h tend vers 0.

13*. f étant une fonction dérivable sur un voisinage du point a , le quotient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ admet-il une limite quand, dans $\mathbb{R}^2$, le point (x_1, x_2) tend vers le point (a, a) .

Interpréter géométriquement le résultat.

14. — La fonction f étant dérivable sur $[a, b]$ et admettant une dérivée seconde sur $]a, b[$, à tout point $x \in]a, b[$ on peut associer au moins un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c).$$

Interprétation géométrique.

EXERCICES

15. — Démontrer que, sous des conditions que l'on précisera, on a

$$f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h) = h^2 f''(a + 2\theta h); \quad 0 < \theta < 1.$$

16. — Déterminer le maximum de chacune des fonctions :

$$a \cos nx + b \sin nx; \quad 1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \dots + \frac{\cos nx}{n}.$$

17. — Démontrer que la dérivée d'ordre n de $f(x^2)$ est

$$(2x)^n f^{(n)}(x^2) + \sum_{k=1}^p \frac{n(n-1) \dots (n-2k+1)}{k!} (2x)^{n-2k} f^{(n-k)}(x^2),$$

p désignant le plus grand entier qui n'excède pas $\frac{n}{2}$.

Calculer une expression analogue de la dérivée d'ordre n de $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

CHAPITRE VI

L'INTÉGRALE SIMPLE

I. DÉFINITION DE L'INTÉGRALE SIMPLE

82. Position du problème. — Étant donnée une fonction réelle de la variable réelle, f , définie sur un intervalle $\mathcal{J}$, demandons-nous s'il existe une fonction définie sur $\mathcal{J}$ et y admettant f pour fonction dérivée.

Il est bien évident que si une fonction F répond à la question, il en est de même pour toute fonction G définie par $G(x) = F(x) + C$, C désignant une constante quelconque. Inversement si deux fonctions F et G répondent à la question, $F - G$ est une fonction définie sur $\mathcal{J}$ et admettant une dérivée égale à 0 en tout point de $\mathcal{J}$. On sait (n° 81, 2°) qu'il s'agit d'une fonction constante.

Nous sommes ainsi conduits à étudier la différence $F(b) - F(a)$ des valeurs prises pour une solution éventuelle F en deux points quelconques a et b de $\mathcal{J}$; cette différence est en effet commune à toutes les solutions éventuelles.

Partageons $[a, b]$ en n segments par une suite monotone de points

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$$

et désignons par (d) la subdivision obtenue. Le nombre $\sup |x_i - x_{i-1}|$ est appelé *module* de la subdivision (d) . Écrivons

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(b) - F(x_{n-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

En limitant d'abord l'étude au cas d'une fonction continue, nous pouvons écrire, par application de la formule des accroissements finis,

$$\exists \xi_i \in]x_{i-1}, x_i[\quad \text{tel que} \quad F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

Les nombres $f(\xi_i)$ ne sont pas connus mais m_i (resp. M_i) désignant la borne inférieure (resp. supérieure) de la fonction continue f sur $[x_{i-1}, x_i]$, nous savons que

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i.$$

Nous pouvons donc affirmer que, si la fonction F existe, la différence $F(b) - F(a)$ est comprise, pour toute subdivision (d) de $[a, b]$ entre les deux sommes

$$s(d) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i \quad \text{et} \quad S(d) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i.$$

Les nombres $S(d)$ et $s(d)$ sont des valeurs approchées de $F(b) - F(a)$ avec une erreur absolue inférieure à $|S(d) - s(d)|$. Nous allons chercher dans quelles conditions cette erreur peut être rendue aussi petite que l'on veut, moyennant un choix convenable de la subdivision (d) .

Le lecteur trouvera au n° 90 une interprétation des sommes $s(d)$ et $S(d)$ au moyen de sommes d'aires de rectangles.

83. Première définition de l'intégrale simple (Intégrale de Riemann). — 1° **Les sommes de Darboux.** — Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$. Pour commencer nous supposons seulement que f est bornée sur $[a, b]$.

Considérons la subdivision (d) de $[a, b]$ obtenue au moyen de la suite croissante de points :

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < b.$$

Pour la généralité des notations nous poserons $a = x_0$, $b = x_n$.

On dispose de l'entier naturel n et, une fois n choisi, des $n - 1$ points intermédiaires; il existe donc une infinité de subdivisions (d) .

A chacune d'elles nous associons les deux sommes, dites sommes de Darboux, fonctions de (d) ,

$$s(d) = (x_1 - a)m_1 + \dots + (x_i - x_{i-1})m_i + \dots + (b - x_{n-1})m_n = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})m_i,$$

$$S(d) = (x_1 - a)M_1 + \dots + (x_i - x_{i-1})M_i + \dots + (b - x_{n-1})M_n = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})M_i,$$

dans lesquelles M_i et m_i désignent respectivement les bornes supérieure et inférieure de f sur $[x_{i-1}, x_i]$, bornes qui existent puisque f , étant bornée par hypothèse sur $[a, b]$, l'est *a fortiori* sur $[x_{i-1}, x_i]$.

2° **Comparaison des sommes de Darboux.** — Nous avons ainsi un ensemble infini (e) des sommes $s(d)$ et un ensemble infini (E) des sommes $S(d)$.

Nous nous proposons de montrer que $s(d) \leq S(d')$, quelles que soient les subdivisions (d) et (d') .

a) S'il s'agit de la même subdivision le résultat est immédiat car

$$S(d) - s(d) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (M_i - m_i)$$

est positif ou nul d'après $x_i - x_{i-1} > 0$ et $M_i - m_i \geq 0$, quel que soit i .

b) S'il s'agit de subdivisions différentes, introduisons la nouvelle subdivision $(d + d')$ obtenue en utilisant tous les points intermédiaires de (d) et de (d') .

I. — Démontrons d'abord :

LEMME. — Toute subdivision (d^*) obtenue à partir de la subdivision (d) par adjonction d'un point supplémentaire ξ est telle que :

$$s(d^*) \geq s(d) \quad \text{et} \quad S(d^*) \leq S(d).$$

Soit $x_{j-1} < \xi < x_j$. Les contributions à $s(d^*)$ et à $s(d)$ des autres segments que $[x_{j-1}, x_j]$ sont les mêmes. Celles de $[x_{j-1}, x_j]$ sont

$$\begin{aligned} &\text{pour } s(d) : (\xi - x_{j-1})m_j + (x_j - \xi)m_j \\ &\text{pour } s(d^*) : (\xi - x_{j-1})m'_j + (x_j - \xi)m''_j, \end{aligned}$$

m'_j et m''_j étant respectivement les bornes inférieures de f sur $[x_{j-1}, \xi]$ et sur $[\xi, x_j]$, ce qui entraîne $m'_j \geq m_j$ et $m''_j \geq m_j$.

Il en résulte $s(d^*) \geq s(d)$.

De même, en comparant les contributions de $[x_{j-1}, x_j]$ à $S(d^*)$ et à $S(d)$, on obtient $S(d^*) \leq S(d)$.

Ces résultats s'étendent de proche en proche à toute subdivision obtenue à partir de (d) par adjonction d'un nombre quelconque de points supplémentaires, en particulier à la subdivision $(d + d')$.

II. — Démontrons alors le résultat général :

THÉORÈME. — Deux subdivisions quelconques de $[a, b]$, (d) et (d') , vérifient

$$(1) \quad s(d) \leq S(d').$$

D'après le lemme précédent on a en effet :

$$s(d) \leq s(d + d') \quad \text{et} \quad S(d + d') \leq S(d').$$

Il suffit alors d'utiliser : $s(d + d') \leq S(d + d')$ pour obtenir la relation (1).

3^e Définition de l'Intégrale simple (Intégrale de Riemann). — L'ensemble (e) étant ainsi majoré par l'un quelconque des éléments de l'ensemble (E) , admet une borne supérieure I' . (E) , minoré par l'un quelconque des éléments de (e) , admet une borne inférieure I'' . On a $I' \leq I''$.

DÉFINITION. — La fonction f , définie et bornée sur $[a, b]$, est dite intégrable sur $[a, b]$, au sens de Riemann, si les deux ensembles (e) et (E) formés par les sommes de Darboux, $s(d)$ et $S(d)$, sont adjacents. La borne commune $I' = I''$ de ces deux ensembles est alors appelée intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$. Elle est désignée par le symbole

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

On énonce somme de a à b de $f(x) dx$; le symbole $\int$ s'appelle le signe somme.

L'expression « *intégrale* » remplace ici le terme d'« *intégrale définie* » communément utilisé autrefois, et qui est encore employé par certains auteurs. On dit aussi qu'il s'agit d'une « *intégrale simple* », la fonction f étant fonction d'une seule variable, par opposition aux « *intégrales multiples* » que nous associerons ailleurs (tome IV) aux fonctions de plusieurs variables

EXEMPLE I. $f(x) = 1, \quad \forall x \in [a, b]$.

$$M_i = 1 \text{ et } m_i = 1, \quad \forall i \implies S(d) = s(d) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a, \quad \forall (d).$$

D'où $I'' = I' = b - a$. La fonction est intégrable et $\int_a^b [1] dx = b - a$.

EXEMPLE II. $f(x) = 1$ si x est rationnel; $f(x) = -1$ si x est irrationnel.

Sur tout segment $[x_{i-1}, x_i]$ il y a des points à abscisses rationnelles et des points à abscisses irrationnelles, si bien que

$$M_i = 1 \text{ et } m_i = -1, \forall i \implies S(d) = b - a \text{ et } s(d) = -(b - a), \forall (d).$$

D'où $I'' = b - a$ et $I' = -(b - a)$. Quoique bornée, la fonction considérée n'est intégrable sur aucun segment.

4° Cas de $a > b$. — Considérons la subdivision (d) de $[a, b]$ obtenue au moyen de la suite décroissante de points :

$$a > x_1 > x_2 > \dots > x_{i-1} > x_i > \dots > x_{n-1} > b.$$

Les autres notations étant conservées, l'étude faite aux 1°, 2°, 3° s'applique, à cela près qu'ici $x_i - x_{i-1}$ est négatif, que $s(d) \geq S(d')$, que l'ensemble (e) admet la borne inférieure I' , que l'ensemble (E) admet la borne supérieure I'' , qu'enfin $I' \geq I''$.

La fonction f définie et bornée sur $[a, b]$ sera encore dite intégrable sur $[a, b]$ si $I' = I''$ et on désignera la borne commune par $\int_a^b f(x) dx$.

THÉORÈME. — Une fonction f , définie et bornée sur $[a, b]$, est intégrable sur le segment $[b, a]$ si et seulement si elle est intégrable sur le segment $[a, b]$. On a alors

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

En effet toute subdivision (d) de l'un des segments est une subdivision de l'autre, à condition de transposer les bornes de chaque sous-segment. Les sommes $s(d)$ et $S(d)$ relatives à $[a, b]$ sont donc opposées aux sommes $s(d)$ et $S(d)$ relatives à $[b, a]$; il en est de même des bornes I' et I'' .

5° Critère d'intégrabilité. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f , bornée sur $[a, b]$, y soit intégrable est que, quel que soit le nombre positif ϵ , il existe au moins une subdivision (d) de $[a, b]$ telle que :

$$(2) \quad |S(d) - s(d)| < \epsilon.$$

Nous adopterons dorénavant la notation $S(d) - s(d) = \Delta(d)$.

La condition est nécessaire : si f est intégrable, autrement dit si les ensembles (e) et (E) sont adjacents, on sait que (en se limitant au cas $a < b$)

$$\forall \epsilon > 0, \exists (d') \text{ et } (d'') \text{ telles que } 0 \leq S(d') - s(d'') < \epsilon.$$

En désignant par (d) la subdivision $(d' + d'')$ on a

$$\left. \begin{array}{l} S(d) \leq S(d') \\ s(d) \geq s(d'') \end{array} \right\} \implies 0 \leq \Delta(d) < \epsilon.$$

La condition est suffisante : si elle est vérifiée, les ensembles (e) et (E) sont en effet adjacents (n° 13).

REMARQUE. — Si (d^*) est une subdivision déduite de (d) par adjonction d'un point supplémentaire au moins, on déduit des résultats du 2°

$$|\Delta(d^*)| \leq |\Delta(d)|.$$

84. Classes de fonctions intégrables. — Nous allons utiliser le critère précédent. Les démonstrations ne seront faites que dans le cas $a < b$.

THÉORÈME I. — Une fonction f monotone sur un segment $[a, b]$ y est intégrable.

Notons que f est bornée sur $[a, b]$, puisque $f(x) \in [f(a), f(b)]$.

Supposons par exemple que la fonction est non décroissante. On a, pour toute subdivision (d) ,

$$\Delta(d) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (M_i - m_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

En désignant par δ le module de la subdivision (d) , nous avons

$$0 \leq \Delta(d) \leq \delta \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \delta [f(b) - f(a)].$$

Il en résulte que, ε étant un nombre positif arbitraire, l'une quelconque des subdivisions (d) dont le module est inférieur à

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

vérifie la condition d'intégrabilité du n° 83, 5°.

THÉORÈME II. — Une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ y est intégrable.

Rappelons qu'une fonction continue sur un segment y est bornée et uniformément continue.

Au nombre positif arbitraire ε , la continuité uniforme fait correspondre un nombre positif α tel que

$$\left. \begin{array}{l} x' \text{ et } x'' \in [a, b] \\ |x' - x''| < \alpha \end{array} \right\} \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Soit alors (d) l'une quelconque des subdivisions de $[a, b]$ dont le module est inférieur à α . Les bornes M_i et m_i de la fonction f continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ sont ici effectivement atteintes en des points x'_i et x''_i . On a

$$|x'_i - x''_i| \leq x_i - x_{i-1} < \alpha. \quad \text{D'où}$$

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{et}$$

$$0 \leq \Delta(d) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (M_i - m_i) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

et la condition d'intégrabilité du n° 83, 5° est ainsi satisfaite.

***THÉORÈME III.** — Une fonction bornée et continue par intervalles sur un segment $[a, b]$ y est intégrable.

Il s'agit d'une fonction admettant sur $[a, b]$ un nombre fini de points de discontinuité

de première espèce. Bornons-nous à examiner le cas où il n'existe qu'un seul point de discontinuité, soit c ; la généralisation est facile.

η étant un nombre positif arbitraire, assez petit cependant pour que $c - \eta$ et $c + \eta$ soient des points de $]a, b[$, considérons les subdivisions (d) de $[a, b]$ qui utilisent les points consécutifs $c - \eta$ et $c + \eta$. Chacune d'elles s'obtient en utilisant une subdivision (d_1) de $[a, c - \eta]$ et une subdivision (d_2) de $[c + \eta, b]$. On a

$$\Delta(d) = \Delta(d_1) + \Delta(d_2) + 2\eta(M' - m')$$

avec $M' = \sup f(x)$ et $m' = \inf f(x)$ sur $[c - \eta, c + \eta]$.

Or si l'on pose $M = \sup f(x)$, et $m = \inf f(x)$ sur $[a, b]$, m' et M' appartiennent au segment $[m, M]$, et par suite

$$2\eta(M' - m') \leq 2\eta(M - m).$$

Cela posé, ε étant un nombre positif arbitraire, choisissons η assez petit pour que

$$2\eta(M - m) < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \text{a fortiori} \quad 0 < 2\eta(M' - m') < \frac{\varepsilon}{3};$$

η étant ainsi fixé, nous pouvons d'après la continuité de f sur $[a, c - \eta]$ et $[c + \eta, b]$ choisir des subdivisions (d_1) et (d_2) telles que

$$0 < \Delta(d_1) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad 0 < \Delta(d_2) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On sait ainsi associer à ε une subdivision (d) de $[a, b]$ telle que

$$0 < \Delta(d) < \varepsilon.$$

85. Théorème de Darboux. — 1° **Énoncé et démonstration.** — Si la fonction f définie et bornée sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$, l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ est la limite commune des sommes de Darboux $S(d)$ et $s(d)$ quand $\sup |x_i - x_{i-1}|$ tend vers zéro, ce qui signifie que : à tout nombre positif ε on sait faire correspondre un nombre positif α , tel que toute subdivision (d) de $[a, b]$ dont le module est inférieur à α , vérifie de ce fait

$$|S(d) - I| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |I - s(d)| < \varepsilon.$$

(On notera que le mot *limite* n'a pas ici le sens que nous lui avons donné au n° 41 et on se gardera d'appliquer sans précaution les théorèmes classiques sur les limites.)

a) *Démonstration pour une fonction monotone et pour une fonction continue.* (On pourra se limiter à ces deux cas en première lecture.) Reprenons les démonstrations des théorèmes I et II au n° 84. A tout nombre positif ε on sait associer un nombre $\alpha > 0$ tel que, dans le cas $a < b$,

$$\sup (x_i - x_{i-1}) < \alpha \implies 0 < S(d) - s(d) < \varepsilon.$$

Il suffit de remarquer que, après avoir prouvé l'existence de I , on peut écrire

$$s(d) < I < S(d)$$

pour conclure que

$$\sup (x_i - x_{i-1}) < \alpha \implies 0 < S(d) - I < \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 < I - s(d) < \varepsilon.$$

La proposition est ainsi démontrée.

*b) *Démonstration dans le cas général.* — Le théorème résulte de ce que, moyennant la seule hypothèse que f est définie et bornée sur $[a, b]$, on a :

$$I' = \lim_{\sup |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0} S(d) \quad \text{et} \quad I' = \lim_{\sup |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0} s(d).$$

Montrons-le, par exemple, dans le cas des sommes $S(d)$ et pour $a < b$. D'après la définition de la borne inférieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (d_0) \text{ vérifiant } (1) \quad S(d_0) - I' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comparons $S(d_0)$ et $S(d)$, (d) étant une subdivision quelconque, pour laquelle on désigne $\sup (x_i - x_{i-1})$ par δ . Un sous-segment $[x_{j-1}, x_j]$ relatif à (d), ne peut fournir à $S(d)$ une contribution supérieure à celle qu'il apporte à $S(d_0)$ que si l'un au moins des points intermédiaires de (d_0) appartient à $]x_{j-1}, x_j[$; dans ce cas la différence des deux contributions est majorée par la somme de leurs valeurs absolues, elle est donc inférieure à $2 \delta H$, en désignant par H un majorant de $|f(x)|$ sur $[a, b]$, majorant qui existe puisque $|f(x)|$ est bornée.

Le nombre des segments $[x_{j-1}, x_j]$ qui nous intéressent est au plus égal au nombre des points intermédiaires dans la subdivision (d_0) , soit $n_0 - 1$, en appelant n_0 le nombre des sous-segments de (d_0) . Ainsi

$$S(d) < S(d_0) + 2 n_0 \delta H,$$

ce qui, compte tenu de (1), entraîne

$$S(d) < I' + \frac{\varepsilon}{2} + 2 n_0 \delta H.$$

En posant $\alpha = \frac{\varepsilon}{4 n_0 H}$ on peut alors affirmer que

$$\sup (x_i - x_{i-1}) < \alpha \implies 2 n_0 \delta H < \frac{\varepsilon}{2} \implies S(d) - I' < \varepsilon.$$

COROLLAIRE. — L'existence et la valeur éventuelles de I ne changent pas si on modifie la valeur de $f(x)$ en un nombre fini de points.

Considérons en effet la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(c_q) = f(c_q) + k_q \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \neq c_q \quad \text{avec} \quad q = 1, 2, \dots, p.$$

Pour une même subdivision (d), les sommes $S(d)$ et $\bar{S}(d)$ associées à f et à g ne peuvent différer que par les termes correspondant à un sous-segment contenant l'un au moins des points c_q , termes dont le nombre n'excède pas p . D'où

$$|\bar{S}(d) - S(d)| < p K \delta, \quad \text{avec} \quad K = \sup |k_q| \quad \text{et} \quad \delta = \sup |x_i - x_{i-1}|.$$

$$\text{Il en résulte :} \quad \lim_{\sup |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0} \bar{S}(d) = \lim_{\sup |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0} S(d) \quad \text{ou} \quad \bar{I}' = I'.$$

On prouve de même $\bar{I}' = I'$.

2° Corollaire du théorème de Darboux. — Supposons que la fonction f , définie et bornée sur $[a, b]$ soit intégrable sur $[a, b]$; soit I la valeur de l'intégrale;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \sup |x_i - x_{i-1}| < \alpha \implies \begin{cases} |S(d) - I| < \varepsilon \\ |I - s(d)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Soit la somme

$$\sigma = (x_1 - a)f(\lambda_1) + \dots + (x_i - x_{i-1})f(\lambda_i) + \dots + (b - x_{n-1})f(\lambda_n)$$

$$\text{ou} \quad \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Elle dépend, non seulement de la subdivision (d), mais du choix de chacun des nombres λ_i dans les sous-segments correspondants.

En supposant $a < b$,

$$\begin{aligned} m_i \leq f(\lambda_i) \leq M_i &\implies (x_i - x_{i-1})m_i \leq (x_i - x_{i-1})f(\lambda_i) \leq (x_i - x_{i-1})M_i \\ \text{et par suite} & \quad s(d) \leq \sigma \leq S(d), \\ \text{d'où} & \quad s(d) - I \leq \sigma - I \leq S(d) - I \\ \text{et} & \quad |\sigma - I| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En résumé,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \sup |x_i - x_{i-1}| < \alpha \implies |\sigma - I| < \varepsilon.$$

En abrégé, on peut dire que I est la limite des sommes σ lorsque $\sup |x_i - x_{i-1}|$ tend vers zéro.

REMARQUE. — Le raisonnement serait le même pour la somme

$$\sigma' = (x_i - a)\mu_1 + \dots + (x_i - x_{i-1})\mu_i + \dots + (b - x_{n-1})\mu_n$$

où $\mu_i \in [m_i, M_i]$

d'ailleurs, si f est continue, à μ_i on peut associer λ_i tel que $\mu_i = f(\lambda_i)$.

86. Seconde définition de l'intégrale de Riemann. — 1^o DÉFINITION.

— Soit f une fonction définie et bornée sur $[a, b]$. A toute subdivision (d) de $[a, b]$ par une suite monotone de points

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad \dots, \quad x_{i-1}, \quad x_i, \quad \dots, \quad x_{n-1}, \quad b = x_n$$

associons la somme (dite somme de Riemann)

$$\sigma = (x_1 - a)f(\lambda_1) + \dots + (x_i - x_{i-1})f(\lambda_i) + \dots + (b - x_{n-1})f(\lambda_n),$$

dans laquelle λ_i désigne un point arbitraire de $[x_{i-1}, x_i]$.

On dit que cette fonction f est intégrable sur $[a, b]$, au sens de Riemann, lorsqu'il existe un nombre I , limite commune de toutes les sommes σ quand $\sup (x_i - x_{i-1})$ tend vers zéro, ce qui signifie que : à tout nombre positif ε , on sait faire correspondre un nombre positif α tel que toute subdivision (d) de $[a, b]$ dont le module est inférieur à vérifie de ce fait, quel que soit le choix des λ_i : $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Le nombre I est appelé intégrale de la fonction f sur $[a, b]$ et désigné par le symbole

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

La condition exprimée dans cet énoncé s'écrit, en abrégé,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \sup |x_i - x_{i-1}| < \alpha \implies |\sigma - I| < \varepsilon.$$

Montrons que les deux définitions de l'intégrale de Riemann sont équivalentes.

2^o Le théorème de Darboux et son corollaire montrent que si la fonction bornée f est intégrable au sens de la première définition, elle l'est aussi au sens de la seconde définition.

*3^o Réciproquement, montrons que si une fonction bornée f est intégrable au sens de la seconde définition, elle l'est aussi au sens de la première.

Supposons donc qu'il existe un nombre I tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \left\{ \sup_{\forall \lambda_i} |x_i - x_{i-1}| < \alpha \right\} \implies |\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit (d) une quelconque des subdivisions de $[a, b]$ en n sous-segments qui vérifient la condition $\sup |x_i - x_{i-1}| < \alpha$. On a $|\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{2}$, quel que soit le choix des λ_i . Montrons que l'on peut effectuer ce choix de façon à obtenir $|S(d) - \sigma| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Le fait que M_i est la borne supérieure de f sur $[x_{i-1}, x_i]$ entraîne :

$$\forall \eta > 0, \exists \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ tel que } f(\lambda_i) > M_i - \eta.$$

En supposant $a < b$ on en déduit

$$M_i(x_i - x_{i-1}) - f(\lambda_i)(x_i - x_{i-1}) < \eta(x_i - x_{i-1})$$

et par suite

$$S(d) - \sigma < \eta(b - a).$$

$$\text{En choisissant } \eta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ on obtient } S(d) - \sigma < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{et par suite } S(d) - I = [S(d) - \sigma] + [\sigma - I] \implies |S(d) - I| < \varepsilon.$$

Ainsi $S(d)$ admet aussi la limite I quand $\sup |x_i - x_{i-1}|$ tend vers zéro; le raisonnement et le résultat sont les mêmes pour $a > b$, et pour les sommes $s(d)$.

Les sommes $s(d)$ et $S(d)$ constituent donc deux ensembles adjacents ayant I pour borne commune, et f est intégrable sur $[a, b]$ au sens de la première définition, l'intégrale ayant la valeur I précédente.

4° Si la fonction f bornée est intégrable sur $[a, b]$, et si toute somme de Riemann formée à partir d'une subdivision (d) contenant des points fixés à l'avance tend vers une limite I lorsque le module de (d) tend vers 0, quel que soit le choix des λ_i , I est l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Il suffit de faire la démonstration pour les sommes σ^* associées aux subdivisions (d^*) contenant le point $c \in]a, b[$. Par hypothèse

$$\forall \varepsilon, \exists \alpha \text{ tel que } \left\{ \sup_{\forall \lambda_i} |x_i - x_{i-1}| < \alpha \right\} \implies |\sigma^* - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit alors (d) une subdivision quelconque vérifiant

$$\delta < \alpha, \quad \text{avec} \quad \delta = \sup |x_i - x_{i-1}|.$$

Adjoignons-lui le point c , supposé situé dans l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$; nous obtenons ainsi une subdivision (d^*) , dont tous les sous-segments ont une longueur inférieure à α , et qui vérifie ainsi $|\sigma^* - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall \lambda_i$.

Nous prenons, pour (d) et (d^*) , les mêmes λ_i dans tous les sous-segments communs; les sommes associées σ et σ^* ont pour différence :

$$\sigma - \sigma^* = (x_k - x_{k-1})f(\lambda_k) - [(c - x_{k-1})f(\lambda'_k) + (x_k - c)f(\lambda''_k)]$$

$$\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \lambda'_k \in [x_{k-1}, c] \quad \lambda''_k \in [c, x_k]$$

si

$$H = \sup |f(x)| \text{ sur } [a, b]$$

$$|\sigma - \sigma^*| < 3\delta H$$

$$|\sigma - \sigma^*| \text{ est inférieur à } \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } \delta < \frac{\varepsilon}{6H}.$$

L'inégalité $|\sigma - I| \leq |\sigma - \sigma^*| + |\sigma^* - I|$
entraîne $|\sigma - I| < \varepsilon$

et cela pour toute subdivision (d) dans laquelle chacun des sous-segments a une longueur inférieure à $\inf \left[\alpha, \frac{\varepsilon}{6H} \right]$.

I est alors l'intégrale de f sur $[a, b]$.

REMARQUE. — On peut reprendre cette seconde définition de l'intégrale de Riemann (1° à 4°) en remplaçant la somme σ par la somme

$$\sigma' = (x_1 - a)\mu_1 + \dots + (x_i - x_{i-1})\mu_i + \dots + (b - x_{n-1})\mu_n$$

dans laquelle μ_i désigne un point arbitraire de $[m_i, M_i]$.

La démonstration de la réciproque (3°) est d'ailleurs plus simple car $S(d)$ est ici une somme σ' particulière, celle qui correspond au choix $\mu_i = M_i$ des nombres μ_i .

II. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE SIMPLE

Rappelons les notations

$$S(d) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})M_i; \quad s(d) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})m_i; \quad \Delta(d) = S(d) - s(d)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(\lambda_i); \quad \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

et les résultats suivants :

a) La fonction f définie et bornée sur $[a, b]$, est intégrable sur $[a, b]$ si, et seulement si, quel que soit le nombre positif ε , il existe une subdivision (d) telle que $|\Delta(d)| < \varepsilon$.

b) La fonction f étant définie, bornée et intégrable sur $[a, b]$, le nombre I est l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, si et seulement s'il vérifie la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \sup |x_i - x_{i-1}| < \alpha \\ \forall \lambda_i \end{array} \right\} \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon.$$

Nous supposons, dans les démonstrations des nos 87 et 88,

$$a < b; \quad \text{par suite} \quad s(d) \leq I \leq S(d) \quad \text{et} \quad \Delta(d) \geq 0.$$

87. Propriété relative au segment d'intégration. — Pour une fonction f donnée, l'intégrale est une fonction additive du segment d'intégration. Cela résulte des deux théorèmes suivants.

THÉORÈME I. — Si une fonction f est bornée et intégrable séparément sur $[a, c]$ et $[c, b]$, avec $c \in [a, b]$, elle est intégrable sur $[a, b]$, et réciproquement.

a) Si la fonction f est continue sur $[a, c]$ et $[c, b]$ elle est continue sur $[a, b]$ et réciproquement; le théorème est donc immédiat pour une fonction continue.

Il en est de même pour une fonction monotone sur $[a, b]$.

*b) Démontrons le théorème I dans le cas général.

I. f étant intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists (d'), \text{ subdivision de } [a, c], \text{ telle que } \Delta(d') < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists (d''), \text{ subdivision de } [c, b], \text{ telle que } \Delta(d'') < \frac{\varepsilon}{2}. \end{array} \right.$$

Désignons par (d) la subdivision de $[a, b]$ qui utilise tous les points de subdivision de (d') et (d'') ;

$$\Delta(d) = \Delta(d') + \Delta(d'') < \varepsilon,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de f sur $[a, b]$,

II. f étant intégrable sur $[a, b]$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (d), \text{ subdivision de } [a, b] \text{ telle que } \Delta(d) < \varepsilon.$$

Soit (d^*) la subdivision de $[a, b]$ obtenue à partir de (d) en ajoutant le point c ; d'après le n° 83, 5°,

$$\Delta(d^*) \leq \Delta(d) \text{ donc } \Delta(d^*) < \varepsilon.$$

Or (d^*) peut être considérée comme formée d'une subdivision (d') de $[a, c]$ et d'une subdivision (d'') de $[c, b]$, d'où

$$\Delta(d') + \Delta(d'') = \Delta(d^*), \text{ et par suite } \Delta(d') < \varepsilon, \quad \Delta(d'') < \varepsilon.$$

f est donc intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

$$\text{THÉORÈME II.} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (1)$$

la fonction f étant supposée intégrable sur chacun des segments $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$.

Soit I, I', I'' les intégrales de f sur $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$.

a) Supposons $a < c < b$; appelons (d^*) une subdivision de $[a, b]$ où c soit l'un des points de subdivision, soit x_k .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Posons } \sigma' = (x_1 - a) f(\lambda_1) + \dots + (c - x_{k-1}) f(\lambda_k) \\ \sigma'' = (x_{k+1} - c) f(\lambda_{k+1}) + \dots + (b - x_{n-1}) f(\lambda_n). \end{array} \right\} \sigma^* = \sigma' + \sigma''$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\sup |x_i - x_{i-1}| < \alpha \implies |\sigma' - I'| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\sigma'' - I''| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par suite, $\sigma^* - (I' + I'') = (\sigma' - I') + (\sigma'' - I'')$

entraîne $|\sigma^* - (I' + I'')| < \varepsilon$;

il en résulte que $I' + I''$ est l'intégrale de f sur $[a, b]$,

$$I = I' + I'', \text{ ce qui est la formule (1).}$$

b) Supposons c extérieur au segment $[a, b]$, par exemple $a < b < c$.

L'étude faite en a) permet d'écrire

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

or

$$\int_b^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx,$$

et par suite la formule (1) continue de s'appliquer.

GÉNÉRALISATION. — Sous réserve que f soit intégrable sur le plus grand des segments mis en jeu, on a, quels que soient les points $a, b, \dots, l$, la formule dite de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \dots + \int_k^l f(x)dx + \int_l^a f(x)dx = 0.$$

La démonstration est celle de la formule de Chasles en Géométrie.

APPLICATION. — INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS EN ESCALIER. — DÉFINITION. — Une fonction en escalier est une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ et telle qu'il existe une subdivision (d_0) de $[a, b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ de (d_0) .

On a $f(x) = \alpha_i$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$. Les valeurs prises par f aux divers points de subdivision, en particulier en a et en b , sont quelconques.

THÉORÈME. — Une fonction en escalier est intégrable. — La fonction g_i définie sur $[x_{i-1}, x_i]$ par $g_i(x) = \alpha_i$ est continue, donc intégrable, sur ce segment. Comme on passe de g_i à la restriction de f au segment en changeant la valeur de la fonction aux deux points x_{i-1} et x_i , la fonction f est intégrable sur $[x_{i-1}, x_i]$, d'après le corollaire du n° 85, 1°.

Cela posé, l'intégrabilité de f sur $[a, b]$ se déduit du théorème I du n° 87. On a

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\alpha_i.$$

REMARQUE. — Au n° 207, nous verrons l'intégrabilité des fonctions étagées.

88. *Propriétés relatives à la fonction.* — 1° Les théorèmes I et II vont démontrer que, pour un segment donné, l'intégrale est une fonction additive de f .

THÉORÈME I. — Si deux fonctions f et g sont séparément bornées et intégrables sur $[a, b]$, la fonction $f + g$ est intégrable sur $[a, b]$.

a) Le théorème est immédiat si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$; $f + g$ l'est aussi.

*b) Démontrons le théorème dans le cas général. Les indices 1, 2, 3 sont respectivement affectés aux fonctions $f, g, f + g$. Par hypothèse

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{cases} \exists (d'), \text{ subdivision de } [a, b], \text{ telle que } \Delta_1(d') < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists (d''), \text{ subdivision de } [a, b], \text{ telle que } \Delta_2(d'') < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Désignons par (d) la subdivision de $[a, b]$ qui utilise tous les points de (d') et (d'') d'après la remarque du n° 83, 5°

$$\begin{aligned} \Delta_1(d) &< \frac{\varepsilon}{2} & \Delta_2(d) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \Delta_3(d) &= \Delta_1(d) + \Delta_2(d) &< \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $f + g$.

THÉORÈME II.
$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \quad (1)$$
 les fonctions $f, g, f + g$ étant supposées intégrables sur $[a, b]$.

Soit I_1, I_2, I_3 les intégrales de $f, g, f + g$ sur $[a, b]$.

Soit (d) une subdivision de $[a, b]$; posons

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\lambda_i) \\ \sigma_2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) g(\lambda_i) \end{aligned} \right\} \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i]; \quad \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\sup |x_i - x_{i-1}| < \alpha \implies |\sigma_1 - I_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\sigma_2 - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et par suite, puisque $\sigma_3 - (I_1 + I_2) = (\sigma_1 - I_1) + (\sigma_2 - I_2)$,
 $|\sigma_3 - (I_1 + I_2)| < \varepsilon;$

il en résulte que $I_1 + I_2$ est l'intégrale de $f + g$ sur $[a, b]$, soit

$$I_3 = I_1 + I_2, \text{ ce qui est la formule (1).}$$

2° THÉORÈME III. — Si une fonction f est bornée et intégrable sur $[a, b]$ et si k est une constante, la fonction kf est intégrable.

a) le théorème est immédiat si f est continue.

*b) Démontrons le théorème dans le cas général; utilisons les indices 1 et 2 pour f et kf respectivement; relativement à une même subdivision (d) de $[a, b]$

$$\begin{aligned} \Delta_2(d) &= k \Delta_1(d) \\ |\Delta_2(d)| &< \varepsilon \quad \text{dès que} \quad |\Delta_1(d)| < \frac{\varepsilon}{|k|}, \end{aligned}$$

ce qu'il est possible de réaliser par hypothèse.

$$\text{THÉORÈME IV.} \quad \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (3)$$

si k est une constante, les fonctions f et kf étant intégrables sur $[a, b]$.

Soit I_1 et I_2 les intégrales de f et de kf sur $[a, b]$.

(d) étant une subdivision de $[a, b]$, posons

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\lambda_i), \quad \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\sup |x_i - x_{i-1}| < \alpha \implies |\sigma_1 - I_1| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

par suite $|k\sigma_1 - kI_1| < \varepsilon$

d'où il résulte que kI_1 est l'intégrale de kf sur $[a, b]$, soit

$$I_2 = kI_1, \text{ ce qui est la formule (3).}$$

3° Structure d'espace vectoriel. — a) Nous savons que l'addition des fonctions et la multiplication par un réel munissent l'ensemble (Φ) des fonctions définies sur un segment donné $[a, b]$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

(n° 40, 3°). L'ensemble (Ψ) des fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ est une partie de (Φ) . D'après les théorèmes I et III

$$f \text{ et } g \in (\Psi) \implies f + g \in (\Psi) \text{ et } kf \in (\Psi) \quad (k \in \mathbb{R}).$$

On en déduit que (Ψ) est un sous-espace vectoriel de (Φ) . En résumé, on peut énoncer :

THÉORÈME. — L'ensemble des fonctions bornées et intégrables sur un segment réel donné $[a, b]$ est un espace vectoriel sur le corps des réels.

b) A toute fonction $f \in (\Psi)$, associons l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$; d'après les théorèmes II et IV,

$$I(f + g) = I(f) + I(g); \quad I(kf) = kI(f).$$

L'application I de (Ψ) dans $\mathbb{R}$ vérifie les critères de linéarité (I, n° 184), c'est dire que I est une forme linéaire sur (Ψ) . En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME. — L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions bornées et intégrables sur le segment $[a, b]$.

4° **THÉORÈME V.** — Si la fonction bornée f est intégrable sur $[a, b]$, la fonction $|f|$ l'est aussi.

Dans la démonstration des théorèmes V et VI nous gardons pour la fonction f les notations du n° 82; nous affectons ici d'un indice *prime* les termes qui intéressent $|f|$. Ainsi

— si $f(x)$ est positif en tout point de $[x_{i-1}, x_i]$: $M'_i = M_i$; $m'_i = m_i$;

— si $f(x)$ est négatif en tout point de $[x_{i-1}, x_i]$: $M'_i = -m_i$; $m'_i = -M_i$;

— si $f(x)$ n'a pas un signe fixe sur $[x_{i-1}, x_i]$: $M'_i = \sup(M_i, -m_i)$; $m'_i \geq 0$.

On constate que, dans tous les cas $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$. Il en résulte que, pour toute subdivision (d) , on a $\Delta'(d) \leq \Delta(d)$. Or

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (d), \text{ subdivision de } [a, b] \text{ telle que } \Delta(d) < \varepsilon.$$

Cette subdivision vérifie $\Delta'(d) < \varepsilon$. La proposition en résulte.

REMARQUE. — La fonction f qui prend la valeur $+1$ [resp. -1] suivant que x est rationnel [resp. irrationnel] n'est pas intégrable sur $[a, b]$ contrairement à la fonction $|f|$.

5° **THÉORÈME VI.** — Si les fonctions bornées f et g sont intégrables sur $[a, b]$, la fonction fg l'est aussi.

Nous affectons ici d'un indice *prime* les termes qui intéressent g et d'un indice *seconde* ceux qui intéressent fg .

Étudions d'abord le cas de fonctions positives. Nous avons

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad m_i m'_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq M_i M'_i.$$

$$\text{Il en résulte} \quad m''_i \geq m_i m'_i \quad \text{et} \quad M''_i \leq M_i M'_i$$

$$\text{et} \quad M''_i - m''_i \leq M_i M'_i - m_i m'_i = (M_i - m_i) m'_i + (M'_i - m'_i) m_i.$$

En désignant par k un nombre fixe qui majore $f(x)$ et $g(x)$ sur $[a, b]$, nous pouvons écrire, pour toute subdivision (d) de $[a, b]$

$$M''_i - m''_i \leq k[(M_i - m_i) + (M'_i - m'_i)] \implies \Delta''(d) < k[\Delta(d) + \Delta'(d)].$$

$$\text{Or } \forall \varepsilon > 0, \quad \exists (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ telles que } \Delta(d_1) < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad \Delta'(d_2) < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Prenons pour (d) la subdivision qui comprend tous les points de (d_1) et de (d_2)

$$\Delta(d) \leq \Delta(d_1); \quad \Delta'(d) \leq \Delta'(d_2), \quad \text{et par suite} \quad \Delta''(d) < \varepsilon.$$

Dans le cas général de deux fonctions de signe quelconque, on utilise les théorèmes I et III en écrivant (m et m' sont les bornes inférieures de f et g sur $[a, b]$)

$$fg = (f - m)(g - m') + mg + m'f - mm'$$

89. Relation d'ordre. Formule de la moyenne. Inégalité de Schwarz. — Toutes les fois qu'il est question d'inégalités, il est indispensable de préciser $a < b$ ou $a > b$.

1° THÉORÈME DE POSITIVITÉ. — Si f est bornée et intégrable sur $[a, b]$, avec $a < b$, et si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ on a

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Les sommes $S(d)$ sont en effet positives ou égales à 0. La borne inférieure I de l'ensemble (E) des $S(d)$ est donc positive ou égale à 0.

2° THÉORÈME. — Si f est continue sur $[a, b]$, avec $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ et $f(x) > 0$ (strictement) en au moins un point c de $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x) dx > 0 \quad (\text{strictement}).$$

Il existe en effet un sous-segment $[\alpha, \beta]$ de $[a, b]$, contenant le point c sur lequel $f(x) > \frac{1}{2}f(c)$. Pour toute subdivision (d) utilisant les points α et β on a

$$s(d) \geq (\beta - \alpha) \frac{1}{2} f(c).$$

L'intégrale I , borne supérieure d'un ensemble dont un élément est strictement positif est elle-même strictement positive.

$$3^\circ \text{ Comme } \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

on peut énoncer :

THÉORÈME. — Si f et g sont bornées et intégrables sur $[a, b]$, avec $a < b$, et si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a, b]$, on a

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

L'inégalité est stricte si f et g sont continues et si $f(x)$ est strictement supérieur à $g(x)$ en au moins un point de $[a, b]$.

APPLICATION. — Si f est bornée et intégrable sur $[a, b]$, nous avons montré que $|f|$ l'est aussi. Si $a < b$, les deux intégrales vérifient l'inégalité.

$$(3) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Cette formule (3) s'établit en appliquant deux fois la formule (2) à partir de

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

$$\text{Conséquence : } |f(x)| < A \implies \left| \int_a^b f(x) dx \right| < A |b - a|.$$

4° Formule de la moyenne. — THÉORÈME ET DÉFINITION. — Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$, m et M ses bornes; si f est intégrable sur $[a, b]$, il existe un nombre μ du segment $[m, M]$ tel que

$$(4) \quad \int_a^b f(x) dx = \mu(b - a);$$

μ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$.

Supposons d'abord $a < b$. D'après le théorème précédent (3°):

$$m \leq f(x) \leq M \implies \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$\text{ce qui s'écrit : } m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

On en déduit, puisque $b - a > 0$,

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M,$$

ce qui établit la proposition dans le cas $a < b$. On l'étend au cas $b > a$ en remarquant que le produit $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$ est invariant quand on transpose a et b .

REMARQUE. — Si la fonction f est continue et n'est pas constante, les inégalités entre intégrales ont lieu au sens strict et l'on a $\mu \in]m, M[$.

5° Formule de la moyenne pour une fonction continue. — Si la fonction f est continue sur $[a, b]$, elle y est intégrable; la formule (4) lui est applicable; en outre, on sait, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe au moins un point $\xi \in [a, b]$ tel que $\mu = f(\xi)$. La formule de la moyenne prend alors la forme

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi); \quad \xi \in [a, b].$$

6° Généralisation de la formule de la moyenne. — Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et si $g(x)$ a un signe constant sur $[a, b]$, montrons que, m et M désignant les bornes de f sur $[a, b]$, il existe $\mu \in [m, M]$ tel que

$$(6) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Supposons d'abord $a < b$ et $g(x) > 0$.

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \implies m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

$$\text{L'inégalité } \int_a^b g(x) dx > 0 \quad \text{entraîne} \quad m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

La formule (6) est ainsi établie dans le cas particulier considéré.

D'autre part le quotient est invariant, soit quand on transpose a et b , soit quand on remplace $g(x)$ par $-g(x)$; on peut donc supprimer la restriction $a < b$ et étendre la formule au cas où $g(x)$ a un signe constant, sans qu'il soit nécessaire de préciser ce signe.

Si, en outre, f est continue sur $[a, b]$, on peut remplacer (6) par

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx, \quad \text{avec } \xi \in [a, b].$$

7° Interprétation de la valeur moyenne d'une fonction sur un segment. — Rappelons qu'il s'agit du nombre $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Considérons la subdivision de $[a, b]$, formée de n sous-segments égaux. Chacun des $x_i - x_{i-1}$ est alors égal à $\frac{b-a}{n}$. Pour former une somme de Riemann relative à f , prenons pour λ_i la borne x_{i-1} du sous-segment $[x_{i-1}, x_i]$; on obtient ainsi une somme

$$\sigma_n = \frac{b-a}{n} [f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})].$$

La condition $\sup |x_i - x_{i-1}| < \alpha$ équivaut à $n > \frac{b-a}{\alpha}$; en sorte que, le mot limite reprenant son sens naturel,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x) dx.$$

De même, en prenant $\lambda_i = x_i$, on reconnaît que la somme de Riemann

$$\sigma'_n = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(b)]$$

tend vers l'intégrale quand n devient infini

Autrement dit, les expressions

$$\frac{f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})}{n} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(b)}{n}$$

ont pour limite

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

c'est-à-dire la valeur moyenne de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$.

Énonçons ce résultat :

THÉORÈME. — La valeur moyenne d'une fonction sur le segment $[a, b]$ est la limite vers laquelle tend la moyenne arithmétique des valeurs prises par la fonction pour des valeurs de la variable échelonnées en progression arithmétique entre a et b , et pour l'un des nombres a, b , lorsque le nombre de ces valeurs devient infini.

REMARQUE I. — Soit $\Sigma_n = \frac{f(a) + f(x_1) + \dots + f(b)}{n+1}$;

on peut écrire $\Sigma_n = \frac{f(b)}{n+1} + \frac{n}{n+1} \frac{f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})}{n}$

et, sous cette forme, on reconnaît que Σ_n tend aussi vers la valeur moyenne de $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ lorsque n devient infini.

Cette valeur moyenne est encore, dans les mêmes conditions, la limite de la moyenne arithmétique des valeurs de $f(x)$ pour $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

REMARQUE II. — Plus généralement, la valeur moyenne μ est la limite de la moyenne arithmétique des valeurs prises par la fonction pour n valeurs de la variable échelonnées en progression arithmétique, de raison $\frac{b-a}{n}$, entre a et b :

en posant $h = \frac{b-a}{n}$, $a < \xi < a + h$

$$\Sigma_n = \frac{f(\xi) + f(\xi + h) + \dots + f[\xi + (n-1)h]}{n}$$

tend vers μ lorsque n devient infini, quel que soit le choix de la valeur initiale ξ .

8° Inégalité de Schwarz. — **THÉORÈME.** — Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ on a

$$(7) \quad \left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx.$$

En effet, λ étant un réel quelconque, on a, en supposant $a < b$,

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx \geq 0. \quad \text{Autrement dit le trinôme en } \lambda$$

$$\lambda^2 \int_a^b [g(x)]^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

est positif (au sens large) pour toute valeur de λ ; son discriminant est négatif (au sens large), ce qui s'exprime par la relation (7).

Dans le cas où les fonctions f et g sont continues, le lecteur vérifiera que, dans la formule (7), l'égalité a lieu si, et seulement si l'une des fonctions est nulle ou s'il existe une constante k telle que $f = kg$.

90. Interprétation géométrique de l'intégrale simple.

1° Notion d'aire. — On démontre qu'il est possible d'attacher à tout domaine polygonal $(\mathfrak{D})$ d'un plan affine euclidien un nombre réel positif $\mathfrak{A}$, dit aire de $(\mathfrak{D})$, vérifiant les deux axiomes suivants :

$[A_1]$ les aires de deux domaines égaux sont égales,

$[A_2]$ si $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont les aires de deux domaines disjoints $(\mathfrak{D}_1)$ et $(\mathfrak{D}_2)$, l'aire du domaine $(\mathfrak{D}_1) \cup (\mathfrak{D}_2)$ est $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$.

En ajoutant une convention d'unité (le carré dont le côté a pour longueur 1 a pour aire 1) on peut alors déterminer l'aire de tout domaine polygonal.

Considérons un domaine plan $(\mathfrak{D})$. Nous supposons qu'on peut l'enfermer dans un rectangle assez grand, et qu'il contient l'intérieur de tout polygone dont il contient la frontière. Nous dirons qu'un tel domaine $(\mathfrak{D})$ est *quarrable* si l'ensemble des aires des domaines polygonaux contenus dans $(\mathfrak{D})$ et l'ensemble des aires des domaines polygonaux contenus dans $(\mathfrak{D})$ sont adjacents, c'est-à-dire si, quel que soit le nombre positif ε , il existe $(Q) \supset (\mathfrak{D})$ et $(q) \subset (\mathfrak{D})$ tels que la différence des aires des domaines polygonaux (Q) et (q) soit inférieure à ε . L'aire de $(\mathfrak{D})$ est par définition la borne ($\mathfrak{A}$) commune aux deux ensembles adjacents. On vérifie que cette aire obéit aux deux axiomes $[A_1]$ et $[A_2]$.

REMARQUE. — $(\mathfrak{D})$ est quarrable si, et seulement si sa frontière peut être enfermée dans un domaine polygonal d'aire aussi petite que l'on veut.

2° THÉOREME. f étant une fonction réelle de la variable réelle, continue et positive sur $[a, b]$, soit $(\mathfrak{D})$ le domaine défini, dans le plan euclidien rapporté à un repère xOy , comme l'ensemble des points (x, y) tels que

$$x \in [a, b]; \quad y \in [0, f(x)].$$

$(\mathfrak{D})$ est quarrable; si le repère est orthonormé son aire est $\mathfrak{A} = \int_a^b f(x) dx$.

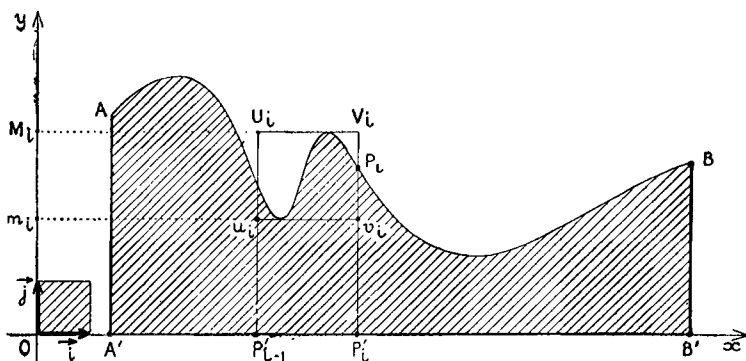


FIG. 33.

$(\mathfrak{D})$ est limité (fig. 33) par les segments de droites $A'B'$, $A'A$, $B'B$ et par l'arc de courbe (Γ) ensemble des points P d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$, avec $x \in [a, b]$.

(d) étant une subdivision quelconque de $[a, b]$ associons-lui les deux domaines polygonaux que sont la réunion (Q) des parallélogrammes $P'_{i-1}P'_iV_iU_i$ et la réunion (q) des parallélogrammes $P'_{i-1}P'_iv_iu_i$ respectivement obtenus en construisant

$$\overline{OP'_{i-1}} = x_{i-1}; \quad \overline{OP'_i} = x_i; \quad \overline{P'_{i-1}U_i} = \overline{P'_iV_i} = M_i; \quad \overline{P'_{i-1}u_i} = \overline{P'_iv_i} = m_i.$$

Nous constatons que $(q) \subset (\mathfrak{D}) \subset (Q)$.

1^{er} Cas : Le repère est orthonormé. — $P'_{i-1}P'_iV_iU_i$ et $P'_{i-1}P'_iv_iu_i$ sont des rectangles (fig. 33) d'aires respectives :

$$(x_i - x_{i-1})M_i \quad \text{et} \quad (x_i - x_{i-1})m_i.$$

Les aires de (Q) et (q) sont donc respectivement

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})M_i = S(d) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})m_i = s(d).$$

Or, quel que soit le nombre positif ε , il existe une subdivision (d) pour laquelle

$$S(d) - s(d) < \varepsilon.$$

On en déduit que le domaine (D) est quarrable et que son aire $\mathcal{A}$ est la borne commune I de l'ensemble (E) des aires $S(d)$ des domaines (Q) et de l'ensemble (e) des aires $s(d)$ des domaines (q). Autrement dit on a

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx.$$

2^e Cas : Le repère n'est pas orthonormé. — $P'_{i-1}P'_iV_iU_i$ et $P'_{i-1}P'_iv_iu_i$ sont des parallélogrammes (fig. 34) d'aires respectives

$$(x_i - x_{i-1})M_i \times \mathcal{U} \quad \text{et} \quad (x_i - x_{i-1})m_i \times \mathcal{U},$$

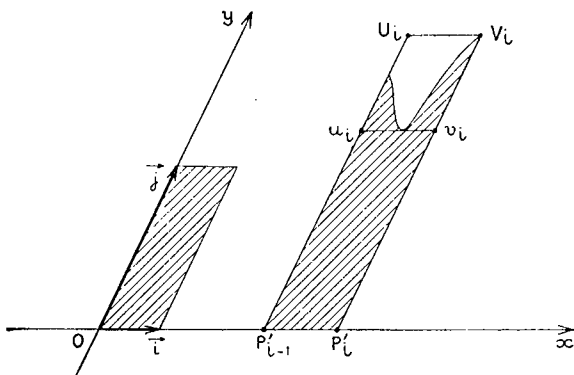


FIG. 34.

$\mathcal{U}$ désignant l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$. En reprenant le raisonnement on prouve encore que (D) est quarrable. Son aire est cette fois

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} \int_a^b f(x) dx.$$

En particulier si le repère est normé, sans être orthonormé, on a

$$\mathcal{U} = \sin \theta,$$

θ désignant l'angle de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (que l'on suppose ici compris entre 0 et π).

Dans toute la suite le repère sera supposé orthonormé, sauf indication expresse du contraire.

3^o Généralisation. — a) $a < b$ et $f(x) < 0$. Posons $f_1(x) = -f(x)$. Les arcs (Γ) et (Γ_1) qui représentent les fonctions f et f_1 sur $[a, b]$ sont symétriques par rapport à $x'x$. Les aires des domaines qu'ils limitent avec $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ sont donc égales. Leur valeur commune est

$$\mathcal{A} = \int_a^b f_1(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

b) $f(x)$ n'a pas un signe fixe sur $[a, b]$. Écartant le cas où la fonction admettrait une infinité de zéros sur $[a, b]$ plaçons-nous, pour fixer les idées, dans le cas de la figure 35. La relation de Chasles

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx + \int_{c_3}^b f(x) dx$$

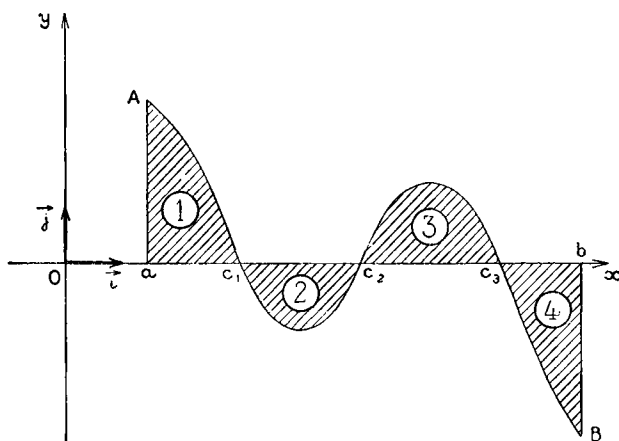


FIG. 35.

s'écrit ici en tenant compte des résultats précédents

$$I = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_4$$

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ étant les aires des domaines numérotés 1, 2, 3, 4 sur la figure.

Notons que nous pouvons également écrire, du fait que $\int_b^a = -\int_a^b$,

$$\int_b^a f(x) dx = -\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4.$$

On constate que dans tous les cas l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est égale à la somme de nombres relatifs dont les valeurs absolues sont des aires. Le signe qu'il faut affecter à chaque aire est donné par le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} a < b \left\{ \begin{array}{ll} \text{signe} + & \text{pour un domaine situé dans la région } y > 0 \\ \text{signe} - & \dots \quad y < 0 \end{array} \right. \\ a > b \left\{ \begin{array}{ll} \text{signe} + & \dots \quad y < 0 \\ \text{signe} - & \dots \quad y > 0. \end{array} \right. \end{array}$$

REMARQUE. — Dans le cas où la fonction f est impaire (resp. paire) et où le segment d'intégration est $[-a, +a]$ le fait que le domaine étudié admet O pour centre (resp. Oy pour axe) de symétrie (fig. 36) conduit à l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — Si f est impaire et intégrable sur $[-a, +a]$, $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0$.
Si f est paire et intégrable sur $[-a, +a]$, $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

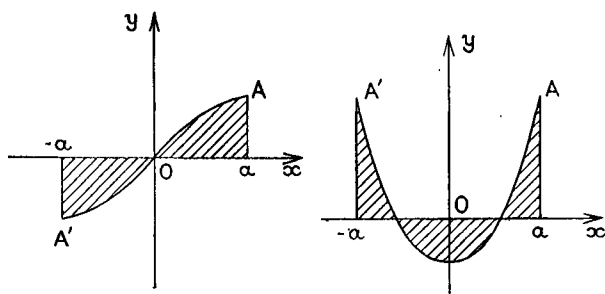


FIG. 36.

On trouve ce résultat sans le recours à la géométrie en associant des subdivisions de $[0, a]$ et de $[0, -a]$ formées de points intermédiaires deux à deux opposés.

III. INTÉGRALE FONCTION D'UNE EXTRÉMITÉ DU SEGMENT D'INTÉGRATION

91. *Étude de la fonction* $\int_{x_0}^x f(t) dt$. — 1° **Généralités.** — Le nom du « véhicule d'intégration » ou de la « variable muette » est indifférent : $\int_a^b (x^2 + 4) dx = \int_a^b (t^2 + 4) dt$ n'est fonction ni de x , ni de t , mais seulement de a et de b .

f étant une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$ et x_0 un point quelconque de $[a, b]$, il existe une fonction Φ qui, à tout point x de $[a, b]$, fait correspondre le nombre $\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$. Cela tient à ce que, f étant intégrable sur $[a, b]$, est *a fortiori* intégrable sur $[x_0, x]$.

2° **THÉORÈME.** — Si la fonction bornée f est intégrable sur $[a, b]$ et si x_0 est un point quelconque de $[a, b]$, la fonction $\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ est continue sur $[a, b]$.

Si, en outre, f est continue, alors Φ admet en tout point x de $[a, b]$ une dérivée égale à $f(x)$.

x étant un point fixe, et $x + h$ un point quelconque de $[a, b]$, on peut écrire en utilisant la formule de la moyenne pour une fonction intégrable (89, 4°)

$$\Phi(x + h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt = \mu h,$$

μ désignant un nombre compris entre les bornes de f sur $[x, x + h]$; *a fortiori* en désignant par M la borne supérieure de $|f|$ sur $[a, b]$:

$$|\Phi(x + h) - \Phi(x)| \leq M |h|.$$

La continuité de Φ au point x en résulte.

Si, en outre, f est continue, on peut adopter (89, 5°)

$$\mu = f(x + \theta h), \quad \text{avec} \quad \theta \in [0, 1].$$

On en déduit
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(x),$$

ce qui montre que Φ est dérivable au point x et que $\Phi'(x) = f(x)$.

REMARQUE I. — Le théorème s'étend à une fonction f continue sur $]a, b[$, à condition de prendre x_0 sur $]a, b[$; Φ est alors dérivable sur $]a, b[$. L'existence et la dérivabilité de Φ sur tout segment intérieur à $]a, b[$ résultent en effet de ce que f est continue sur un tel segment.

REMARQUE II.
$$\int_x^{x_0} f(t) dt = - \int_{x_0}^x f(t) dt$$
 a pour dérivée $-f(x)$.

$$\int_{x_1}^{u(x)} f(t) dt$$
 est une fonction composée de x dont la dérivée est $f[u(x)] \times u'(x)$.

$$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt$$
 s'écrit $\int_{x_0}^{u(x)} + \int_{v(x)}^{x_0}$ et a pour dérivée

$$f[u(x)] \times u'(x) - f[v(x)] \times v'(x).$$

3° Primitives d'une fonction continue. — DÉFINITION. — Étant donnée une fonction f définie sur un champ $\mathcal{C}$, s'il existe une fonction F telle que, en tout point x de $\mathcal{C}$, $F'(x) = f(x)$, on dit que F est une primitive de f .

a) THÉORÈME. — Si la fonction f admet sur le segment $[a, b]$ une primitive F , elle admet sur $[a, b]$ une infinité de primitives; celles-ci sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante quelconque.

Nous partons de l'hypothèse suivante :

$$(1) \quad F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Cela posé, G est une primitive de f sur $[a, b]$ si et seulement si

$$(2) \quad G'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Compte tenu de (1), la relation (2) s'écrit

$$G'(x) = F'(x) \iff [G(x) - F(x)]' = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Or, on sait que pour qu'une fonction admette une dérivée nulle en tout point d'un segment il faut et il suffit qu'elle soit constante sur ce segment. La condition (2) équivaut donc à

$$G(x) - F(x) = C, \quad \forall x \in [a, b],$$

ou enfin

$$G(x) = F(x) + C.$$

REMARQUE. — Il existe une, et une seule, primitive de f qui, en un point donné $x_0 \in [a, b]$ prend une valeur donnée l : la relation

$$l = F(x_0) + C$$

détermine la constante C correspondante.

b) THÉORÈME. — Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ y admet des primitives.

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, d'après le théorème du 2°, la fonction $\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ est définie sur $[a, b]$ et y admet f pour fonction dérivée. La proposition en résulte. D'une manière plus précise,

$\Phi(x)$ est la primitive de $f(x)$ qui, au point $x_0 \in [a, b]$, prend la valeur 0.

F étant une primitive arbitraire de f sur $[a, b]$, on peut écrire

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + C, \quad \forall x \in [a, b];$$

on en déduit $F(x_0) = C$ et

$$(3) \quad F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

REMARQUE I. — Comme au 2°, le théorème s'étend à une fonction f continue sur un intervalle $]a, b[$.

REMARQUE II. — Une primitive quelconque de la fonction f se représente par le symbole $\int f(x)dx$ (on énonce somme de $f(x)dx$). Ce symbole est appelé une « *intégrale indéfinie* » par opposition à l'« *intégrale définie* » pour laquelle les deux bornes du segment d'intégration sont bien déterminées.

92. Calcul pratique des intégrales simples. — 1° f étant une fonction continue sur $[a, b]$, on cherche à calculer le nombre $I = \int_a^b f(t)dt$.

Supposons connue une primitive F de f sur $[a, b]$, c'est-à-dire, rappelons-le, une fonction dérivable (et par conséquent continue) sur $[a, b]$ et telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x de $[a, b]$.

La formule (3) du n° 91. dans laquelle on a fait $x_0 = a$ et $x = b$, donne

$$(1) \quad \boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).}$$

Cette formule capitale ramène le calcul des intégrales simples à celui des fonctions primitives, problème qui sera traité au chapitre XIV. On convient d'écrire

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

ce qui s'énonce : $F(x)$ pris entre a et b . La formule (1) s'écrit alors

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b.$$

EXEMPLE. — Soit à calculer $I = \int_0^\pi \sin t dt$. La fonction $f(x) = \sin x$ est continue sur $[0, \pi]$; l'une de ses primitives est $F(x) = -\cos x$. On a

$$I = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) \quad \text{ou} \quad I = 2.$$

2° Dans quelques cas *exceptionnels* il est possible de calculer des intégrales simples comme limites de sommes σ . On considère seulement les subdivisions (d_n) de $[a, b]$ formées de n sous-segments égaux. On adopte systématiquement

pour nombre λ_i l'une des extrémités du segment $[x_{i-1}, x_i]$. On obtient ainsi une somme $\sigma(d_n)$ qui dépend de l'entier naturel n . On cherche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(d_n)$.

EXERCICES

1. — Étudier la suite dont le terme général est $u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} dx$.

2. f est une fonction positive dont une primitive est F . Démontrer que, quels que soient les nombres positifs a et h , on a

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{2\sqrt{a+h}} < \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+h}} f(t^2) dt < \frac{F(a+h) - F(a)}{2\sqrt{a}}.$$

3*. — Démontrer que $u > b > e^2$ entraîne $\int_b^u \frac{dx}{\text{Log } x} < \frac{2u}{\text{Log } u}$.

4*. — Étudier les suites dont les termes généraux sont :

$$\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}; \quad \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$$

$$\frac{1}{n} \sqrt{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}; \quad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sin \frac{k\pi}{n}.$$

5*. — Montrer $\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x+a} dx = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$.

Montrer que $\int_0^1 \frac{e^x}{x+a} dx$ devient infini quand $a \rightarrow +0$.

6*. f est une fonction positive, continue sur $[a, b]$; M est la borne supérieure de f sur $[a, b]$. Démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx} = M.$$

7*. — L'intégrale $\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$ admet-elle une limite quand x tend vers 0?

L'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\text{Log } t}$ admet-elle une limite quand x tend vers 1?

8. — On désigne par f toute fonction continue sur $]-\infty, +\infty[$, telle que sa valeur moyenne sur tout segment $[a, b]$ est $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Déterminer les fonctions f .

9. — Trouver les fonctions f telles que

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{3} [f(x) + 2f(0)].$$

Trouver les fonctions f telles que $f(x) \cdot f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$.

10*. — Variation et représentation graphique des fonctions

$$f(x) = \int_x^{x^2} \text{Log } t dt; \quad f(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}}; \quad f(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} \sqrt{1+t^2} dt$$

$$f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin^2 t dt}{x^2 - 2x \cos t + 1}; \quad f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin x dt}{t^2 - 2t \cos x + 1}; \quad f(x) = \int_0^1 \exp(xt^2) dt.$$

11. — a) Démontrer qu'il existe un polynôme $f_p(x)$ de degré $p + 1$ s'annulant pour $x = 0$ et satisfaisant à l'égalité $f_p(x) - f_p(x-1) = x^p$.

b) Établir la relation de récurrence

$$f_p(x) = p \left[\int_0^x f_{p-1}(t) dt + x \int_0^{x-1} f_{p-1}(t) dt \right]$$

et s'en servir pour calculer f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 . Montrer que si n est un entier naturel

$$f_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p.$$

c) Montrer que si p n'est pas nul, $f_p(-1) = 0$ et que $f_p(x) = (-1)^{p+1} f_p(-x-1)$.

$f_p\left(y - \frac{1}{2}\right)$ est une fonction paire ou impaire; si p est pair, $f_p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

12*. — Montrer que, si α et β sont des nombres compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et liés par

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{1-e} \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{on a} \quad \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1-e \sin^2 x}} = \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-e \cos^2 x}}.$$

13*. — Montrer que

$$\pi - y = \sqrt{1-a^2} \int_0^x \frac{du}{1+a \cos u} \implies \pi - x = \sqrt{1-a^2} \int_0^y \frac{dv}{1+a \cos v}.$$

14. — Une droite (Δ) , passant par $A(1,0)$, de coefficient directeur t convenablement choisi, recoupe la courbe (Γ) d'équation $y = \sqrt{x^3-1}$ en M_1 et M_2 d'abscisses x_1 et x_2 . Démontrer que, a étant un nombre supérieur à 1,

$$S = \int_a^{x_1} \frac{du}{\sqrt{u^3-1}} + \int_a^{x_2} \frac{du}{\sqrt{u^3-1}}$$

est indépendante de t . La somme S admet-elle une limite lorsque a tend vers 1?

15. — Il s'agit de démontrer que le nombre π est irrationnel.

a) a et b désignant des entiers naturels, démontrer que le polynôme

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (bx - a)^n$$

et ses dérivées successives prennent des valeurs entières aux points 0 et $\frac{a}{b}$.

b) Démontrer que l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{a}{b}} P_n(x) \sin x dx$ admet la limite 0 pour n infini.

c) Démontrer que, si π était égal à un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, I_n serait un entier. Relever une contradiction et conclure.

16*. — On pose $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt$; $x \geq 0$.

Montrer que $f(x)$ est décroissante, que la fonction $\varphi(x) = x f(x) / (x-1)$ est périodique, et de période 1; calculer $\varphi(x)$ pour x entier naturel; en déduire que $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ quel que soit x et que, lorsque $x \rightarrow +\infty$, $f(x)$ est un infiniment petit équivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

17*. — Étudier les séries dont les termes généraux sont :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx; \quad (-1)^n \int_{n\pi}^{n\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{x^n} dx; \quad \int_0^{\frac{1}{\pi}} \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

CHAPITRE VII

FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

I. LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

93. Définition de la fonction logarithme népérien ⁽¹⁾. — 1° m étant un nombre rationnel quelconque différent de -1 , la fonction x^m est continue sur $]0, +\infty[$. Elle y admet les primitives

$$\frac{1}{m+1} x^{m+1} + C.$$

Pour $m = -1$, la fonction $\frac{1}{x}$ est continue, en particulier, sur $]0, +\infty[$; elle admet donc des primitives sur cet intervalle (n° 91); ces primitives sont des fonctions nouvelles, se déduisant de l'une quelconque d'entre elles par addition d'une constante. Nous conviendrons, pour des raisons de commodité qui apparaîtront par la suite, de distinguer celle de ces primitives qui prend la valeur 0 au point $x = 1$. Cela nous conduit à poser :

DÉFINITION. — On appelle fonction logarithme népérien et on note Log la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\boxed{\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{(\text{Log } x)' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \text{Log } 1 = 0.}$$

On trouve parfois la notation $\ln x$.

2° Premières conséquences de la définition. — a) La fonction $\text{Log } x$ admet en tout point x de $]0, +\infty[$ une dérivée égale à $\frac{1}{x}$, donc positive. Cette fonction est ainsi strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Il en résulte que :

$$\text{Log } a = \text{Log } b \quad \Longleftrightarrow \quad a = b \quad \text{et} \quad \text{Log } a > \text{Log } b \quad \Longleftrightarrow \quad a > b.$$

(1) Jean NÉPER, 1550-1637.

En particulier si l'un des nombres à comparer est $b = 1$, on peut écrire

$$a > 1 \iff \text{Log} a > 0; \quad 0 < a < 1 \iff \text{Log} a < 0.$$

b) Les primitives de $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $\text{Log} x + C$. Mais $\frac{1}{x}$ est aussi bien continue sur $]-\infty, 0[$. Elle y admet donc des primitives. Pour les obtenir nous remarquerons que, $u(x)$ étant une fonction positive et dérivable sur un champ $\mathcal{C}$, $\text{Log} u(x)$ est une fonction de x définie sur $\mathcal{C}$ et y admettant la dérivée $\frac{u'}{u}$.

En particulier, pour $u(x) = -x$, la fonction $\text{Log}(-x)$ est définie sur $]-\infty, 0[$, où elle admet la dérivée $\frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Il en résulte :

THÉORÈME. — Les primitives de la fonction $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions $\text{Log}(-x) + C$.

CONSÉQUENCE. — De la formule $(\text{Log}|x|)' = \frac{1}{x}$, valable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ on déduit que, sur tout intervalle où la fonction $u(x)$ est dérivable et ne prend pas la valeur 0, on a

$$(\text{Log}|u(x)|)' = \frac{u'}{u}.$$

C'est de là que provient le nom de dérivée logarithmique qui a été donné (70, 8°) au quotient $\frac{u'}{u}$.

EXEMPLES. — I. — Dérivée de $\text{Log} \left| \text{tg} \frac{x}{2} \right|$.

$$u = \text{tg} \frac{x}{2}, \quad u' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \quad \frac{u'}{u} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2} \text{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x} \quad \text{et}$$

$$\left(\text{Log} \left| \text{tg} \frac{x}{2} \right| \right)' = \frac{1}{\sin x}$$

II. — Dérivée de $\text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$. Il s'agit de $\text{Log} \left| \text{tg} \frac{v}{2} \right|$, avec $v = x + \frac{\pi}{2}$.

La dérivée est donc $\frac{v'}{\sin v}$ ou $\frac{1}{\cos x}$ et

$$\left(\text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right)' = \frac{1}{\cos x}$$

III. — Dérivée de $\text{Log} |x + \sqrt{x^2 + h}|$

$$u = x + \sqrt{x^2 + h}, \quad u' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + h}}, \quad \frac{u'}{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + h}} \quad \text{et}$$

$$(\text{Log} |x + \sqrt{x^2 + h}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + h}}.$$

94. Propriété caractéristique de la fonction logarithme népérien.

— 1° **THÉORÈME DIRECT.** — Le logarithme népérien du produit de deux nombres positifs est égal à la somme des logarithmes népériens de ces deux nombres, autrement dit :

$$\text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b.$$

En effet, a étant un nombre positif fixe quelconque, la fonction $\text{Log } ax$ est définie sur $]0, +\infty[$. Elle y admet la dérivée

$$(\text{Log } ax)' = \frac{u'}{u} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} = (\text{Log } x)'.$$

D'où, sur $]0, +\infty[$, $\text{Log } ax - \text{Log } x = C$, C étant une constante que l'on détermine en utilisant le point $x = 1$. On obtient $C = \text{Log } a$, puisque $\text{Log } 1 = 0$. Finalement :

$$\text{Log } ax = \text{Log } x + \text{Log } a, \quad \forall a > 0 \text{ et } x > 0.$$

REMARQUE. — Il résulte du théorème précédent que la fonction logarithme népérien est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \quad \text{Log}(ab) = \text{Log } a + \text{Log } b.$$

Cette bijection est donc un isomorphisme du groupe multiplicatif des réels strictement positifs sur le groupe additif des réels.

2° **RÉCIPROQUE.** — Cherchons toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et telles que pour tout couple de nombres positifs a et b , on ait

$$(1) \quad f(ab) = f(a) + f(b).$$

Résoudre un problème de ce type, dans lequel l'inconnue est une fonction f , c'est résoudre une *équation fonctionnelle*.

Analyse. — S'il existe une fonction f vérifiant (1),

$$\forall y > 0, \quad f(ay) = f(a) + f(y);$$

de cette relation, qui traduit l'égalité de deux fonctions dérivables de la variable y , on déduit :

$$af'(ay) = f'(y) \implies af'(a) = f'(1) \quad (\text{pour } y = 1).$$

C'est donc que, en posant $f'(1) = k$,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{k}{x} \implies f(x) = k \text{Log } x + C \quad (2)$$

Synthèse. — La fonction (2) satisfait à la condition (1) si

$$k \text{Log}(ab) + C = k \text{Log } a + C + k \text{Log } b + C,$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $C = 0$.

Les solutions de l'équation fonctionnelle (1), dérivables sur $]0, +\infty[$, sont donc les fonctions $k \text{Log } x$. Nous les retrouverons plus loin (n° 99).

3° **Conséquences de la propriété caractéristique.** — Tous les nombres $a, b, \dots$ qui interviennent ici sont positifs.

a) *Logarithme népérien d'un quotient :*

$$c = \frac{a}{b} \implies bc = a \implies \text{Log } b + \text{Log } c = \text{Log } a \implies \boxed{\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b}$$

Cas particulier : $a = 1$, $\text{Log } a = 0$ et $\boxed{\text{Log } \frac{1}{b} = -\text{Log } b}$

b) *Logarithme népérien d'un produit de n facteurs.* La formule

$$\boxed{\text{Log} \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Log } a_i},$$

se démontre par récurrence. Le résultat est déjà acquis pour deux facteurs.

Pour passer de $n - 1$ facteurs à n facteurs on utilise

$$\prod_1^n a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \times a_n.$$

Cas particulier : $a_i = a \Rightarrow \boxed{\text{Log } a^n = n \text{Log } a}$, n entier naturel.

c) *Logarithme népérien d'une racine $n^{\text{ième}}$ (n entier naturel).*

$b = \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$) signifie $b > 0$ et $b^n = a$. D'où, d'après (b),

$$n \text{Log } b = \text{Log } a \Rightarrow \boxed{\text{Log } \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \text{Log } a}$$

d) *Logarithme népérien de $\sqrt[q]{a^p}$ (p et q entiers naturels).*

D'après (c), $\text{Log } \sqrt[q]{a^p} = \frac{1}{q} \text{Log } a^p$ et, d'après (b), $\text{Log } a^p = p \text{Log } a$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Log } \sqrt[q]{a^p} = \frac{p}{q} \text{Log } a}$$

Conséquence : $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Rightarrow \text{Log } \sqrt[q]{a^p} = \text{Log } \sqrt[q']{a^{p'}} \Rightarrow \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}.$

On dispose ainsi d'une nouvelle méthode pour justifier la notation des exposants fractionnaire

e) *Logarithme népérien d'une puissance négative.* Nous venons d'obtenir, pour m rationnel positif,

$$\text{Log } a^m = m \text{Log } a.$$

Supposons maintenant que $m = -m'$ est un nombre rationnel négatif.

$a^m = \frac{1}{a^{m'}} \Rightarrow \text{Log } a^m = -\text{Log } a^{m'} = -m' \text{Log } a = m \text{Log } a$. Ainsi on a :

$$\boxed{\text{Log } a^m = m \text{Log } a} \quad (m \text{ rationnel quelconque}).$$

95. Variation et représentation graphique de $y = \text{Log } x$.

1° THÉORÈME I. $\text{Log } x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Montrons d'abord que, quel que soit le nombre positif A , on peut déterminer un entier positif p tel que

$$(1) \quad \text{Log}(2^p) > A.$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow p \text{ Log} 2 > A \quad \Leftrightarrow p > \frac{A}{\text{Log} 2}.$$

Il suffit de prendre pour p le plus petit entier supérieur à $\frac{A}{\text{Log} 2}$.

La croissance de $\text{Log} x$ entraîne alors

$$x > 2^p \Rightarrow \text{Log} x > \text{Log} 2^p \Rightarrow \text{Log} x > A,$$

le théorème énoncé en résulte.

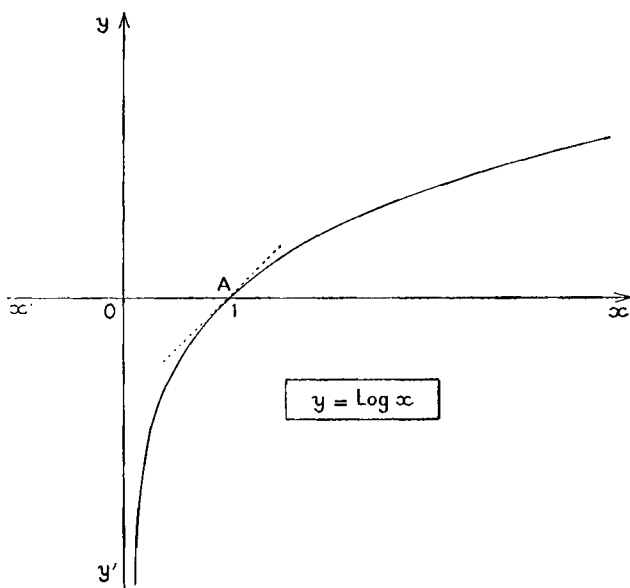


FIG. 37.

2° Nous sommes maintenant en mesure de dresser le tableau de variation de la fonction $y = \text{Log} x$ et de tracer, au moins sommairement le graphe. Notons que la pente de la tangente au point d'abscisse x , qui est $\frac{1}{x}$, a pour limite 0 quand $x \rightarrow +\infty$ et qu'au point A(1, 0) cette pente est 1.

x	0	1	$+\infty$
$\text{Log} x$	$-\infty$	0	$+\infty$

3° THÉOREME. — Le logarithme népérien d'une fonction qui tend vers 1 est un infiniment petit équivalent à l'excès de cette fonction sur 1.

Puisque la fonction $\text{Log } x$ a une dérivée égale à 1 au point $x = 1$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Log } x - \text{Log } 1}{x - 1} = 1. \quad \text{Comme } \text{Log } 1 = 0 \text{ on peut affirmer que}$$

$$\boxed{\text{Quand } x \text{ tend vers } 1, \text{ on a } \text{Log } x \sim x - 1.}$$

REMARQUE. — En posant $x = 1 + X$ on obtient l'énoncé équivalent :

$$\boxed{\text{Quand } X \text{ tend vers } 0, \text{ on a } \text{Log}(1 + X) \sim X.}$$

II. LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

96. *Etude de la fonction exp* — 1° DÉFINITION. — La fonction logarithme népérien est une application continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. On peut donc définir la fonction réciproque appelée fonction exponentielle — et notée $\exp$ — qui est une application continue et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

En résumé :

$$\boxed{y = \exp x \iff x = \text{Log } y, \quad \forall x}$$

Retenons $x = \text{Log}(\exp x)$ et $y = \exp(\text{Log } y)$.

2° Variation et représentation graphique de la fonction $y = \exp x$.

x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\text{Log } y$
$\downarrow$						$\uparrow$
$\exp x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$	y

La courbe $y = \exp x$ est la symétrique de la courbe $y = \text{Log } x$ par rapport à la première bissectrice (B) (fig. 38).

3° Dérivée de la fonction $y = \exp x$.

$$y = \exp x \iff x = \text{Log } y \implies (x')_y = \frac{1}{y} \implies (y')_x = y \quad \text{ou}$$

$$\boxed{(\exp x)' = \exp x.}$$

Plus généralement $(\exp x)^{(p)} = \exp x, \forall p$ entier naturel.

4° THÉOREME. — Quand x tend vers 0 on a $\exp x - 1 \sim x$.

Le fait que la fonction $\exp x$ a une dérivée égale à 1 au point $x = 0$ signifie en effet que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - \exp 0}{x - 0} = 1. \quad \text{Or } \exp 0 = 1.$$

5° THÉORÈME. — Le nombre $\exp 1$ est la limite de la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Quel que soit l'entier positif n , la fonction $\exp x$ admet, sur $[0, 1]$, $n + 1$

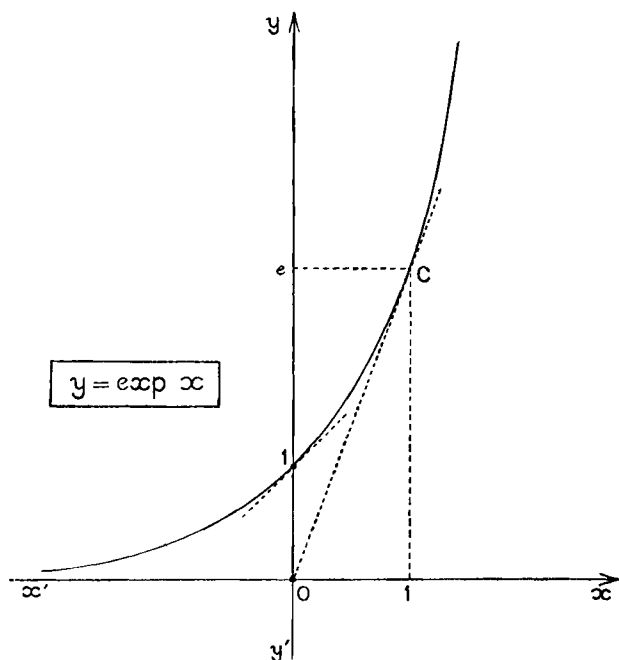


FIG. 38.

dérivées successives égales à $\exp x$. D'où, par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n sur $[0, 1]$:

$$\exp 1 = \exp 0 + \frac{1}{1!} \exp 0 + \frac{1}{2!} \exp 0 + \dots + \frac{1}{n!} \exp 0 + \frac{1}{(n+1)!} \exp \theta_n$$

avec $0 < \theta_n < 1$. Comme $\exp 0 = 1$ on a :

$$\exp 1 = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \exp \theta_n.$$

$$\text{Or} \quad 0 < \theta_n < 1 \implies 1 < \exp \theta_n < \exp 1.$$

$$\text{Ainsi :} \quad \frac{1}{(n+1)!} < \exp 1 - u_n < \frac{\exp 1}{(n+1)!}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (\exp 1 - u_n) = 0,$$

ce qui prouve que la suite $\{u_n\}$ est convergente et que sa limite est $\exp 1$. Rappelons que cette limite a été mise en évidence par une autre méthode (n° 32, 3°) et désignée par le symbole e . On a montré que $e = 2,718\dots$ Nous écrirons dorénavant $\exp 1 = e$.

97. Propriété caractéristique de la fonction $\exp x$.

1° THÉORÈME DIRECT. — a et b étant des nombres quelconques on a

$$(1) \quad \exp(a + b) = \exp a \times \exp b.$$

Écrivons en effet :

$$a = \text{Log}(\exp a), \quad b = \text{Log}(\exp b), \quad a + b = \text{Log}[\exp(a + b)].$$

Des deux premières relations et de la propriété caractéristique de la fonction logarithme népérien on déduit :

$$a + b = \text{Log}[\exp a \times \exp b].$$

$$\text{Ainsi} \quad \text{Log}[\exp(a + b)] = \text{Log}[\exp a \times \exp b].$$

Enfin deux nombres ayant le même logarithme népérien sont égaux. La relation (1) en résulte.

2° RÉCIPROQUE. — Cherchons toutes les fonctions g , dérivables sur $]-\infty + \infty[$, qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$(2) \quad g(a + b) = g(a) \times g(b).$$

En posant $f(x) = \text{Log} |g(x)|$ on constate qu'il est nécessaire que f soit une fonction dérivable vérifiant :

$$(3) \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$$

a désignant un nombre fixe quelconque on doit donc avoir

$$f(a + y) = f(a) + f(y), \quad \forall y.$$

La fonction f devant être dérivable il faut que

$$f'(a + y) = f'(y), \quad \forall a \text{ et } y,$$

ce qui exige que la fonction f' soit une constante k , ou encore que

$$f(x) = kx + C.$$

Inversement $f(x) = kx + C$ vérifie (3) si et seulement si $C = 0$. Enfin $g(x) = \varepsilon \exp(kx)$ vérifie (2) si et seulement si $\varepsilon = +1$. Les fonctions g cherchées sont donc $g(x) = \exp(kx)$, où k est une constante arbitraire.

98. Nouvelle notation de la fonction $\exp x$. — Rappelons $e = \exp 1$, m étant un nombre rationnel quelconque on a montré (n° 94, 3°).

$$\text{Log} e^m = m \text{ Log} e = m = \text{Log}(\exp m) \quad \Longleftrightarrow \quad \exp m = e^m.$$

Par convention nous utiliserons le symbole e^x pour désigner $\exp x$, même si x est irrationnel. Autrement dit :

$y = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \text{Log} y, \quad \forall x$

REMARQUE : $\exp (x+x') = \exp x \times \exp x'$ s'écrit maintenant

$$(I) \quad e^{x+x'} = e^x \times e^{x'}$$

ce qui étend la première règle de calcul des exposants rationnels. Il n'est naturellement pas question d'étendre les deux autres avant d'avoir introduit a^x .

III. LES FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE DE BASE QUELCONQUE

99. Définition de $\log_a x$. — 1° Les fonctions $f_k(x) = k \operatorname{Log} x$ sont telles que $f_k(ab) = f_k(a) + f_k(b)$ pour tout couple de nombres positifs a et b (Nous avons vu au n° 94, 2° que ces fonctions sont les seules à jouir de cette propriété).

Exceptons le cas banal $k = 0$. Pour chacune des fonctions f_k il existe alors un point a où f_k prend la valeur 1. En effet :

$$1 = k \operatorname{Log} a \quad \text{et} \quad k \neq 0 \iff \operatorname{Log} a = \frac{1}{k} \iff a = e^{\frac{1}{k}}.$$

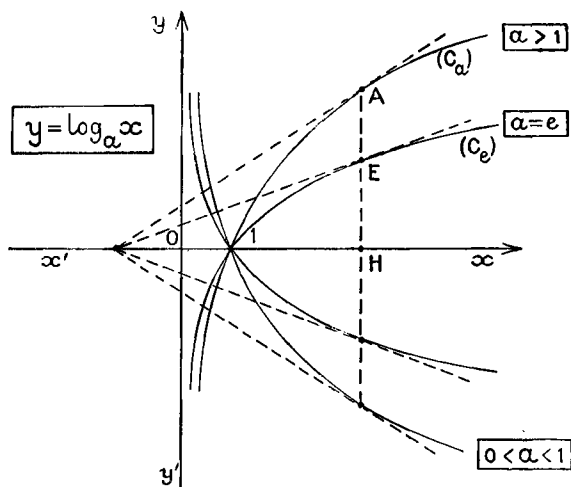


FIG. 39.

Inversement à tout nombre a positif et différent de 1 correspond un nombre $k = \frac{1}{\operatorname{Log} a}$ et une fonction $f_k(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$. Ceci conduit à énoncer :

DÉFINITION. a étant un nombre positif et différent de 1, on appelle logarithme de base a du nombre positif x et on note $\log_a x$ le nombre $\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$.

2° Variation et représentation graphique de $y = \log_a x$ (fig. 39).

$$0 < a < 1 \iff \text{Log} a < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$\text{Log} x$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$
$\frac{\text{Log} x}{\text{Log} a}$	$+\infty$	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$

$$a > 1 \iff \text{Log} a > 0$$

x	0	1	$+\infty$
$\text{Log} x$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$
$\frac{\text{Log} x}{\text{Log} a}$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

REMARQUE. — Soit $\overline{OH} = x$, $\overline{HE} = \text{Log} x$ et $\overline{HA} = \log_a x$. De $\frac{\overline{HA}}{\overline{HE}} = \frac{1}{\text{Log} a}$ on déduit que la courbe (C_a) représentative de $y = \log_a x$ se déduit de la courbe (C_e) représentative de $y = \text{Log} x$ par l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $\frac{1}{\text{Log} a}$.

 3° Dérivée de la fonction logarithme de base a .

$$\log_a x = \frac{\text{Log} x}{\text{Log} a} \quad \text{et} \quad (\text{Log} x)' = \frac{1}{x} \implies \boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \text{Log} a}}$$

4° Règles de calcul relatives aux logarithmes. — On constate, par exemple en passant par l'intermédiaire de $\log_a x = \frac{\text{Log} x}{\text{Log} a}$, que les résultats obtenus au n° 94 s'étendent aux logarithmes de base quelconque. On a (les nombres $A, B, \dots$ étant positifs) :

$$\log_a \prod_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \log_a A_i; \quad \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B;$$

$$\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B = \text{col}_a B, \text{ qui se lit "cologarithme indice } a \text{ de } B".$$

$$\log_a A^m = m \log_a A, \quad \forall m \text{ rationnel.}$$

5° Changements de base. — Puisque $\text{Log} a$ et $\text{Log} b$ ne sont pas nuls on peut écrire :

$$\frac{\text{Log} A}{\text{Log} b} = \frac{\text{Log} A}{\text{Log} a} \times \frac{\text{Log} a}{\text{Log} b} \quad \text{ou} \quad \log_b A = \log_a A \times \log_a b$$

ou

$$\boxed{\log_b A = \log_a A \times \frac{1}{\log_a b}}$$

REMARQUE I. — Si $b = \frac{1}{a}$ on a $\log_{\frac{1}{a}} A = -\log_a A$.

REMARQUE II. — Le rapport des logarithmes de deux nombres donnés est le même dans tous les systèmes.

6° Logarithmes décimaux (base 10). — L'intérêt pratique du choix de la base 10 provient de ce que

$$\log_{10} A = l \implies \log_{10}(A \times 10^n) = n + l.$$

Nous noterons $\log_{10} A = \log A$; on trouve parfois la notation $\lg A$.

Pour la conversion des logarithmes décimaux en logarithmes népériens et pour le problème inverse on utilise :

$$\text{Log } x = \frac{1}{M} \log x, \quad \log x = M \text{Log } x \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{\text{Log } 10} = \log e.$$

On trouve dans les tables à cinq décimales des valeurs approchées à $5 \cdot 10^{-6}$ près de kM et $\frac{k}{M}$, k étant l'un des entiers de 1 à 9.

L'usage des tables de logarithmes est expliqué dans la partie de ce cours consacrée au calcul numérique (Chapitre XX).

100. La fonction $\exp_a x$. — 1° DÉFINITION. — a étant un nombre positif et différent de 1, la fonction logarithme de base a est une application continue et strictement monotone de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$. On peut donc définir la fonction réciproque qui est appelée fonction exponentielle de base a (et notée provisoirement $\exp_a$) et qui est une application continue et strictement monotone de $] -\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

La fonction $\exp_a x$ est croissante si $\text{Log } a > 0$, c'est-à-dire $a > 1$, et décroissante si $\text{Log } a < 0$, c'est-à-dire $0 < a < 1$.

On a donc, a étant un nombre positif, différent de 1,

$$y = \exp_a x \iff x = \log_a y, \quad \forall x.$$

REMARQUE I. — En utilisant $\log_a y = \frac{\text{Log } y}{\text{Log } a}$ on a

$$y = \exp_a x \iff \text{Log } y = x \text{Log } a \iff y = e^{x \text{Log } a}, \quad \forall x.$$

Ceci permet d'étendre la définition de $\exp_a x$ au cas de $a = 1$. Pour tout x on a alors $e^{x \text{Log } 1} = 1$; il suffit de convenir

$$\exp_1 x = 1, \quad \forall x.$$

REMARQUE II. — Les fonctions $\exp_a x = \exp(x \text{Log } a)$ sont toutes les solutions de l'équation fonctionnelle

$$g(\alpha + \beta) = g(\alpha) \times g(\beta) \text{ qui a été étudiée au n° 97.}$$

2° Nouvelle notation de la fonction $\exp_a x$. — m étant un nombre rationnel quelconque on a montré :

$$\log_a a^m = m \log_a a = m \iff \exp_a m = a^m.$$

Par convention nous utiliserons le symbole a^x pour désigner $\exp_a x$, même si x est irrationnel. Autrement dit :

$$y = a^x \iff x = \log_a y \iff y = e^{x \operatorname{Log} a}, \quad \forall x.$$

Montrons que les trois règles de calcul des exposants rationnels (de signes quelconques) s'étendent aux exposants irrationnels.

$$\begin{aligned} a) \operatorname{Log} a^x \cdot a^{x'} &= \operatorname{Log} a^x + \operatorname{Log} a^{x'} = x \operatorname{Log} a + x' \operatorname{Log} a = (x + x') \operatorname{Log} a. \\ \operatorname{Log} a^x \cdot a^{x'} &= \operatorname{Log} a^{x+x'} \implies a^x \cdot a^{x'} = a^{x+x'}. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

$$\begin{aligned} b) \operatorname{Log}(a^x)^{x'} &= x' \operatorname{Log} a^x = x x' \operatorname{Log} a. \\ \operatorname{Log}(a^x)^{x'} &= \operatorname{Log} a^{xx'} \implies (a^x)^{x'} = a^{xx'}. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

$$\begin{aligned} c) \operatorname{Log} a^x \cdot b^x &= \operatorname{Log} a^x + \operatorname{Log} b^x = x \operatorname{Log} a + x \operatorname{Log} b = x (\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b) \\ &= x \operatorname{Log}(ab). \\ \operatorname{Log} a^x \cdot b^x &= \operatorname{Log}(ab)^x \implies a^x \cdot b^x = (ab)^x. \end{aligned} \quad (\text{III})$$

3° Variation et représentation graphique de la fonction $y = a^x$. — A titre d'exercice, nous considérerons $y = a^x$ non comme une fonction réciproque, mais comme une fonction composée :

$$a^x = e^u \quad \text{avec} \quad u = x \operatorname{Log} a.$$

$$0 < a < 1 \iff \operatorname{Log} a < 0$$

$$a > 1 \iff \operatorname{Log} a > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \operatorname{Log} a$	$+\infty \searrow$	0 $\searrow$	$-\infty$
a^x	$+\infty \searrow$	1 $\searrow$	0

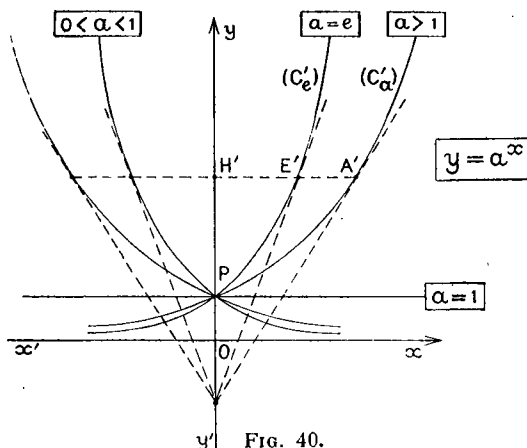
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \operatorname{Log} a$	$-\infty \nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$
a^x	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

Rappelons que, pour $a = 1$, $1^x = 1$, quel que soit x .

La courbe (C'_a) représentative de $y = a^x$ se déduit de la courbe (C'_e) représentative de $y = e^x$ par l'affinité orthogonale d'axe Oy

et de rapport $\frac{H'A'}{H'E'} = \frac{1}{\operatorname{Log} a}$,

résultat que nous aurons pu obtenir en utilisant le n° 99 et une symétrie par rapport à la première bissectrice.



4^o Dérivée de la fonction a^x .

$$a^x = e^u \quad \text{avec} \quad u = x \operatorname{Log} a \implies (a^x)' = e^u \times u' = e^u \times \operatorname{Log} a$$

ou

$$(a^x)' = a^x \times \operatorname{Log} a$$

IV. FONCTION PUISSANCE

101. La fonction x^m (*m* irrationnel). — 1^o **Définition.** Nous avons étudié la fonction x^m pour m rationnel au n^o 62. Du fait que nous avons défini a^x pour $a > 0$ et x irrationnel, nous avons aussi défini x^m pour x positif et m irrationnel.

Ainsi, quel que soit m , la fonction x^m est définie au moins sur $]0, +\infty[$, et sur cet intervalle elle vérifie $x^m = e^u$ avec $u = m \operatorname{Log} x$.

Les formules I, II, III du n^o 100, 2^o s'écrivent sous la forme suivante, qui traduit des propriétés de la fonction puissance :

$$x^m \cdot x^{m'} = x^{m+m'}, \quad (x^m)^{m'} = x^{mm'}, \quad x^m \cdot y^m = (xy)^m.$$

2^o **Variation de x^m sur $]0, +\infty[$.** **Représentation graphique.** — La continuité et la dérivabilité du point $x > 0$ se déduisent de l'étude des fonctions composées. On a : $(x^m)' = e^u \times u' = x^m \times \frac{m}{x} = mx^{m-1}$, ce qui généralise le résultat obtenu pour m entier.

On peut obtenir d'ailleurs le sens de variation de la fonction sans utiliser le signe de la dérivée. En effet :

$$m > 0$$

x	0	1	$+\infty$
$\operatorname{Log} x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$m \operatorname{Log} x$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^m	0	1	$+\infty$

$$m < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$\operatorname{Log} x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$m \operatorname{Log} x$	$+\infty$	0	$-\infty$
x^m	$+\infty$	1	0

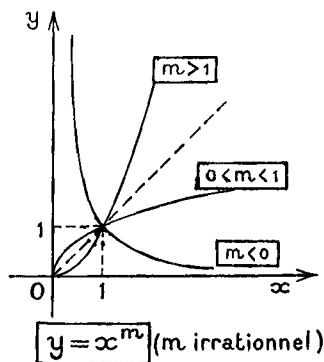


FIG. 41.

RÉMARQUE. — Dans le cas $m > 0$, on constate $\lim_{x \rightarrow 0} x^m = 0$. D'où la possibilité d'obtenir une fonction f continue sur $[0, +\infty[$ par la convention :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x^m \quad \text{si} \quad x > 0.$$

La tangente en 0 à la courbe représentative de cette fonction a pour pente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-1}.$$

Cette tangente est donc Ox si $m > 1$, Oy si $0 < m < 1$, la première bissectrice si $m = 1$ (cas banal).

3° **Fonction réciproque de x^m .** — Pour $x > 0$,

$$y = x^m \iff x = y^{\frac{1}{m}}.$$

La fonction réciproque de x^m est $x^{\frac{1}{m}}$.

102. Fonction u^v , u et v étant deux fonctions d'une même variable x .
— 1° **Définition.** Nous n'étudierons systématiquement la fonction u^v que sur un champ $\mathcal{C}$ où, u et v étant simultanément définies, la fonction u est positive. Nous utiliserons alors :

$$y = u^v \iff \text{Log } y = v \text{ Log } u.$$

2° **Continuité.** — Supposons que $u(x)$ et $v(x)$ sont en outre continues en un point $x_0 \in \mathcal{C}$, soit $\lim_{x \rightarrow x_0} u = u_0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} v = v_0$. On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\text{Log } u) = \text{Log } u_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (v \text{ Log } u) = v_0 \text{ Log } u_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} u = u_0^{v_0},$$

en utilisant successivement la continuité de la fonction logarithmique, du produit et de la fonction exponentielle.

3° **Dérivée.** — Supposons que $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables au point x

$$\text{Log } y = v \text{ Log } u \implies \frac{y'}{y} = v' \text{ Log } u + \frac{vu'}{u}.$$

***4° EXTENSION DU CHAMP DE DÉFINITION.** — On peut considérer que la fonction u^v est définie en un point x_0 où la fonction $u(x)$ prend une valeur u_0 négative, à condition que la fonction $v(x)$ prenne une valeur v_0 égale à une fraction $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers premiers entre eux, avec q impair. (En fait il s'agit là d'une convention qui a été précisée au n° 18, 2°).

VI. CROISSANCE COMPARÉE DES FONCTIONS LOGARITHME, EXPONENTIELLE, PUISSANCE

Nous n'étudierons ici que les cas où les théorèmes élémentaires sur les limites ne suffisent pas. Nous pouvons dès maintenant affirmer, par exemple, que si $m > 0$ et $p < 0$

$$\frac{(\text{Log } x)^p}{x^m} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{(e^x)^p}{x^m} \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

$$(e^x)^p |x|^m \rightarrow +\infty \quad \text{quand } x \rightarrow -\infty$$

$$x^m |\text{Log } x|^p \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow +0.$$

103. *Fonctions logarithme et puissance.* — 1^o THÉORÈME FONDAMENTAL. — Le quotient $\frac{\text{Log} x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Pour $t > 1$ on a $t > \sqrt{t}$ et $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Il en résulte que, quel que soit le nombre x supérieur à 1 on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}, \text{ ce qui s'écrit}$$

$$\text{Log} x < 2 [\sqrt{t}]_1^x = 2(\sqrt{x} - 1) < 2\sqrt{x}.$$

On en déduit que, quel que soit $x > 1$, on a

$$0 < \frac{\text{Log} x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

La fonction $\frac{\text{Log} x}{x}$, comprise entre les deux fonctions 0 et $\frac{2}{\sqrt{x}}$ qui admettent la limite 0 quand x tend vers $+\infty$, admet elle aussi la limite 0.

2^o Les théorèmes suivants se déduisent du théorème fondamental.

THÉORÈME I. m et p étant des nombres positifs quelconques

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\text{Log} x)^p}{x^m} = 0$$

Écrivons en effet

$$\frac{(\text{Log} x)^p}{x^m} = \left[\frac{\text{Log} x}{x^{\frac{m}{p}}} \right]^p \quad \text{et posons} \quad x^{\frac{m}{p}} = y \implies \text{Log} x = \frac{p}{m} \text{Log} y.$$

Le rapport étudié s'écrit

$$\left(\frac{p}{m} \right)^p \left[\frac{\text{Log} y}{y} \right]^p.$$

Or $y \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$; il résulte de cela et du théorème fondamental

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log} y}{y} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\text{Log} y}{y} \right)^p = 0, \text{ puisque } p > 0,$$

d'où la proposition.

COROLLAIRE. — Quand $x \rightarrow +\infty$, $\text{Log} x$ est un infiniment grand d'ordre inférieur à x^m , quel que soit le nombre positif m , puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log} x}{x^m} = 0$.

THÉORÈME II. m et p étant des nombres positifs quelconques

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m |\text{Log} x|^p = 0$$

En posant $x = \frac{1}{X}$ nous sommes en effet conduits à chercher la limite de $\frac{(\text{Log } X)^p}{X^m}$ quand X tend vers $+\infty$; cette limite est 0 d'après le théorème I.

COROLLAIRE. — Quand $x \rightarrow +0$, $\text{Log } x$ est un infiniment grand d'ordre inférieur à $\left(\frac{1}{x}\right)^m$, quel que soit le nombre positif m .

3° **Cas de la fonction $\log_a x$.** — Nous écrirons systématiquement $\log_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$. Nous constatons que tous les résultats du 1° et du 2° subsistent quand on remplace $\text{Log } x$ par $\log_a x$.

104. **Fonctions puissance et exponentielle.** — La comparaison des fonctions a^x et x^m oblige à distinguer non seulement les cas où x tend vers $+\infty$, ou $-\infty$; mais aussi les cas où a est supérieur à 1, ou inférieur à 1. Nous nous ramènerons aux résultats du n° 103 en posant $y = e^x$ (ou $x = \text{Log } y$).

1° $a > 1$. — THÉORÈME I. m étant un nombre positif quelconque,

$$\text{si } a > 1, \frac{a^x}{x^m} \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

Posons $x = \text{Log } y$; $y \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

$$\frac{a^x}{x^m} = \frac{a^{\text{Log } y}}{(\text{Log } y)^m} = \frac{y^{\text{Log } a}}{(\text{Log } y)^m}.$$

L'exposant de y étant positif, le rapport précédent tend vers $+\infty$.

REMARQUE : Si $a > 1$, $m > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{|x|^m} = 0$.

COROLLAIRE. — Quand $x \rightarrow +\infty$, si $a > 1$, a^x est un infiniment grand d'ordre supérieur à x^m , quel que soit le nombre positif m .

THÉORÈME II. m étant un nombre positif quelconque,

$$\text{si } a > 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^m a^x = 0.$$

Posons $x = \text{Log } y$; $y \rightarrow +0$ quand $x \rightarrow -\infty$.

$$|x|^m a^x = |\text{Log } y|^m a^{\text{Log } y} = |\text{Log } y|^m y^{\text{Log } a}$$

L'exposant de y étant positif, le produit précédent tend vers zéro.

COROLLAIRE. — Quand $x \rightarrow -\infty$, et si $a > 1$, a^x est un infiniment petit d'ordre supérieur à $\left(\frac{1}{|x|}\right)^m$, quel que soit le nombre positif m .

2° $0 < a < 1$. — On se ramène au cas précédent en posant $a = \frac{1}{a'} \Rightarrow a' > 1$.

m étant un nombre positif quelconque :

si $a < 1$, $a^x x^m \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ $\left(a^x x^m = \frac{x^m}{a'^x}\right)$

si $a < 1$, $\frac{a^x}{|x|^m} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$ $\left(\frac{a^x}{|x|^m} = \frac{1}{|x|^m a'^x}\right)$

3° p étant un nombre positif, la comparaison de a^{px} à la fonction puissance donne les mêmes résultats qu'au 1° et au 2°, car $a^{px} = (a^p)^x$, et $b = a^p$ est supérieur ou inférieur à 1 suivant que a est supérieur ou inférieur à 1.

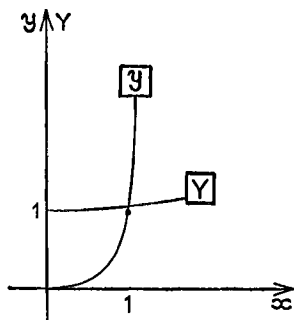


FIG. 42.

4° EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Comparons $y = x^{1000}$ qui est une fonction puissance et $Y = (1,001)^x$ qui est une fonction exponentielle.

Contrairement à ce que pourrait laisser supposer la figure 42 qui représente les graphes des deux fonctions sur $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, il existe β tel que $x > \beta$ entraîne $Y > y$.

Pour avoir un ordre de grandeur de β comparons les logarithmes décimaux de y et de Y : (les nombres qui figurent dans la dernière colonne sont approchés)

x	$\log y = 1\,000 \log x$	$\log Y = x \log(1,001)$
10^6	6 000	434,1
10^7	7 000	4 341
10^8	8 000	43 410

Ainsi $10^7 < \beta < 10^8$. A l'échelle de la figure 42 (l'unité de longueur est le centimètre) il faudrait aller jusqu'à plus de 10^7 cm ou 100 km pour que la courbe $Y = (1,001)^x$ repasse au-dessus de la courbe $y = x^{1000}$.

Des remarques analogues pourraient être présentées avec le tracé des graphes de x^{-1000} et de $\text{Log}\left(\frac{1}{x}\right)$ sur la même figure.

105. Fonctions logarithme et exponentielle. — On intercale une fonction puissance. Par exemple, en supposant $m > 0$ et $p > 0$, on montre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\text{Log } x)^m}{e^{px}} = 0 \quad \text{en écrivant} \quad \frac{(\text{Log } x)^m}{e^{px}} = \frac{(\text{Log } x)^m}{x} \times \frac{x}{e^{px}}.$$

106. Formes indéterminées 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . — Elles s'introduisent au cours de l'étude de fonctions du type u^v .

1° DÉFINITION. — u et v étant deux fonctions définies sur le même champ $\mathcal{C}$ où $u(x)$ est positif, si dans les mêmes conditions

$$a) \quad u(x) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad v(x) \rightarrow 0$$

on dit que $y = u^v$ se présente sous la forme indéterminée 0^0 .

b) $u(x) \rightarrow +\infty$ et $v(x) \rightarrow 0$

on dit que $y = u^v$ se présente sous la forme indéterminée ∞^0 .

c) $u(x) \rightarrow 1$ et $v(x) \rightarrow \infty$

on dit que $y = u^v$ se présente sous la forme indéterminée 1^∞ .

En écrivant $y = u^v \Leftrightarrow \text{Log } y = v \text{Log } u$ on constate que, dans les trois cas, $\text{Log } y$ se présente sous la forme indéterminée $0 \times \infty$.

EXEMPLE I. — La fonction $y = x^x$, définie sur $]0, +\infty[$ admet-elle une limite quand $x \rightarrow +0$? (Forme 0^0).

$$\text{Log } y = x \text{Log } x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} \text{Log } y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} y = 1.$$

EXEMPLE II. — La fonction $y = x^{\frac{1}{x}}$, définie sur $]0, +\infty[$ admet-elle une limite quand $x \rightarrow +\infty$? (Forme ∞^0).

$$\text{Log } y = \frac{\text{Log } x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1.$$

EXEMPLE III. — La fonction $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, définie sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1[$, admet-elle une limite quand $x \rightarrow +\infty$ ou quand $x \rightarrow -\infty$? (Forme 1^∞).

$\text{Log } y = x \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Quand $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ on a $\text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \Rightarrow \text{Log } y \sim 1$.

On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = e$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = e$.

REMARQUE. — Si $u(x) \rightarrow +0$ et $v(x) \rightarrow +\infty$, $v \text{Log } u \rightarrow -\infty$ et $u^v \rightarrow +0$
Si $u(x) \rightarrow +0$ et $v(x) \rightarrow -\infty$, $v \text{Log } u \rightarrow +\infty$ et $u^v \rightarrow +\infty$.

Il en résulte que 0^∞ n'est pas une forme indéterminée.

2° AUTRES EXEMPLES DE FORMES INDÉTERMINÉES OÙ INTERVIENNENT LES FONCTIONS EXPONENTIELLE, LOGARITHME ET PUISSANCE.

EXEMPLE I. — La fonction

$$y = \frac{x^3}{x-1} 2^{\frac{1}{x(1-x)}}$$

n'est pas définie pour $x = 0$ ni pour $x = 1$.

a) Étudions ce que devient y quand x tend vers 0.

Lorsque $x \rightarrow -0$, $\frac{1}{x(1-x)} \rightarrow -\infty$, $2^{\frac{1}{x(1-x)}} \rightarrow +0$, $y \rightarrow +0$.

Lorsque $x \rightarrow +0$, $\frac{1}{x(1-x)} \rightarrow +\infty$, $2^{\frac{1}{x(1-x)}} \rightarrow +\infty$,

y se présente sous la forme indéterminée $0 \times \infty$; y est le produit de $\frac{1}{x-1}$ qui tend vers -1 , par la fonction

$$z = x^3 2^{\frac{1}{x(1-x)}}.$$

Prenons le logarithme népérien de z

$$\text{Log } z = 3 \text{Log } x + \frac{1}{x(1-x)} \text{Log } 2 \quad \text{ou} \quad \frac{3(1-x)x \text{Log } x + \text{Log } 2}{x(1-x)},$$

au numérateur le produit $x \text{Log } x$ tend vers zéro; le numérateur tend vers $\text{Log } 2$, et $\text{Log } z \rightarrow +\infty$, z aussi et par suite $y \rightarrow -\infty$.

β) Étudions ce que devient y quand x tend vers 1.

$$\text{Lorsque } x \rightarrow 1-0, \quad \frac{1}{x(1-x)} \rightarrow +\infty, \quad y \rightarrow -\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow 1+0$, y se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Pour lever l'indétermination, on pourrait, comme dans l'étude précédente, prendre le logarithme; donnons une autre méthode. Écrivons y sous la forme

$$\frac{\frac{1}{x(x-1)}}{\frac{1}{2^{x(x-1)}}} \times x^4;$$

l'exposant $\frac{1}{x(x-1)}$ de 2 tendant vers $+\infty$, le rapport précédent tend vers 0, et par suite aussi y .

EXEMPLE II. — Étudier le rapport $y = \frac{a^x + x^{50}}{2^x + [\text{Log } |x|]^{100}}$ quand x devient infini.

La présence de a^x nous oblige à distinguer divers cas suivant que a est supérieur ou inférieur à 1, et suivant que $x \rightarrow +\infty$ ou que $x \rightarrow -\infty$.

α) $a > 1$; si $x \rightarrow +\infty$, a^x est infiniment grand d'ordre supérieur à x^{50} , le numérateur est donc équivalent à a^x ; au dénominateur 2^x est un infiniment grand d'ordre supérieur à $(\text{Log } x)^{100}$ puisque 2^x est d'ordre supérieur à x , et que x est d'ordre supérieur à $(\text{Log } x)^{100}$; le dénominateur est donc équivalent à 2^x . Finalement y est équivalent à $\frac{a^x}{2^x}$;

$$\text{si } a > 2, y \rightarrow +\infty; \quad \text{si } a = 2, y \rightarrow 1; \quad \text{si } 1 < a < 2, y \rightarrow 0.$$

Si $x \rightarrow -\infty$, $a^x \rightarrow 0$ et $2^x \rightarrow 0$, y est équivalent à $\frac{x^{50}}{[\text{Log } |x|]^{100}}$ et par suite $y \rightarrow +\infty$.

β) $a < 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $a^x \rightarrow 0$, y est équivalent à $\frac{x^{50}}{2^x}$, $y \rightarrow 0$.

Si $x \rightarrow -\infty$, a^x est infiniment grand d'ordre supérieur à x^{50} , $2^x \rightarrow 0$ et y est équivalent à $\frac{a^x}{[\text{log } |x|]^{100}}$, $y \rightarrow +\infty$.

EXEMPLE III. — Le rapport $y = \frac{e^{\lg x} - e^{\sin x}}{\text{tg } x - \sin x}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand x tend vers 0.

Écrivons le numérateur sous la forme

$$N = e^{\sin x} (e^{\lg x - \sin x} - 1).$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} = 1$ et $e^{\lg x - \sin x} - 1 \sim \lg x - \sin x$, quand $x \rightarrow 0$. Il en résulte

$$N \sim \lg x - \sin x \quad \text{ou} \quad N \sim D \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = 1.$$

REMARQUE I. — Si u et v sont, soit des infiniment grands positifs du même ordre, soit des infiniment petits positifs du même ordre, $\text{Log } u$ et $\text{Log } v$ sont des infiniment grands équivalents.

En effet $\frac{u}{v} \rightarrow l (\neq 0) \implies \text{Log } u - \text{Log } v \rightarrow \text{Log } l$.

$\text{Log } u - \text{Log } v$ reste donc fini (50, 2°).

EXEMPLE : $y = [\text{Log}(1+x)]^x$ se présente sous la forme indéterminée 0^0 quand $x \rightarrow +0$.
Écrivons $\text{Log } y = x \text{Log}[\text{Log}(1+x)]$.

Comme x et $\text{Log}(1+x)$ sont des infiniment petits positifs équivalents, la remarque I s'applique.

On en déduit $\text{Log } y \sim x \text{Log } x \implies \lim_{x \rightarrow +0} \text{Log } y = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +0} y = 1$.

REMARQUE II. u et v étant des infiniment grands équivalents, e^u et e^v ne sont équivalents que si, *exceptionnellement*, $u - v$ tend vers 0.

En effet $\frac{e^u}{e^v} \rightarrow 1 \iff u - v \rightarrow 0$.

EXEMPLE : $y = \text{tg } x e^{\frac{1}{1-\cos x}}$ se présente sous la forme indéterminée $0 \times \infty$ quand $x \rightarrow 0$. Nous éviterons toute difficulté en posant $u = \frac{1}{1-\cos x}$. On a alors

$$\frac{1}{u} = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{2} \sim \frac{\text{tg}^2 x}{2}.$$

D'où $|\text{tg } x| \sim \sqrt{\frac{2}{u}}$ et $|y| \sim \sqrt{2} \frac{e^u}{\sqrt{u}}$.

Comme $u \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0$, il en résulte $\lim_{x \rightarrow 0} y = +\infty$.

EXERCICES

1. — Démontrer qu'il n'existe aucune fraction rationnelle dont la dérivée est $\frac{1}{x}$.
2. — Démontrer que si x est un nombre positif, on a

$$e^{\frac{x}{x+1}} < 1 + x < e^x.$$

3. — Démontrer que si p et q sont deux nombres positifs dont la somme est 1, on a $p \text{Log } p + q \text{Log } q + \text{Log } 2 \geq 0$.

4. a et b désignant des nombres positifs, distincts de 1, discuter les équations

$$(a^b)^x = a^{(b^x)}; \quad a^{(b^x)} = b^{(a^x)}.$$

5. — Résoudre le système de deux équations aux inconnues x et y

$$\begin{cases} 3^x 5^y = 2^{2x+1} + 2^{2x-1} \\ 3^y 5^x = 2^{2x+2} + 2^{2x-2} \end{cases}$$

- 6*. — Démontrer que le nombre e n'est zéro d'aucun polynôme du second degré à coefficients rationnels.

7. — Variation et représentation graphique des fonctions

$$\begin{aligned} & x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}; \quad x^{2x-x^2}; \quad 2^{\frac{x-1}{x}}; \quad \left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}; \quad \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \\ & \frac{x \text{Log } x}{x^2-1}; \quad e^x \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{6x}\right); \quad x^2 \sqrt{|\text{Log } x|}; \quad (e^x+1)^{\frac{1}{x}} \\ & 2x e^{\frac{1}{x}} + 4x^3 - 15x^2 + 18x; \quad \frac{1}{1-x^2} \text{Log } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad x^{\frac{x}{1-x}}. \end{aligned}$$

8. — Comparer les infiniment grands ($a > 1$, $b > 1$, $x \rightarrow +\infty$)

$$a^{(b^x)} \text{ et } b^{(a^x)}; \quad x^{\log_a x} \text{ et } (\log_a x)^x;$$

$$a^x, x^x, a^{(a^x)} \text{ et } x^{(x^x)}.$$

9. — Relation entre a et b pour que les courbes d'équation

$$y = e^{ax} \quad \text{et} \quad x = e^{by}$$

soient tangentes.

10. — Montrer que si x est un nombre positif, on a

$$x - \frac{x^2}{2} < \text{Log}(1+x) < x.$$

En déduire que le « produit infini »

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

admet, pour n infini, une limite que l'on calculera.

11. — Montrer que la dérivée d'ordre n de la fonction $x^{n-1} \text{Log}(1+x)$ est :

$$(n-1)! \left[\frac{1}{1+x} + \dots + \frac{1}{(1+x)^n} \right].$$

12. — Trouver toutes les fonctions dérivables f qui vérifient, pour tout couple de nombres réels x et y ,

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = [f(x)]^2 \cdot [f(y)]^2.$$

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

I. FONCTIONS HYPERBOLIQUES DIRECTES

107. *Définition des fonctions hyperboliques.* — 1° **Introduction.**

— Toute fonction f définie sur $] -\alpha, +\alpha[$ peut être considérée d'une manière et d'une seule comme la somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire q ; p et q sont respectivement appelées partie paire et partie impaire de f .

Les conditions imposées sont en effet :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + q(x) \\ f(-x) = p(x) - q(x) \end{cases} \iff \begin{cases} p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \end{cases}$$

ce qui détermine bien d'une manière unique une fonction paire p et une fonction impaire q .

2° DÉFINITION I. — On appelle cosinus hyperbolique de x et sinus hyperbolique de x et on note respectivement $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ les parties paire et impaire de e^x :

$$(1) \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (2) \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ces fonctions, comme e^x et e^{-x} , sont définies et continues sur $] -\infty, +\infty[$; $\operatorname{ch} x$ est positif quel que soit x ; $\operatorname{sh} x = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$ est du signe de x , quel que soit $x \neq 0$; $\operatorname{ch} 0 = 1$; $\operatorname{sh} 0 = 0$.

DÉFINITION II. — On appelle tangente hyperbolique de x et cotangente hyperbolique de x et on note respectivement $\operatorname{th} x$ et $\operatorname{coth} x$ les fonctions :

$$(3) \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

ou $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$

$$(4) \quad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

ou $\operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$

$\operatorname{th} x$ est une fonction impaire définie sur $]-\infty, +\infty[$; $\operatorname{coth} x$ est une fonction impaire définie sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$; $\operatorname{th} x$ et $\operatorname{coth} x$ sont du signe de x quel que soit $x \neq 0$; $\operatorname{th} 0 = 0$.

REMARQUE. — Dans l'étude des fonctions hyperboliques, on donne à la variable le nom d'*argument*.

2° Relations entre fonctions hyperboliques du même argument.
D'après la définition de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$,

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

La multiplication membre à membre de ces relations donne, en utilisant $e^x \cdot e^{-x} = 1$,

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1} \quad (5)$$

(5) s'écrit, après division par $\operatorname{ch}^2 x$, $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$; d'où, en tenant compte de $\operatorname{ch} x > 0$ et de $\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \times \operatorname{th} x$:

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}}.$$

3° Variation des fonctions hyperboliques. — Tenant compte de la parité nous nous limiterons à $[0, +\infty[$.

a) *Dérivées. Sens de variation.*

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \text{ou} & \quad \boxed{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x} \\ (\operatorname{sh} x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \text{ou} & \quad \boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x} \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant la dérivée d'un quotient et la formule (5),

$$\boxed{(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x}$$

$$\boxed{(\operatorname{coth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \operatorname{coth}^2 x.}$$

En tenant compte du fait que sur $[0, +\infty[$, on a $\operatorname{sh} x \geq 0$ et $\operatorname{ch} x > 0$, on constate, en utilisant le signe des dérivées, que les fonctions $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ sont croissantes sur $[0, +\infty[$; la fonction $\operatorname{coth} x$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

b) *Étude au voisinage de 0.*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{2} \sim x; \quad \operatorname{th} x \sim x \quad (\text{infinitement petits}).$$

$$\operatorname{ch} x - 1 = \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2} = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{2} \quad (\text{infinitement petit}).$$

c) Étude au voisinage de $+\infty$.

$$\frac{e^x}{2} \rightarrow +\infty, \quad \frac{e^{-x}}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{ch} x \sim \frac{e^x}{2}; \quad \operatorname{sh} x \sim \frac{e^x}{2} \quad (\text{infiniment grands}).$$

$$\operatorname{th} x - 1 = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} - 1 = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \sim -2e^{-2x} \quad (\text{infiniment petit}).$$

Au voisinage de $-\infty$ on a (en utilisant la parité)

$$\operatorname{ch} x \sim \frac{e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{sh} x \sim -\frac{e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x + 1 \sim 2e^{2x}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de dresser le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$\operatorname{ch} x$	1	$+\infty$
$\operatorname{sh} x$	0	$+\infty$
$\operatorname{th} x$	0	1
$\operatorname{coth} x$	$+\infty$	1

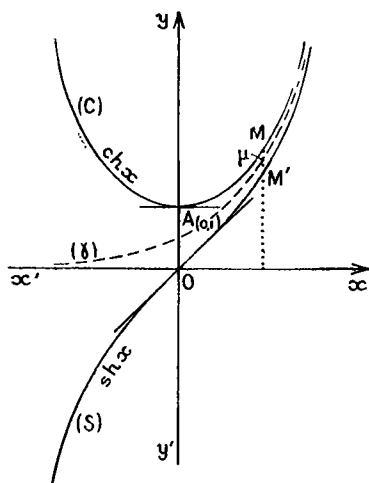


FIG. 43.

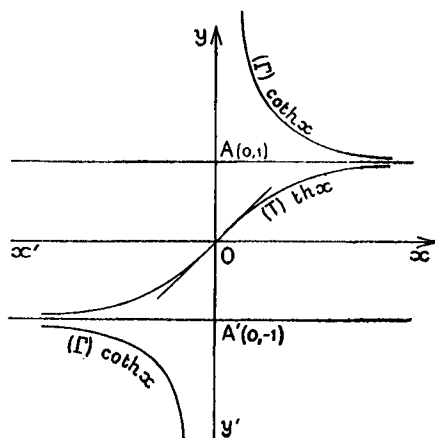


FIG. 44.

d) Graphes. — La parité nous apprend que la droite $y'Oy$ est axe de symétrie pour la courbe (C) $y = \operatorname{ch} x$ et que le point O est centre de symétrie pour les courbes (S) $y = \operatorname{sh} x$, (T) $y = \operatorname{th} x$, (Γ) $y = \operatorname{coth} x$.

Les dérivées $(\operatorname{sh} x)'$, $(\operatorname{th} x)'$ et $(\operatorname{ch} x)'$ étant respectivement égales à 1, 1 et 0 pour $x = 0$ les courbes (S) et (T) admettent pour tangente en O la droite $y = x$, la courbe (C) admet une tangente parallèle à $x'Ox$ au point $A(0, 1)$.

Les droites $y = 1$ et $y = -1$ sont asymptotes de (T) et (T'). La courbe (γ) $y = \frac{1}{2}e^x$ aide à tracer (C) et (S); en effet M, M', μ étant les trois points d'abscisse x sur (C), (S) et (γ),

$$\overline{\mu M} = -\overline{\mu M'} = \frac{1}{2}e^{-x} \text{ est un infiniment petit positif quand } x \rightarrow +\infty.$$

Chaînette. — On démontre que la figure d'équilibre que prend un fil pesant, flexible et inextensible, suspendu par deux de ses points a, quand on la rapporte à deux axes convenablement choisis, l'un horizontal (dit base), l'autre vertical une équation de la forme $\frac{y}{a} = \text{ch} \frac{x}{a}$. D'où le nom de chaînette donné à (C).

108. Trigonométrie hyperbolique. — L'étude suivante va montrer le parallélisme (dont l'explication sera donnée plus loin) entre les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques dont les noms respectifs proviennent de la possibilité de représenter paramétriquement d'une part le cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (par $x = \cos u$, $y = \sin u$), d'autre part l'arc $x > 0$ de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (par $x = \text{ch} u$, $y = \text{sh} u$).

1° Formules d'addition. — Pour calculer $\text{ch}(a + b)$ et $\text{sh}(a + b)$ connaissant $\text{ch} a$, $\text{sh} a$, $\text{ch} b$ et $\text{sh} b$, il suffit de remplacer dans les formules

$$\text{ch}(a + b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}, \quad \text{sh}(a + b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2}$$

e^{a+b} et e^{-a-b} par $e^a \times e^b$ et $e^{-a} \times e^{-b}$, puis e^a par $\text{ch} a + \text{sh} a$, e^{-a} par $\text{ch} a - \text{sh} a$ et de même pour e^b et e^{-b} . On trouve ainsi, après réduction,

$$\boxed{\text{ch}(a + b) = \text{ch} a \text{ch} b + \text{sh} a \text{sh} b}$$

$$\boxed{\text{sh}(a + b) = \text{sh} a \text{ch} b + \text{ch} a \text{sh} b.}$$

En remplaçant b par $-b$ dans ces formules on trouve

$$\boxed{\text{ch}(a - b) = \text{ch} a \text{ch} b - \text{sh} a \text{sh} b}$$

$$\boxed{\text{sh}(a - b) = \text{sh} a \text{ch} b - \text{ch} a \text{sh} b.}$$

En divisant l'expression de $\text{sh}(a + b)$ par celle de $\text{ch}(a + b)$ et divisant par $\text{ch} a \text{ch} b$ les deux termes de la fraction obtenue, on trouve

$$\boxed{\text{th}(a + b) = \frac{\text{th} a + \text{th} b}{1 + \text{th} a \text{th} b}}$$

ce qui donne, par le changement de b en $-b$,

$$\boxed{\text{th}(a - b) = \frac{\text{th} a - \text{th} b}{1 - \text{th} a \text{th} b}.$$

En combinant par addition et soustraction les formules donnant $\text{ch}(a + b)$, $\text{sh}(a + b)$, $\text{ch}(a - b)$, $\text{sh}(a - b)$, on obtient

$$\begin{aligned} 2 \text{ch } a \text{ ch } b &= \text{ch}(a + b) + \text{ch}(a - b) \\ 2 \text{sh } a \text{ sh } b &= \text{ch}(a + b) - \text{ch}(a - b) \\ 2 \text{sh } a \text{ ch } b &= \text{sh}(a + b) + \text{sh}(a - b) \end{aligned}$$

formules qui permettent de remplacer un produit de sinus et de cosinus hyperboliques par une somme ou une différence de telles fonctions. En effectuant la substitution $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$ on en déduit les formules

$$\text{ch } p + \text{ch } q = 2 \text{ch } \frac{p+q}{2} \text{ch } \frac{p-q}{2}$$

$$\text{ch } p - \text{ch } q = 2 \text{sh } \frac{p+q}{2} \text{sh } \frac{p-q}{2}$$

$$\text{sh } p + \text{sh } q = 2 \text{sh } \frac{p+q}{2} \text{ch } \frac{p-q}{2}$$

En remplaçant q par $-q$ dans cette dernière formule on trouve

$$\text{sh } p - \text{sh } q = 2 \text{sh } \frac{p-q}{2} \text{ch } \frac{p+q}{2}$$

2° Formules de multiplication. — a) *Multiplication par 2.* — Il suffit de remplacer b par a dans les expressions de $\text{ch}(a + b)$, $\text{sh}(a + b)$ et $\text{th}(a + b)$ pour trouver les formules de multiplication

$$\text{ch } 2a = \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a$$

$$\text{sh } 2a = 2 \text{sh } a \text{ ch } a$$

$$\text{th } 2a = \frac{2 \text{th } a}{1 + \text{th}^2 a}$$

En combinant par addition et soustraction la première de ces formules et l'égalité $1 = \text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a$, on trouve

$$\text{ch } 2a + 1 = 2 \text{ch}^2 a$$

$$\text{ch } 2a - 1 = 2 \text{sh}^2 a$$

Divisons membre à membre par $1 = \text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a$ les formules qui donnent $\text{ch } 2a$ et $\text{sh } 2a$, puis divisons par $\text{ch}^2 a$ les deux termes des fractions trouvées aux seconds membres, nous obtenons les formules.

$$\text{ch } 2a = \frac{1 + \text{th}^2 a}{1 - \text{th}^2 a}, \quad \text{sh } 2a = \frac{2 \text{th } a}{1 - \text{th}^2 a}$$

Remplaçons dans ces formules et celle qui donne $\text{th } 2a$, a par $\frac{a}{2}$ et $\text{th } \frac{a}{2}$ par t :

$$\text{ch } a = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \quad \text{sh } a = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \text{th } a = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \left(t = \text{th } \frac{a}{2} \right)$$

Les fonctions cha , sha , tha s'expriment rationnellement en fonction de $\text{th}\frac{a}{2}$. Dans la pratique on a intérêt à utiliser plutôt le fait que les fonctions hyperboliques de a s'expriment rationnellement au moyen de $e^a = u$:

$$\text{cha} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \quad \text{sha} = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right), \quad \text{tha} = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad (u > 0).$$

b) *Multiplication par un entier naturel quelconque m.* — Écrivons

$$\begin{aligned} (\text{cha} + \text{sha})^m &= e^{ma}, & (\text{cha} - \text{sha})^m &= e^{-ma} \\ \text{ou } (\text{cha} + \text{sha})^m &= \text{chma} + \text{shma} & \text{et } (\text{cha} - \text{sha})^m &= \text{chma} - \text{shma}, \end{aligned}$$

ces formules sont analogues à la formule de Moivre, d'où on déduit, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} 2 \text{chma} &= (\text{cha} + \text{sha})^m + (\text{cha} - \text{sha})^m \\ 2 \text{shma} &= (\text{cha} + \text{sha})^m - (\text{cha} - \text{sha})^m. \end{aligned}$$

En développant les puissances m^{es} par la formule du binôme de Newton, on trouve que chma et shma sont des polynômes homogènes de degré m par rapport à cha et sha :

$$\begin{aligned} \text{chma} &= \text{ch}^m a + C_m^2 \text{ch}^{m-2} a \cdot \text{sh}^2 a + \dots \\ \text{shma} &= C_m^1 \text{ch}^{m-1} a \cdot \text{sha} + C_m^3 \text{ch}^{m-3} a \cdot \text{sh}^3 a + \dots \end{aligned}$$

En divisant shma par chma , on trouve pour thma une fraction dont les deux termes sont ces polynômes, et en divisant ces deux termes par $\text{ch}^m a$ on obtient l'expression rationnelle de thma en fonction de tha :

$$\text{thma} = \frac{(1 + \text{tha})^m - (1 - \text{tha})^m}{(1 + \text{tha})^m + (1 - \text{tha})^m} \quad \text{ou} \quad \text{thma} = \frac{C_m^1 \text{tha} + C_m^3 \text{th}^3 a + \dots}{1 + C_m^2 \text{th}^2 a + C_m^4 \text{th}^4 a + \dots}.$$

Pour $m = 3$:

$$\text{ch } 3a = \text{ch}^3 a + 3 \text{cha sh}^2 a, \quad \text{sh } 3a = 3 \text{ch}^2 a \text{sha} + \text{sh}^3 a, \quad \text{th } 3a = \frac{3 \text{tha} + \text{th}^3 a}{1 + 3 \text{th}^2 a}$$

$$\text{d'où} \quad \text{ch } 3a = 4 \text{ch}^3 a - 3 \text{cha}, \quad \text{sh } 3a = 3 \text{sha} + 4 \text{sh}^3 a,$$

$$\text{et} \quad \text{ch}^3 a = \frac{\text{ch } 3a}{4} + \frac{3}{4} \text{cha}, \quad \text{sh}^3 a = \frac{\text{sh } 3a}{4} - \frac{3}{4} \text{sha}.$$

3° Problème Inverse. — En vue du calcul des primitives et de la recherche de développements limités, de développements en série entière, nous allons exprimer $\text{ch}^m a$, $\text{sh}^m a$ et $\text{ch}^m a \text{sh}^p a$ en fonction linéaire des sinus et cosinus hyperboliques de l'argument a et de ses multiples.

a) Si m et p ne sont pas trop grands (au plus égaux à 6 dans la pratique), on procède par substitutions successives dirigées de façon à abaisser chaque fois le degré en remplaçant $\text{ch}^2 a$ par $\frac{\text{ch } 2a + 1}{2}$, $\text{sh}^2 a$ par $\frac{\text{ch } 2a - 1}{2}$, sha cha par $\frac{\text{sh } 2a}{2}$ et en utilisant les formules qui permettent de remplacer un produit de sinus ou de cosinus hyperboliques par une somme.

Par exemple

$$\operatorname{ch}^4 x \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \frac{(\operatorname{sh} 2x)^2}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{(\operatorname{ch} 2x + 1)(\operatorname{ch} 4x - 1)}{16}$$

ou encore successivement

$$\frac{\operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 4x}{16} + \frac{\operatorname{ch} 4x}{16} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{16} - \frac{1}{16} \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{ch} 6x + \operatorname{ch} 2x}{32} + \frac{\operatorname{ch} 4x}{16} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{16} - \frac{1}{16}.$$

$$\text{Finalement} \quad \operatorname{ch}^4 x \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 6x}{32} + \frac{\operatorname{ch} 4x}{16} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{32} - \frac{1}{16}.$$

b) Dans le cas général, on écrit

$$\operatorname{ch}^m a \cdot \operatorname{sh}^p a = \frac{(e^a + e^{-a})^m (e^a - e^{-a})^p}{2^{m+p}};$$

on développe le numérateur et on groupe les termes qui renferment e^{ka} et e^{-ka} . Par exemple

$$\operatorname{ch}^3 a = \frac{(e^a + e^{-a})^3}{2^3} = \frac{1}{2^3} [e^{3a} + 8e^{a^3} + 28e^{4a} + 56e^{2a} + 70 + 56e^{-2a} + 28e^{-4a} + 8e^{-a^3} + e^{-3a}];$$

en groupant les termes extrêmes et les termes équidistants des extrêmes, on trouve

$$\operatorname{ch}^3 a = \frac{1}{2^3} [\operatorname{ch} 8a + 8 \operatorname{ch} 6a + 28 \operatorname{ch} 4a + 56 \operatorname{ch} 2a + 35].$$

II. FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES

109. Inversion du sinus hyperbolique. — **1^o DÉFINITION.** — La fonction sinus hyperbolique est une application continue et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. On peut donc définir la fonction réciproque, application continue et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. Cette fonction réciproque est appelée *argument sinus hyperbolique*; on la désigne par le symbole $\operatorname{Arg sh}$.

En résumé :

$$y = \operatorname{Arg sh} x \quad \longleftrightarrow \quad x = \operatorname{sh} y$$

2^o La fonction $\operatorname{Arg sh} x$ est impaire. Son graphe est symétrique par rapport à la première bissectrice de celui de la fonction $\operatorname{sh} x$ (fig. 45).

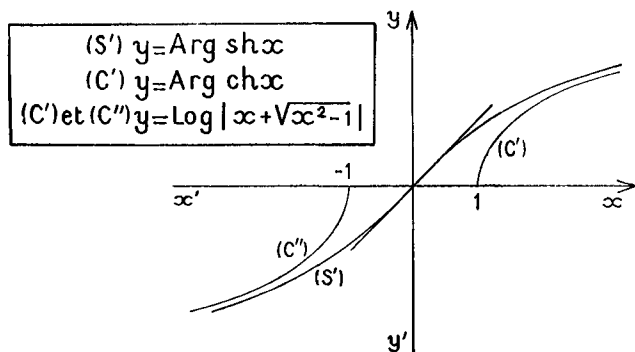


FIG. 45.

$$3^{\circ} \text{ Dérivée. } x = \operatorname{sh} y \implies x'_y = \operatorname{ch} y \implies y'_x = \frac{1}{\operatorname{ch} y}$$

$$\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} y > 0 \implies \operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{1 + x^2}.$$

$$(\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

4^o Expression de $\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x$ à l'aide d'un logarithme. — Nous avons trouvé

$$\operatorname{sh} y = x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} y = +\sqrt{1 + x^2}. \quad \text{Par addition :}$$

$$e^y = x + \sqrt{1 + x^2} \implies \operatorname{Arg} \operatorname{sh} x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{1 + x^2}); \quad \forall x$$

REMARQUE. — Pour $x > 0$, on a $\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$,

ce qui prouve que $\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x \sim \operatorname{Log} x$ quand $x \rightarrow +\infty$. De la parité on déduit que $\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x \sim -\operatorname{Log} |x|$ quand $x \rightarrow -\infty$.

110. *Inversion du cosinus hyperbolique.* — 1^{re} DÉFINITION. — La restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction *cosinus hyperbolique* est une application continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. On peut donc définir une fonction réciproque, application continue et strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Cette fonction réciproque est appelée *argument cosinus hyperbolique*; on la désigne par le symbole $\operatorname{Arg} \operatorname{ch}$. En résumé :

$$\begin{array}{c} y = \operatorname{Arg} \operatorname{ch} x \\ x \geq 1 \end{array} \iff \begin{array}{c} x = \operatorname{ch} y \\ y \geq 0 \end{array}$$

2^o Le graphe de la fonction $\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x$ est symétrique par rapport à la première bissectrice de l'arc $x > 0$ du graphe de la fonction $\operatorname{ch} x$ (fig. 45).

$$3^{\circ} \text{ Dérivée. } x = \operatorname{ch} y \implies x'_y = \operatorname{sh} y \implies y'_x = \frac{1}{\operatorname{sh} y}.$$

$$y \geq 0 \implies \operatorname{sh} y \geq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} y = +\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = +\sqrt{x^2 - 1}.$$

$$(\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad x > 1$$

4^o Expression de $\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x$ à l'aide d'un logarithme. — Nous avons trouvé $\operatorname{ch} y = x$ et $\operatorname{sh} y = +\sqrt{x^2 - 1}$. Par addition :

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \implies \operatorname{Arg} \operatorname{ch} x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2 - 1}); \quad x > 1$$

On en déduit encore que $\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x \sim \operatorname{Log} x$ quand $x \rightarrow +\infty$.

REMARQUE I. — Si x est supérieur à 1, il existe deux valeurs opposées de y telles que $x = \operatorname{ch} y$; on dit que ces deux valeurs, $\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x$ et $-\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x$ sont les deux déterminations de la fonction $\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x$.

REMARQUE II. — La fonction $\operatorname{Log} |x + \sqrt{x^2 - 1}|$ est définie non seulement sur $[1, +\infty[$, mais aussi sur $]-\infty, -1]$. Elle est impaire, car

$$\operatorname{Log} |x + \sqrt{x^2 - 1}| + \operatorname{Log} |-x + \sqrt{x^2 - 1}| = \operatorname{Log} 1 = 0.$$

Elle coïncide donc avec $\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x$ sur $[1, +\infty[$ et avec $-\operatorname{Arg} \operatorname{ch}(-x)$ sur $]-\infty, -1]$. Sur les deux intervalles sa dérivée est $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, d'après le n° 70, 8°.

III. **Inversion de la tangente hyperbolique.** — 1° DÉFINITION. — La fonction *tangente hyperbolique* est une application continue et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-1, +1[$. On peut donc définir la fonction réciproque, application continue et strictement croissante de $]-1, +1[$ sur $]-\infty, +\infty[$. Cette fonction réciproque est appelée *argument tangente hyperbolique*; on la désigne par le symbole $\operatorname{Arg} \operatorname{th}$. En résumé :

$$\boxed{y = \operatorname{Arg} \operatorname{th} x} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x = \operatorname{th} y}$$

$|x| < 1$

2° La fonction $\operatorname{Arg} \operatorname{th} x$ est impaire. Son graphe est symétrique de celui de la fonction $\operatorname{th} x$ par rapport à la première bissectrice (fig. 46).

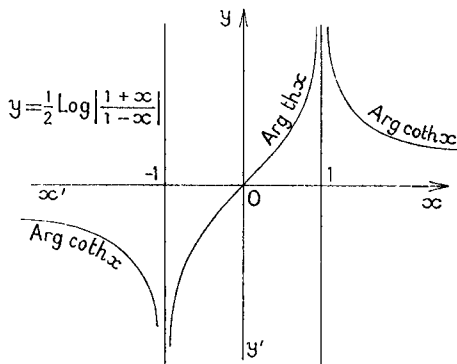


FIG. 46.

3° Dérivée. $x = \operatorname{th} y \Rightarrow x'_y = 1 - \operatorname{th}^2 y \Rightarrow y'_x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$

$$\boxed{(\operatorname{Arg} \operatorname{th} x)' = \frac{1}{1 - x^2}; \quad |x| < 1}$$

4° Expression de $\operatorname{Arg} \operatorname{th} x$ à l'aide d'un logarithme.

$$x = \operatorname{th} y = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad \text{donne} \quad e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x} \quad \text{et}$$

$$\boxed{\operatorname{Arg} \operatorname{th} x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1 + x}{1 - x}; \quad |x| < 1}$$

REMARQUE. — a et b étant deux nombres quelconques compris entre -1 et $+1$, posons

$$\alpha = \text{Arg th } a \iff a = \text{th } \alpha \text{ et } \beta = \text{Arg th } b \iff b = \text{th } \beta.$$

$$\text{On a } \text{th}(\alpha + \beta) = \frac{\text{th } \alpha + \text{th } \beta}{1 + \text{th } \alpha \text{th } \beta} = \frac{a + b}{1 + ab} \iff \alpha + \beta = \text{Arg th } \frac{a + b}{1 + ab}.$$

D'où

$$\boxed{\text{Arg th } a + \text{Arg th } b = \text{Arg th } \frac{a + b}{1 + ab}}$$

112. *Inversion de la cotangente hyperbolique.* — 1° DÉFINITION. — La fonction *cotangente hyperbolique* est une application continue et strictement décroissante d'une part de $]0, +\infty[$ sur $] +\infty, +1[$, d'autre part de $] -\infty, 0[$ sur $] -1, -\infty[$. On peut donc définir la fonction réciproque, dite *argument cotangente hyperbolique* et représentée par le symbole Arg coth . En résumé :

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{Arg coth } x \\ |x| > 1 \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} x = \text{coth } y \\ y \neq 0 \end{array}}$$

2° La fonction $\text{Arg coth } x$ est impaire. Son graphe est symétrique de celui de la fonction $\text{coth } x$ par rapport à la première bissectrice (fig. 46).

$$3^\circ \text{ Dérivée. } x = \text{coth } y \implies x'_y = 1 - \text{coth}^2 y \implies y'_x = \frac{1}{1 - \text{coth}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\boxed{(\text{Arg coth } x)' = \frac{1}{1 - x^2}; \quad |x| > 1}$$

4° Expression de $\text{Arg coth } x$ à l'aide d'un logarithme.

$$x = \text{coth } y = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \quad \text{donne} \quad e^{2y} = \frac{x + 1}{x - 1} \quad \text{et}$$

$$\boxed{\text{Arg coth } x = \frac{1}{2} \text{Log } \frac{x + 1}{x - 1}; \quad |x| > 1}$$

REMARQUE IMPORTANTE. — Il résulte des 3° et 4° que les primitives de $\frac{1}{1 - x^2}$ sont :

$$\text{sur }]-1, +1[: \quad \text{Arg th } x + C = \frac{1}{2} \text{Log } \frac{1 + x}{1 - x} + C$$

$$\text{sur }]-\infty, -1[\text{ et sur }]+1, +\infty[: \quad \text{Arg coth } x + C = \frac{1}{2} \text{Log } \frac{x + 1}{x - 1} + C$$

$$\text{sur les trois intervalles : } \quad \frac{1}{2} \text{Log } \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C.$$

La figure 46 donne le tracé des graphes des fonctions $\text{Arg th } x$ et $\text{Arg coth } x$. l'ensemble de ces courbes constitue le graphe de la fonction $\frac{1}{2} \text{L} \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right|$.

113. EXERCICE. — Les deux variables x et y étant liées par

$$(1) \quad x = \text{Log tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right)$$

trouver les relations qui existent entre les fonctions circulaires de y et les fonctions hyperboliques de x .

$$\text{Nous avons } \text{th } x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{\text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) - 1}{\text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) + 1} = -\cos \left(\frac{\pi}{2} + y \right) = \sin y$$

On obtient de même $\text{ch } x = \frac{1}{\cos y}$; on en déduit par multiplication $\text{sh } x = \text{tg } y$.

En dérivant la relation (1) nous avons $x'_y = \frac{1}{\cos y}$. Il en résulte

$$y'_x = \cos y \quad \text{ou} \quad y'_x = \frac{1}{\text{ch } x}.$$

EXERCICES

1. — Calculer les sommes

$$\begin{aligned} C &= \text{ch } a + \text{ch}(a + b) + \dots + \text{ch}[a + (n-1)b] \\ S &= \text{sh } a + \text{sh}(a + b) + \dots + \text{sh}[a + (n-1)b]. \end{aligned}$$

2. — Résoudre et discuter les systèmes

$$\begin{cases} \text{ch } x + \text{ch } y = a \\ \text{sh } x + \text{sh } y = b \end{cases} \quad \begin{cases} \text{ch } x + \text{sh } y = a \\ \text{sh } x + \text{ch } y = b. \end{cases}$$

3. — En supposant $|a| \neq |b|$, comparer le graphe de la fonction

$$\text{Log}|a \text{ ch } x + b \text{ sh } x|$$

aux graphes des fonctions $\text{Log ch } x$ et $\text{Log sh } x$.

4. — Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction

$$f(x) = e^{x \text{ ch } a} \text{ch}(x \text{ sh } a).$$

5. — Variation et représentation graphique des fonctions

$$\text{ch } 3x - 3 \text{ ch } x; \quad \text{Arc sin}(\text{Arg sh } x); \quad \frac{x}{\text{sh } x} - \frac{1}{\text{ch } x}.$$

6. — Trouver u_1 pour que la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)$ soit périodique d'ordre k . (Poser $u_1 = \coth \varphi$).

7. — Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{Log} \sqrt{\frac{1 + \text{th } x}{1 - \text{th } x}} - x; \quad \text{Arg th} \sqrt{\frac{\text{ch } x - 1}{\text{ch } x + 1}}; \quad \text{Arg ch} \sqrt{\frac{1 + \text{ch } x}{2}} - \frac{x}{2} \\ &\text{Arg sh}(xy + \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{y^2 - 1}); \quad \text{Arg th} \frac{1 + xy + yz + zx}{x + y + z + xyz} \\ &\text{Arg sh}(3x + 4x^3); \quad \text{Arg ch}(4x^3 - 3x); \quad \text{Arg sh}(2x\sqrt{1 + x^2}). \end{aligned}$$

CHAPITRE IX

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET APPLICATIONS

114. *Définition des développements limités.* — 1° Considérons une fonction f définie sur un segment $[-\alpha, +\alpha]$, y admettant $n-1$ dérivées successives et admettant en outre une dérivée n^e au point 0. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young (80) permet d'écrire sur $[-\alpha, +\alpha]$:

$$(1) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction qui tend vers 0 avec x .

L'égalité

$$1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + \dots + x^n)$$

permet d'écrire sur tout intervalle contenant 0 et ne contenant pas 1

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction, en l'occurrence $\frac{x}{1-x}$, qui tend vers 0 avec x .

Nous avons, dans les deux cas considérés, mis en évidence un polynôme F , de degré au plus égal à n , tel que $f(x) - F(x)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à n par rapport à l'infiniment petit x . Généralisant, nous énoncerons :

DÉFINITION I. — On dit qu'une fonction f définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de 0 (sauf peut-être au point 0) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme F de degré au plus égal à n tel que $f(x) - F(x)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à n par rapport à x , c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon(x)$$

ε étant une fonction définie sur $\mathcal{C}$, 0 éventuellement exclu, telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

On dit que le polynôme $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ est la *partie régulière* du développement limité et que $x^n \varepsilon(x)$ en est le *terme complémentaire*; on remplace quelquefois $x^n \varepsilon(x)$ par $o(x^n)$.

La définition s'étend au cas où f n'est définie qu'à droite (resp. à gauche) du point 0.

REMARQUE I. $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = a_0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \varepsilon(x) = 0$. L'existence du développement limité implique $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0$. En toute rigueur cela n'implique pas la continuité de la fonction f au point 0, puisque nous avons admis que $f(0)$ peut ne pas exister.

Cependant si on a $f(0) = a_0$ (éventuellement comme valeur de continuité) on peut écrire

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

ce qui prouve que f est alors non seulement continue, mais dérivable au point 0.

REMARQUE II. — En un point de $\mathbb{C}$ autre que 0, f est dérivable si et seulement si ε est dérivable, ce qui n'est pas exigé par la définition.

2° DÉFINITION II. — On dit qu'une fonction f définie sur un voisinage $\mathbb{C}$ de x_0 (sauf peut être au point x_0) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme F de degré au plus égal à n tel que $f(x) - F(x - x_0)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à n par rapport à $x - x_0$, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

ε étant une fonction définie sur $\mathbb{C}$, x_0 éventuellement exclu, telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

DÉFINITION III. — On dit qu'une fonction f définie sur un voisinage $\mathbb{C}$ de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) s'il existe un polynôme F de degré au plus égal à n tel que $f(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à n par rapport à $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}$$

ε étant une fonction définie sur $\mathbb{C}$, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ [resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0$].

OBSERVATION PRATIQUE. — Nous nous ramènerons systématiquement :

a) du voisinage de x_0 à celui de 0 en posant $x = x_0 + h$;

b) du voisinage de l'infini à celui de 0 en posant $x = \frac{1}{h}$.

115. *Premières propriétés des développements limités.* — 1° **Unicité.** — Supposons que l'on a simultanément

$$f(x) = F(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad f(x) = G(x) + x^n \varepsilon_1(x),$$

F et G étant des polynômes de degré au plus égal à n , $\varepsilon(x)$ et $\varepsilon_1(x)$ étant des fonctions qui tendent vers 0 avec x . On en déduit l'égalité

$$F(x) - G(x) = x^n [\varepsilon_1(x) - \varepsilon(x)].$$

Supposons $F \neq G \Leftrightarrow \varepsilon_1 \neq \varepsilon$; le second membre est alors un infiniment petit d'ordre supérieur à n par rapport à x ; or le premier membre n'est pas infiniment petit si $F(0) \neq G(0)$, est infiniment petit d'ordre au plus égal à n si $F(0) = G(0)$. Dans les deux cas on relève une contradiction.

On a donc nécessairement $F = G$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Les deux développements considérés sont identiques.

CONSÉQUENCE I. — Une fois démontrée l'existence d'un développement limité, il est indifférent de calculer ce développement par telle ou telle méthode; on obtiendra toujours le même résultat.

CONSÉQUENCE II. — Si $f(x) = 0$, quel que soit x appartenant à un voisinage $\mathcal{C}$ de 0, on peut écrire, sur $\mathcal{C}$,

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

La fonction f admet donc sur $\mathcal{C}$ un développement limité d'ordre n quelconque dont la partie régulière est le polynôme nul.

CONSÉQUENCE III. — Si une fonction paire (resp. impaire) admet un développement limité au voisinage de 0, la partie régulière en est paire (resp. impaire). En effet nous disposons alors de deux développements. L'un d'eux est

$$f(x) = F(x) + \varepsilon(x) \times x^n,$$

l'autre est, suivant le cas,

$$f(x) = F(-x) + \varepsilon(-x) \times (-1)^n x^n \quad \text{ou} \quad f(x) = -F(-x) - \varepsilon(-x) \times (-1)^n x^n.$$

L'unicité exige suivant le cas

$$F(-x) = F(x) \quad \text{ou} \quad F(-x) = -F(x).$$

2^o THÉORÈME. — Si une fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n , elle admet un développement limité à tout ordre p inférieur à n .

En effet

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ s'écrit

$$(2) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + x^p \varepsilon_1(x).$$

La fonction $\varepsilon_1(x) = a_{p+1} x + \dots + a_n x^{n-p} + x^{n-p} \varepsilon(x)$ tend vers 0 avec x . Nous avons bien en (2) un développement limité à l'ordre p . Nous dirons qu'il est obtenu en « tronquant » le développement (1).

3^o Développement limité d'un infiniment petit. — Si $a_0 = 0$, c'est-à-dire si $f(x)$ est infiniment petit avec x , désignons par $a_p x^p$ ($a_p \neq 0$) le terme de plus bas degré de la partie régulière du développement limité de $f(x)$. La fonction f admet un développement limité à l'ordre p , réduit à

$$f(x) = a_p x^p + x^p \cdot \varepsilon_1(x).$$

Il en résulte que $f(x)$ est un infiniment petit avec x , d'ordre p , dont la partie principale est $a_p x^p$.

Écrivons d'autre part $f(x) = [a_p + \varepsilon_1(x)]x^p \quad (a_p \neq 0)$.

Il existe $\alpha > 0$ tel que $|x| < \alpha \implies |\varepsilon_1(x)| < \frac{1}{2}|a_p|$.

Sur $] -\alpha, +\alpha[$ et pour $x \neq 0$, $f(x)$ a le même signe que $a_p x^p$.

Un développement limité infiniment petit avec x a même signe que sa partie principale pour toute valeur x , autre que 0, d'un voisinage de 0.

§ 16. Développements limités usuels, obtenus par la formule de Mac-Laurin. — Les fonctions f que nous allons considérer ici admettent sur un voisinage $\mathcal{C}$ de 0 qui sera précisé dans chaque cas, des dérivées successives à un ordre quelconque. On en déduit la possibilité d'écrire, quel que soit n , la formule de Mac-Laurin à l'ordre $n-1$, avec reste de Young. Cette formule constitue un développement limité de $f(x)$, au voisinage de 0, à l'ordre n . Nous savons qu'un tel développement est unique.

Il est entendu que $\varepsilon(x)$ désigne dans ce qui suit une fonction qui tend vers 0 avec x .

1° $f(x) = e^x$. Sur $] -\infty, +\infty[$ on a, quel que soit n entier naturel,

$$f^{(n)}(x) = e^x, \text{ d'où } f^{(n)}(0) = 1;$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

CONSÉQUENCE I. — En changeant x en $-x$, on obtient

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

CONSÉQUENCE II. — Quel que soit le nombre positif a , on obtient en utilisant $a^x = e^{x \log a}$

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \dots + \frac{x^n (\log a)^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

2° $f(x) = \sin x$.⁽¹⁾ Sur $] -\infty, +\infty[$, quel que soit n entier naturel,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} \implies f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p \text{ et } f^{(2p)}(0) = 0.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$$

(1) Cet exposé suppose que les fonctions circulaires ont été introduites à l'aide du cercle trigonométrique. Le lecteur qui aura étudié l'introduction de $\sin x$ et $\cos x$ à l'aide d'une série entière (n° 276 et la suite) utilisera ici le n° 210.

$f(x) = \cos x$. Sur $] -\infty, +\infty[$, quel que soit n entier naturel,

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2} \implies f^{(2p+1)}(0) = 0 \text{ et } f^{(2p)}(0) = (-1)^p.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

3° $f(x) = (1+x)^m$, m étant une constante quelconque. Sur $] -1, +\infty[$, quel que soit p entier naturel

$$f^{(p)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)(1+x)^{m-p},$$

d'où $f^{(p)}(0) = m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)$ et

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{p!}x^p + x^p\varepsilon(x)$$

Dans le cas particulier où m est un entier positif et p au moins égal à m , le polynôme au second membre reproduit le développement de $(1+x)^m$ par la formule du binôme de Newton; dans ce cas particulier, ε est nul quel que soit x .

Cas particuliers. — a) $m = \frac{1}{2}$. Le terme $\frac{m(m-1)\dots(m-q+1)}{q!}x^q$ devient, après multiplication par 2 des q facteurs du numérateur et des q facteurs du dénominateur,

$$\frac{1 \cdot (-1) \cdot (-3) \dots (1-2q+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2q} x^q \quad \text{ou} \quad (-1)^{q-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2q-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2q} x^q, \quad \text{et}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} x^p + x^p \varepsilon(x).$$

Le changement de x en $-x$ conduit à l'égalité

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} x^p + x^p \varepsilon(x).$$

b) $m = -\frac{1}{2}$. Le terme $\frac{m(m-1)\dots(m-q+1)}{q!}x^q$ devient, après multiplication par 2 des q facteurs du numérateur et des q facteurs du dénominateur,

$$\frac{(-1) \cdot (-3) \dots (-1-2q+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2q} x^q \quad \text{ou} \quad (-1)^q \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2q-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2q} x^q, \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \dots + (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} x^p + x^p \varepsilon(x).$$

Le changement de x en $-x$ donne l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} x^p + x^p \varepsilon(x).$$

117. Opérations rationnelles sur les développements limités. —

Considérons deux fonctions f et g , définies sur le même voisinage $\mathcal{C}$ de 0, admettant des développements limités au voisinage de 0, au même ordre n ,

$$(1) \quad f(x) = F(x) + x^n \varepsilon_1(x); \quad (2) \quad g(x) = G(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

$\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_2(x)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 avec x ; $F(x)$ et $G(x)$ sont les polynômes de degré au plus égal à n

$$F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n; \quad G(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n.$$

Nous nous proposons de démontrer que les fonctions $f + g$, fg et (avec une réserve) $\frac{f}{g}$ admettent des développements limités au voisinage de 0, à l'ordre n et de calculer les parties régulières de ces développements. Rappelons que nous disposons pour ce faire du mode opératoire.

1° **Somme.** — On a (3) $f(x) + g(x) = H(x) + x^n \varepsilon(x)$
 $H = F + G$ est un polynôme tel que $d^0(H) \leq n$; $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$ tend vers 0 avec x ; (3) est ainsi un développement limité à l'ordre n .

GÉNÉRALISATION. — La même méthode conduit au résultat suivant :

THÉORÈME. — Si p fonctions f_k admettent au voisinage de 0 des développements limités à l'ordre n de parties régulières P_k , la fonction $\sum_{k=1}^p \alpha_k f_k$ admet au voisinage de 0 un développement limité dont la partie régulière est $\sum_{k=1}^p \alpha_k P_k$, et cela quelles que soient les p constantes α_k .

EXEMPLE. — Par combinaisons linéaires des développements limités de e^x et e^{-x} écrits au n° 116 on obtient, quel que soit n ,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \end{aligned}$$

2° **Produit.** — En multipliant membre à membre (1) et (2) on a

$$\begin{aligned} f(x) \times g(x) &= F(x) \times G(x) + x^n [F(x) \varepsilon_2(x) + G(x) \varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x) \varepsilon_2(x)] \\ &= F(x) \times G(x) + x^n \varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

$\varepsilon_3(x)$ tend vers 0 avec x .

Dans $F(x) \times G(x)$, polynôme de degré au plus égal à $2n$, isolons les termes de degré au plus égal à n . Ils forment le polynôme

$$P(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)x^n.$$

La somme des autres termes est de la forme $x^{n+1} Q(x)$ et on peut écrire

$$(4) \quad f(x) \times g(x) = P(x) + x^n [\varepsilon_3(x) + xQ(x)].$$

On constate que le coefficient de x^n tend vers 0 avec x ; il en résulte que (4) est un développement limité à l'ordre n de fg au voisinage de 0.

GÉNÉRALISATION. — En opérant comme dans le cas de deux fonctions on démontre :

THÉORÈME. — Si p fonctions admettent chacune un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, leur produit admet aussi un développement limité à l'ordre n . On en obtient la partie régulière en effectuant le produit des parties régulières des facteurs et en ne conservant dans le polynôme obtenu que les termes de degré au plus égal à n .

Le théorème s'applique en particulier à f^n .

REMARQUE I. — Si $f(x)$ est infiniment petit avec x , on a intérêt à mettre en facteur la puissance de x qui intervient dans sa partie principale. C'est ainsi que pour chercher le développement limité à l'ordre 9 de $\sin^7 x$ on écrit

$$\sin^7 x = x^7 \times \left(\frac{\sin x}{x}\right)^7.$$

Il suffit de chercher le développement limité à l'ordre 2 de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^7$ et pour cela de partir de $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon_1(x)$. On trouve

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^7 = 1 - \frac{7}{6}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \quad \text{et} \quad \sin^7 x = x^7 - \frac{7}{6}x^9 + x^9 \varepsilon(x).$$

REMARQUE II. — Pour calculer des développements limités de $\cos^p x$, $\sin^p x$, $\text{ch}^p x$ et $\text{sh}^p x$ (p entier naturel) on a intérêt à utiliser l'expression linéaire de ces fonctions au moyen des fonctions circulaires et hyperboliques de x et de ses multiples. C'est ainsi que l'on écrira

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}; & \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x; \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}; & \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x. \end{aligned}$$

3° **Quotient.** — Il n'est pas question de chercher un développement limité suivant les puissances de x de la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ si celle-ci est un infiniment grand avec $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire ici si la valuation du polynôme G est supérieure à celle du polynôme F .

Nous supposons que $h_0 = G(0)$ est différent de 0 (hypothèse à laquelle on peut toujours se ramener en divisant f et g par une puissance convenable de x toutes les fois que la valuation de F est au moins égale à celle de G). Nous pouvons alors diviser le polynôme F par le polynôme G suivant les puissances croissantes et à l'ordre n . On obtient ainsi

$$F(x) = G(x) \times Q(x) + x^{n+1}R(x); \quad d^0(Q) \leq n.$$

Cette égalité permet d'écrire sur le champ $\mathcal{C}$:

$$f(x) - x^n \varepsilon_1(x) = [g(x) - x^n \varepsilon_2(x)] \times Q(x) + x^{n+1} R(x)$$

ce qui est de la forme

$$f(x) = g(x) \times Q(x) + x^n \varepsilon_4(x),$$

la fonction $\varepsilon_4(x) = \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)Q(x) + xR(x)$ tendant vers 0 avec x .

Ainsi en tout point x de $\mathcal{C}$ tel que $g(x) \neq 0$ on a l'égalité

$$(5) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{\varepsilon_4(x)}{g(x)} x^n.$$

Comme $\frac{\varepsilon_4(x)}{g(x)}$, qui est équivalent à $\frac{\varepsilon_4(x)}{b_0}$, tend vers 0 avec x , (5) est un développement limité à l'ordre n de $\frac{f}{g}$ au voisinage de 0.

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — Si deux fonctions f et g admettent des développements limités au voisinage de 0, au même ordre n , de parties régulières F et G et si $G(0) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le quotient relatif à l'entier n dans la division suivant les puissances croissantes du polynôme F par le polynôme G .

EXEMPLE. — Pour calculer un développement limité à l'ordre 7 de $\operatorname{tg} x$, au voisinage de 0, partons des deux développements déjà obtenus, à l'ordre 7,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + x^7 \varepsilon_1(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^7 \varepsilon_2(x).$$

La division suivant les puissances croissantes donne

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^7 \varepsilon(x).$$

Par un calcul analogue on aboutit à

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + x^7 \varepsilon'(x).$$

CAS PARTICULIER. — Pour obtenir un développement limité au voisinage de 0, à un ordre quelconque n , d'une fraction rationnelle définie au point 0, on cherche le quotient relatif à l'entier n dans la division suivant les puissances croissantes du polynôme numérateur par le polynôme dénominateur. Rappelons que pour obtenir ce quotient, il suffit de limiter le numérateur et le dénominateur à leurs termes de degrés au plus égaux à n .

118. Intégration et dérivation d'un développement limité. —
1° THÉORÈME I. — Si la fonction f est dérivable sur un voisinage $\mathcal{C}$ de 0 et si la fonction f' admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière P , la fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre $n + 1$ dont la partie régulière est celle des primitives du polynôme P qui prend la valeur $f(0)$ au point 0.

Exprimons l'hypothèse par l'égalité :

$$(1) \quad f'(x) = P(x) + \varphi(x) \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = f'(x) - P(x),$$

$P(x)$ étant un polynôme de degré au plus égal à n et $\varphi(x)$ une fonction telle que le quotient $\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{x^n}$ tend vers 0 avec x .

Les fonctions f' et P sont définies sur $\mathcal{C}$ et elles y admettent des primitives; il en est donc de même pour leur différence φ . Les primitives de φ sont de la forme

$$f(x) - \int_0^x P(t) dt + C.$$

Désignons par Φ celle d'entre elles qui prend la valeur 0 au point 0, soit

$$(2) \quad \Phi(x) = f(x) - f(0) - \int_0^x P(t) dt.$$

$x \neq 0$ étant un point quelconque de $\mathcal{C}$, la fonction Φ est dérivable sur $[0, x]$. On peut donc lui appliquer la formule des accroissements finis, ce qui donne, compte tenu de $\Phi(0) = 0$,

$$\Phi(x) = x\Phi'(\theta x) = x\varphi(\theta x), \quad \theta \in]0, 1[$$

Comme $\theta x \neq 0$, on peut écrire $\varphi(\theta x) = (\theta x)^n \varepsilon(\theta x)$ et

$$\Phi(x) = x^{n+1} \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1(x) = \theta^n \varepsilon(\theta x).$$

On constate $|\varepsilon_1(x)| < |\varepsilon(\theta x)|$, ce qui entraîne $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$. La relation (2) s'écrit sous la forme

$$(3) \quad f(x) = f(0) + \int_0^x P(t) dt + x^{n+1} \varepsilon_1(x)$$

qui est un développement limité de f , au voisinage de 0, à l'ordre $n + 1$, puisque, d'autre part,

$$f(0) + \int_0^x P(t) dt$$

est un polynôme de degré au plus égal à $n + 1$.

2° Inversement l'existence d'un développement limité de f ne permet de tirer aucune conclusion car nous avons vu que l'existence d'un tel développement n'exige même pas l'existence de f' . Le seul théorème que nous soyons en mesure d'énoncer par identification est le suivant :

THÉOREME II. f étant une fonction dérivable sur un voisinage de 0, si f et f' admettent au voisinage de 0 des développements limités aux ordres respectifs p et $p - 1$, la partie régulière du second est la dérivée de celle du premier.

Notons que ce théorème est applicable quel que soit p si f admet sur un voisinage de 0 des dérivées successives de tous ordres puisqu'il suffit d'invoquer la formule de Taylor-Young pour justifier l'existence *a priori* des deux développements.

3° Développements limités usuels obtenus par dérivation et par intégration — Du développement de $\frac{1}{1-x}$ obtenu au n° 114 on déduit par dérivation, sans précaution spéciale,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x) \\ \frac{2}{(1-x)^3} &= 1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + \dots + (n-1).nx^{n-2} + x^{n-2}\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Dans les exemples qui suivent la possibilité théorique d'intégrer le développement — connu *a priori* — de f' provient de ce que sur tout son champ de définition, f admet des dérivées successives de tous ordres. Il y a lieu de ne pas oublier la constante d'intégration $f(0)$.

a) **Log(1 + x).** La dérivée est $\frac{1}{1+x}$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x).$$

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

Le changement de x en $-x$ donne

$$\text{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x).$$

D'où, par combinaison linéaire,

$$\text{Arg th } x = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$$

b) **Arc tg x.** La dérivée est $\frac{1}{1+x^2}$,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1} \varepsilon(x).$$

$$\text{Arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

c) Arc $\sin x$. La dérivée est $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Dans le développement limité précédemment obtenu de $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$, remplaçons x par x^2 . Compte tenu de la parité :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n}x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\text{Arc sin } x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

La relation $\text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x$ permet d'en déduire le développement limité à un ordre quelconque de $\text{Arc cos } x$ au voisinage de 0.

d) $\text{Arg sh } x = \text{Log}(x + \sqrt{1 + x^2})$. La dérivée est $(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Un calcul analogue donne

$$\begin{aligned} \text{Arg sh } x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} - \dots \\ - (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \end{aligned}$$

La question ne se pose pas pour $\text{Arg ch } x$, cette fonction n'étant pas définie sur $] -1, +1[$.

||9. **Développement limité d'une fonction composée.** — 1° Soit $y = g(u)$ avec $u = f(x)$, que l'on écrit $y = F(x)$ avec $F = g \circ f$. Nous supposons

a) que la fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , soit en supposant (ce qui est toujours possible) que $x_0 = 0$:

$$(1) \quad u = f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

b) que la fonction g admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a_0 , soit :

$$(2) \quad y = g(u) = b_0 + \sum_{p=1}^n b_p(u - a_0)^p + (u - a_0)^n \varphi(u); \quad \lim_{u \rightarrow a_0} \varphi(u) = 0.$$

c) que la fonction g est continue au point a_0 , ce qui, compte tenu de (2), se traduit par le fait que $g(a_0)$ existe et est égal à b_0 . Cette hypothèse permet d'attribuer à $\varphi(a_0)$ une valeur arbitraire; nous convenons $\varphi(a_0) = 0$, ce qui rend la fonction φ continue au point a_0 .

Dans ces conditions la fonction F admet un développement limité à l'ordre n , au voisinage de 0. En effet F est définie sur un voisinage de 0; on a

$$(u - a_0)^n \varphi(u) = x^n [a_1 + \dots + a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)]^n \varphi[f(x)] = x^n \varepsilon'(x).$$

3° **Applications.** — En général on dispose du développement limité de $u = f(x)$ au voisinage de 0, mais, sauf dans le cas favorable de $\alpha_0 = 0$ (qui est celui de l'exemple précédent), on n'a pas le développement limité de $y = g(u)$ au voisinage de $u = \alpha_0$. Nous allons voir comment, dans les cas les plus courants, il est possible de tourner cette difficulté.

a) **Développement limité d'une puissance.** — Soit f une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de 0 dont nous connaissons le développement limité à l'ordre p ,

$$(3) \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p + x^p \varepsilon(x).$$

Proposons-nous de former un développement limité de $[f(x)]^m$, m étant un nombre algébrique quelconque. Le problème ayant été traité au n° 117 quand m est un entier naturel, ce cas sera excepté ici.

1^{er} Cas. $\alpha_0 \neq 0$. — Écrivons $f(x) = \alpha_0(1 + u)$. On a, en utilisant (3),

$$(4) \quad u = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x + \dots + \frac{\alpha_p}{\alpha_0} x^p + x^p \varepsilon_1(x).$$

La fonction $(1 + u)^m$ étant définie sur le voisinage $\mathcal{C}$ de 0, $[f(x)]^m$ est définie sur $\mathcal{C}$ si et seulement si α_0^m a un sens, condition que nous supposons remplie. Nous pouvons alors écrire sur $\mathcal{C}$

$$[f(x)]^m = \alpha_0^m [1 + u(x)]^m.$$

Nous sommes ramenés à calculer le développement limité à l'ordre p , suivant les puissances de x de $[1 + u(x)]^m$, à partir de (4) et de

$$(5) \quad (1 + u)^m = 1 + \frac{m}{1!} u + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{p!} u^p + u^p \varepsilon_2(u).$$

EXEMPLE. — Cherchons un développement limité au second ordre, au voisinage de 0, de

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}. \\ \sqrt{1 - x} &= (1 - x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{(-x)}{1!} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \frac{(-x)^2}{2!} + x^2 \varepsilon(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x) \\ 1 + \sqrt{1 - x} &= 2 \left[1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} \right] + x^2 \varepsilon_1(x) \\ y &= \sqrt{2} (1 + u)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad u = -\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + x^2 \varepsilon_2(x) \\ (1 + u)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2 \varepsilon_3(u) = 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} \right) - \frac{1}{8} \left(-\frac{x}{4} \right)^2 + x^2 \varepsilon_4(x) \\ (1 + u)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128} + x^2 \varepsilon_5(x) \quad \text{et} \\ \sqrt{1 + \sqrt{1 - x}} &= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8} x - \frac{5\sqrt{2}}{128} x^2 + x^2 \varepsilon_6(x). \end{aligned}$$

2^e Cas. $\alpha_0 = 0$. — On a, quand $x \rightarrow 0$, $f(x) \sim \alpha_p x^p$,

$\alpha_p x^p$ désignant le terme de plus bas degré de la partie régulière du développement limité de $f(x)$. D'où, en se bornant aux valeurs de x pour lesquelles $(\alpha_p x^p)^m$ a un sens

$$[f(x)]^m \sim (\alpha_p x^p)^m.$$

L'ordre pm de $[f(x)]^m$ n'étant pas un entier naturel, la définition jusqu'alors considérée du développement limité ne peut s'appliquer. Mais nous verrons plus loin (120) comment on peut, dans ce cas, généraliser la notion de développement limité.

b) *Développement limité d'un logarithme.* — La meilleure méthode pour trouver un développement limité de $\text{Log}|f(x)|$ consiste en général à chercher d'abord un développement limité de la dérivée qui est $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

EXEMPLE. — Cherchons un développement limité à l'ordre 6, suivant les puissances de x , de $\text{Log}(\cos x)$. La dérivée de la fonction $\text{Log}(\cos x)$ est $-\text{tg } x$, dont nous connaissons le développement limité à l'ordre 5 :

$$-\text{tg } x = -x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{15} + x^5 \varepsilon_1(x).$$

Nous en déduisons, en tenant compte de $\text{Log}(\cos 0) = 0$,

$$\text{Log}(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + x^5 \varepsilon_1(x).$$

On peut aussi reprendre la notation précédente :

$$f(x) = \alpha_0(1 + u) \quad \text{avec} \quad (4) \quad u = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}x + \dots + \frac{\alpha_p}{\alpha_0}x^p + x^p \varepsilon_1(x).$$

L'existence de $\text{Log}|f(x)|$ au voisinage de 0 exige ici $\alpha_0 \neq 0$. Nous avons :

$$(6) \quad \text{Log}|f(x)| = \text{Log}|\alpha_0| + \text{Log}[1 + u(x)].$$

Nous sommes ramenés à chercher un développement limité à l'ordre p , de $\text{Log}[1 + u(x)]$, à partir de (4) et de

$$\text{Log}(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \dots + (-1)^p \frac{u^p}{p} + u^p \varepsilon_2(u)$$

relation qui, rappelons-le, a été obtenue par intégration.

EXEMPLE. — Reprenons $\text{Log}(\cos x)$, à l'ordre 6.

$$u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^6 \varepsilon_1(x)$$

$$\text{Log}(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \varepsilon_2(u).$$

Il est ici inutile d'aller plus loin dans le second développement car $u^4 \sim \frac{x^8}{16}$

1	u	$-\frac{x^2}{2}$	$+\frac{x^4}{24}$	$-\frac{x^6}{720}$	
$-\frac{1}{2}$	u^2		$\frac{x^4}{4}$	$-\frac{x^6}{24}$	
$\frac{1}{3}$	u^3			$-\frac{x^6}{8}$	
$\text{Log}(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + x^6 \varepsilon(x)$					

c) *Développement limité d'une exponentielle.* — Pour trouver un développement limité de $e^{f(x)}$ à partir de

$$(3) \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p + x^p \varepsilon(x)$$

nous utiliserons la formule

$$(7) \quad e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \dots + \frac{u^p}{p!} + u^p \varepsilon_1(u)$$

qui, rappelons-le, n'est valable que si u est infiniment petit avec x . Cela nous conduit à poser $f(x) = \alpha_0 + u$ avec

$$(8) \quad u = \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p + x^p \varepsilon(x)$$

et à écrire $e^{f(x)} = e^{\alpha_0} e^u$.

A partir de (8) et de (7), nous savons calculer le développement limité à l'ordre p de e^u .

EXEMPLE. — Cherchons un développement limité de l'expression $u = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ suivant les puissances de l'infiniment petit $\frac{1}{m} = z$. Nous pouvons écrire

$$(1 + xz)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{z} \text{Log}(1+xz)};$$

le développement limité de l'exposant à l'ordre 2 est

$$x - \frac{x^2}{2}z + \frac{x^3}{3}z^2 + z^2 \varepsilon(z); \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varepsilon(z) = 0.$$

Isolons le terme indépendant de z

$$u = e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}z + \frac{x^3}{3}z^2 + z^2 \varepsilon(z)}.$$

Le développement limité à l'ordre 2 du second facteur s'obtient en écrivant

$$1 + \left(-\frac{x^2}{2}z + \frac{x^3}{3}z^2 + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}z + \dots\right)^2 + \dots$$

c'est $1 - \frac{x^2}{2}z + \frac{(3x - 8)x^3}{24}z^2 + z^2 \varepsilon_1(z)$ Finalement

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x \left[1 - \frac{x^2}{2} \frac{1}{m} + \frac{3x^4 + 8x^3}{24} \frac{1}{m^2} + \frac{\varepsilon_1}{m^2}\right]; \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_1\left(\frac{1}{m}\right) = 0.$$

120. Généralisations de la notion de développement limité. —

1° Soit f une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de 0 (sauf peut être au point 0). Nous supposons que $f(x)$ n'admet pas de développement limité au voisinage de 0, mais que $x^k f(x)$ en admet un (k est un nombre réel quelconque).

Par hypothèse on peut donc écrire pour $x \neq 0$ et $x \in \mathcal{C}$:

$$x^k f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x); \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Il en résulte que l'on peut écrire dans les mêmes conditions

$$(1) \quad f(x) = x^{-k} [a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)].$$

Une telle expression, qui est susceptible d'applications analogues à celles des développements limités, est dite *développement limité généralisé*.

EXEMPLE I. $y = \sqrt{x + x^2}$ est définie sur $] -\infty, -1]$ et sur $[0, +\infty[$. Sur ce second intervalle elle s'écrit

$$y = \sqrt{x} (1 + x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \left[1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x) \right]; \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +0} \varepsilon(x) = 0.$$

EXEMPLE II. $y = \cot x$ n'est pas définie pour $x = 0$, mais on peut écrire sur $] -\pi + \pi[,$ pour $x \neq 0$

$$x \cot x = \frac{x \cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \varepsilon_2(x)} = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + x^4 \varepsilon(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

d'où l'expression, valable sur $] -\pi, +\pi[,$ pour $x \neq 0$,

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3 \varepsilon(x).$$

Elle montre en particulier que $\cot x - \frac{1}{x}$ est un infiniment petit avec x , dont la partie principale est $-\frac{x}{3}$.

2° x étant un point quelconque de $]0, \pi[,$ on a l'égalité

$$\text{Log}(\sin x) = \text{Log } x + \text{Log} \frac{\sin x}{x}.$$

Or $\text{Log} \frac{\sin x}{x}$, fonction définie sur le voisinage $] -\pi, +\pi[$ de 0 (point 0 excepté) admet un développement limité à un ordre quelconque n , soit

$$\text{Log} \frac{\sin x}{x} = P_n(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Il en résulte la possibilité d'écrire sur $]0, \pi[$

$$\text{Log} \sin x = \text{Log } x + P_n(x) + x^n \varepsilon(x); \quad \lim_{x \rightarrow +0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ici encore nous avons généralisé la notion de développement limité.

121. Application des développements limités. — 1° Recherche de la partie principale d'une somme d'infiniment petits. — Rappelons le résultat suivant (n° 49).

Pour étudier la somme S de plusieurs infiniment petits simultanés, en nombre fini, admettant chacun une partie principale, on ne retient d'abord que ceux d'entre eux qui ont l'ordre minimum p et on fait la somme Σ_p de leurs parties principales. Si $\Sigma_p \neq 0$, S admet Σ_p pour partie principale.

Si $\Sigma_p = 0$, la règle précédente permet seulement d'affirmer que S est d'ordre supérieur à p ; dans ce cas, et dans ce cas seulement, le recours aux développements limités est nécessaire. On calcule les parties régulières des développements limités à l'ordre $p + 1$ des m termes de la somme S (et non pas seulement de ceux qui ont l'ordre minimum p); si la somme Σ_{p+1} des m parties régulières obtenues n'est pas le polynôme nul on a $S \sim \Sigma_{p+1}$. Sinon on calcule des développements limités à l'ordre $p + 2$, et plus généralement à l'ordre $p + q$, q étant le plus petit entier naturel tel que la somme des m parties régulières n'est pas le polynôme nul; on a $S \sim \Sigma_{p+q}$.

EXEMPLE. — Chercher la partie principale de $S = 2(1 - \cos x) \sin x - x^3 \sqrt[4]{1 - x^2}$, qui est infiniment petit avec x .

Écrivons $S = y_1 - y_2$ avec $y_1 = 2(1 - \cos x) \sin x$ et $y_2 = x^3 \sqrt[4]{1 - x^2}$. Il s'agit de la différence de deux fonctions impaires, de même partie principale x^3 . L'ordre 5, au moins, est nécessaire. Écrivons donc

$$y_1 = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^6 \varepsilon_1(x) \right] \cdot \left[x - \frac{x^3}{6} + x^5 \varepsilon_2(x) \right] = x^3 - \frac{x^5}{4} + x^7 \varepsilon_3(x)$$

$$y_2 = x^3 (1 - x^2)^{\frac{1}{4}} = x^3 \left[1 - \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon_4(x) \right] = x^3 - \frac{x^5}{4} + x^5 \varepsilon_4(x).$$

Nous constatons que ces développements sont insuffisants et que l'ordre 7, au moins, est nécessaire. Écrivons :

$$y_1 = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + x^8 \varepsilon_5(x) \right] \cdot \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon_6(x) \right] = x^3 - \frac{x^5}{4} + \frac{x^7}{40} + x^7 \varepsilon_7(x)$$

$$y_2 = x^3 (1 - x^2)^{\frac{1}{4}} = x^3 \left[1 - \frac{x^2}{4} - \frac{3}{32} x^4 + x^4 \varepsilon_8(x) \right] = x^3 - \frac{x^5}{4} - \frac{3}{32} x^7 + x^7 \varepsilon_8(x).$$

Nous en déduisons

$$S = \left(\frac{1}{40} + \frac{3}{32} \right) x^7 + x^7 \varepsilon(x) \quad \text{ou} \quad S \sim \frac{19}{160} x^7.$$

2° Étude d'une somme d'infiniment grands. — Ce qui vient d'être dit à propos d'infiniment petits s'applique avec de légères modifications à une somme S d'infiniment grands. On ne retient d'abord que les termes de la somme S qui ont l'ordre maximum p . On fait la somme Σ_p de leurs parties principales.

Si $\Sigma_p \neq 0$ on a $S \sim \Sigma_p$.

Si $\Sigma_p = 0$, S peut être un infiniment grand d'ordre inférieur à p mais peut aussi ne pas être un infiniment grand. Dans certains cas S est même un infiniment petit. On utilise alors des développements limités généralisés.

EXEMPLE I. — Étudier $S = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + px^2 + q}$ quand $x \rightarrow \infty$.

a) Lorsque $x \rightarrow +\infty$, chacun des radicaux est un infiniment grand équivalent à x ;

$$S \sim 2x, \quad S \rightarrow +\infty.$$

b) Lorsque $x \rightarrow -\infty$, S se présente sous la forme indéterminée $\infty - \infty$. Le premier radical est équivalent à $-x$, le second à x ; la somme des parties principales est nulle, faisons un développement limité généralisé de chacun des radicaux :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon_1(x)}{x}$$

$$\sqrt[3]{x^3 + px^2 + q} = x \left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} = x + \frac{p}{3} - \frac{p^2}{9} \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon_2(x)}{x}$$

$$S = \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{x} \left(-\frac{3}{8} - \frac{p^2}{9} \right) + \frac{\varepsilon(x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} S = \frac{p}{3} - \frac{1}{2};$$

si $p = \frac{3}{2}$, S est un infiniment petit dont la partie principale est $-\frac{5}{8} \frac{1}{x}$.

EXEMPLE II. — Étudier $S = \sqrt[4]{\text{Log}(\text{sh } x)} - \sqrt[4]{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

$\text{sh } x$ et e^x sont des infiniment grands du même ordre quand $x \rightarrow +\infty$ (puisque le

quotient $\frac{\operatorname{sh} x}{e^x}$ admet la limite $\frac{1}{2}$. Il en résulte $\operatorname{Log}(\operatorname{sh} x) \sim \operatorname{Log} e^x = x$. S est ainsi la différence de deux infiniment grands de même partie principale x^1 . Nous allons éviter le recours aux développements limités par un artifice.

Ecrivons

$$S = y_1 - y_2 \quad \text{et} \quad y_1 - y_2 = \frac{y_1^3 - y_2^3}{y_1^3 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 + y_2^3}.$$

Le dénominateur de la fraction est équivalent à $4x^3$; le numérateur est

$$\operatorname{Log}(\operatorname{sh} x) - x = \operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} x}{e^x},$$

qui admet la limite $-\operatorname{Log} 2$. Il en résulte que S est un infiniment petit équivalent à

$$-\frac{\operatorname{Log} 2}{4x^3}.$$

3° Formes indéterminées. — C'est dans l'étude des formes indéterminées (51) que l'on trouve l'occasion de mettre en pratique l'étude des infiniment petits et des infiniment grands. Dans les exemples qui précèdent nous avons eu l'occasion d'étudier deux formes indéterminées $\infty - \infty$. Voici pour terminer, d'autres exemples.

EXEMPLE I. — Étudier $y = \frac{2(1 - \cos x) \sin x - x^3 \sqrt{1 - x^2}}{\sin^p x - x^p}$ quand $x \rightarrow 0$ ($p \in \mathbb{N}$).

Le numérateur, étudié au 1°, a pour partie principale $\frac{19}{160}x^7$.

Le dénominateur, qui s'écrit $x^p \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^p - 1 \right]$, est un infiniment petit d'ordre $p + 2$. D'où

a) $p < 5$. y est un infiniment petit d'ordre $5 - p$ par rapport à x .

b) $p > 5$. y est un infiniment grand d'ordre $p - 5$ par rapport à $\frac{1}{x}$.

c) $p = 5$. Le dénominateur a pour partie principale $-\frac{5}{6}x^7$; $\lim_{x \rightarrow 0} y = -\frac{57}{400}$.

EXEMPLE II. — Étudier $y = \frac{x^p - (\sin x)^{\sin x}}{x^p}$ quand x tend vers $+0$ ($p \in \mathbb{N}$).

Le numérateur u est la différence de deux fonctions qui admettent la limite commune 1. Il s'écrit :

$$u = 1 - x^p [e^{\sin x \operatorname{Log}(\sin x) - x \operatorname{Log} x} - 1]$$

u est un infiniment petit équivalent à

$$z = x \operatorname{Log} x - \sin x \operatorname{Log}(\sin x).$$

Nous pouvons écrire, pour $x > 0$,

$$\frac{z}{x} = \operatorname{Log} x - \left(1 - \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon\right) \operatorname{Log} \sin x = -\operatorname{Log} \frac{\sin x}{x} + \left(\frac{x^2}{6} - x^2 \varepsilon\right) \operatorname{Log} \sin x.$$

$\frac{z}{x}$ est la différence de deux infiniment petits respectivement équivalents à $\frac{x^2}{6}$ et à $\frac{x^2}{6} \operatorname{Log} x$. On a donc

$$\frac{z}{x} \sim \frac{x^2}{6} \operatorname{Log} x \quad \text{et} \quad y \sim \frac{\operatorname{Log} x}{6x^{p-3}}.$$

Quand $x \rightarrow +0$, $y \rightarrow 0$ si $p < 3$; $y \rightarrow -\infty$ si $p > 3$.

EXERCICES

1. — Former les développements limités des fonctions suivantes :

a) au voisinage de 0 :

$$\operatorname{Log} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \text{ (à l'ordre 5);}$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} \text{ (à l'ordre 3).}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{1 - x} \text{ (à l'ordre 3);}$$

$$\exp\left(\frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x}}\right) \text{ (à l'ordre 2)}$$

b) au voisinage de l'infini : $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$ (à l'ordre 3)

c) au voisinage de $\frac{\pi}{4}$: $\sqrt{\operatorname{tg} x}$ (à l'ordre 2)

d) au voisinage de $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $\frac{(\sin x)^a}{(\sin a)^a}$ (à l'ordre 2).

2. — Trouver les parties principales éventuelles des infiniment petits suivants :

a) quand x tend vers 0 : $\operatorname{ch} x - \frac{12 + 5x^2}{12 - x^2}$

$$\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x);$$

$$\operatorname{th}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\operatorname{th} x)$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{sh}(\sin x) - \operatorname{Arc} \sin(\operatorname{sh} x);$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{th}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(\operatorname{th} x).$$

b) quand l'entier naturel n devient infini :

$$\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1};$$

$$\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n-1]{a} - 2\sqrt[n]{a}.$$

3. x étant l'infiniment petit principal, déterminer les constantes a, b, c, d , de façon que

$$(\cos x)^{\cot x} + a + bx + cx^2 + dx^3$$

soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible et calculer la partie principale de cet infiniment petit. Même question pour

$$\frac{x}{\sin x} + a \operatorname{Log} |\cos x| + b \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x} + c \operatorname{tg}^2 x + d;$$

$$\frac{ax + bx^2}{1 + cx^2} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x; \quad x - \frac{a + b \cos x}{c + d \cos x} \sin x.$$

Déterminer des constantes a, b, c , de façon que l'excès de

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 \operatorname{Log} \cos \frac{x}{2} \quad \text{sur} \quad \frac{a}{\pi - x} + b + c \operatorname{Log}(\pi - x)$$

tende vers 0 quand x tend vers $\pi - 0$.

4. — La fonction $f(x) = 1 + 2x + x^2 + 4x^3 + x^5 \sin \frac{1}{x}$ admet-elle un développement limité, au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 3? à l'ordre 4? à l'ordre 5?

Mêmes questions pour les fonctions :

$$g(x) = 3 - \frac{5}{2}x + \frac{2}{3}x^2 - x^3 + x^{x+5}$$

$$h(x) = x - x^3 + x^4 - x^5 \operatorname{Log} x.$$

5. — Former le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction

$$\sqrt{1+x}.$$

Vérifier que, quel que soit le nombre positif x , on a

$$0 < \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} < \frac{x^3}{16}.$$

6. — Démontrer que la fonction $y = \frac{1}{x} \text{Log}(\text{ch } x)$ admet un développement limité à l'ordre n quelconque au voisinage de $+\infty$. En déduire qu'il en est de même pour la fonction $z = e^x$, et déterminer la partie régulière de ce dernier développement. Étudier le même problème si $x \rightarrow -\infty$.

7. — Calculer la limite éventuelle, quand x tend vers 0, de chacune des fonctions suivantes (a et b désignent des nombres donnés) :

$$\frac{\text{Log}(\cos ax)}{\text{Log}(\cos bx)}; \quad \frac{\text{sh } x + \sin x - 2x}{x(\text{ch } x + \cos x - 2)}; \quad \frac{a^{(x^x)} - a}{a^x - 1}; \quad \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1};$$

$$\frac{(\sin x)^{\text{sh } x} - (\text{sh } x)^{\sin x}}{(\text{tg } x)^{\text{th } x} - (\text{th } x)^{\text{tg } x}}; \quad (x + \sqrt{1 + x^2})^{\cos x}; \quad \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}; \quad \frac{1}{x^{(x - \text{Log } x)^a}};$$

$$\frac{\alpha^\beta - \beta^\alpha}{\alpha - \beta} \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{1 + 3 \frac{\sin x}{\text{sh } x}}, \quad \beta = 2 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

8. — Calculer la limite éventuelle, quand x tend vers 1, de chacune des fonctions suivantes :

$$\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \text{tg } \frac{\pi x}{4}}; \quad \frac{1 - \log_{10}(x+9)}{e^{\sin \pi x} + \cos \pi x}; \quad \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos \frac{\pi x}{2}}.$$

9. — Calculer la limite éventuelle, quand x tend vers a , de chacune des fonctions suivantes :

$$\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\text{tg } \frac{\pi x}{2a}}; \quad \frac{x^a - a^a}{\sin(x-a)}; \quad \frac{x^a - a^a}{\log_a x - \log_a a}; \quad \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\log_a x - 1}.$$

10. — Calculer la limite éventuelle, quand x devient infini, de chacune des fonctions suivantes (a est un nombre donné) :

$$\text{sh } \sqrt{x^2 + x} - \text{sh } \sqrt{x^2 - x}; \quad x - \text{Log ch } (\text{ch } x); \quad (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}$$

$$x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e x^2 \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right); \quad x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right); \quad e^{-2x \text{th } x} \text{sh } x; \quad \sqrt[3]{\text{Log sh } x} - \sqrt[3]{x}$$

$$\left[\left(\frac{\text{Log}(x+1)}{\text{Log } x}\right)^x - 1\right] \text{Log } x; \quad \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 1}}}{x}; \quad a^x \text{ch } x; \quad \left(\cos \frac{a}{x}\right)^x$$

$\frac{\text{ch}(x-1)}{\text{ch } x}; e^{\frac{n}{x}}$ (n est le nombre des chiffres de la partie entière de x).

11. — Calculer la limite éventuelle, quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, de chacune des fonctions suivantes :

$$\cos x \cdot e^{\frac{1}{1 - \sin x}}; \quad \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{Log}(\sin x)}; \quad [1 - e^{\cot x}]^{\pi - 2x}; \quad \frac{1}{\cos x (\cos x + \sin x)} - \text{Log}(1 + \text{tg } x);$$

$$(\sin x - 1)e^{\text{tg } x}; \quad \left(\text{tg } \frac{x}{2}\right)^{\text{tg } x}$$

12. — Calculer la limite éventuelle, quand l'entier naturel n devient infini, de chacune des expressions suivantes (a et b sont des nombres donnés) :

$$n(\sqrt[n]{3} - 1); \quad \sqrt[n]{\text{ch } n}; \quad (\text{th } n)^n; \quad (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n; \quad \left[\frac{\cos\left(a + \frac{b}{n}\right)}{\cos a}\right]^n;$$

$$\text{tg}^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{n}\right); \quad \frac{2n+1}{\sqrt{1+a^{2n+1}}}; \quad n^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n}{n-1}}; \quad \frac{(n^{\sqrt{n}} - \text{th } n)n^a}{\text{Arg sh } n}.$$

CHAPITRE X

PRATIQUE DE L'ÉTUDE D'UNE FONCTION

I. ÉTUDE LOCALE D'UNE FONCTION

Dans ce chapitre il ne sera question que de fonctions réelles d'une variable réelle.

122. Extremum. — 1^o DÉFINITION. — On dit que la fonction f définie sur un voisinage du point x_0 présente en ce point un maximum relatif (resp. minimum relatif) au sens large s'il existe un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ sur lequel on a

$$f(x) \leq f(x_0) \quad [\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)]$$

La dénomination d'*extremum* s'applique aussi bien à un maximum relatif qu'à un minimum relatif.

Si, x étant distinct de x_0 , les inégalités précédentes sont strictes, on dit que l'*extremum* est strict.

REMARQUE. — On notera qu'une fonction peut atteindre en un point x_0 une borne supérieure (resp. inférieure) sans présenter pour cela un *extremum* en x_0 : c'est ce qui se passe aux points a et b dans le cas d'une fonction continue et monotone sur le segment $[a, b]$.

EXEMPLES. — La fonction x^2 présente un minimum *au sens strict* au point 0. La fonction f définie par

$$f(x) = x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right| \quad \text{si } x \neq 0; \quad f(0) = 0$$

présente un minimum *au sens large* au point 0, puisque sur tout intervalle $] -\alpha, +\alpha[$ on a $f(x) \geq f(0)$, l'égalité ayant lieu en une infinité de points (pour $x = \frac{1}{k\pi}$, k entier différent de 0).

2^o THÉORÈME. — Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que la fonction f dérivable au point x_0 présente un *extremum* en ce point est $f'(x_0) = 0$.

La condition est nécessaire : la démonstration a été donnée à propos du théorème de Rolle au n^o 76.

La condition n'est pas suffisante : considérons par exemple la fonction $f(x) = x^3$. On a $f'(0) = 0$ et pourtant la fonction ne présente pas un *extremum* au point 0 puisque

$$\forall \alpha > 0, \quad f(x) > f(0) \quad \text{sur }]0, \alpha] \quad \text{et} \quad f(x) < f(0) \quad \text{sur } [-\alpha, 0[.$$

REMARQUE. — Une fonction f peut présenter un extremum en un point x_0 sans être dérivable en ce point. C'est ainsi que la fonction $f(x) = |x|$ présente un minimum au point 0 alors qu'elle n'est pas dérivable en ce point (elle y admet une dérivée à droite égale à $+1$ et une dérivée à gauche égale à -1).

3° Les points en lesquels une fonction donnée f présente un extremum sont donc à chercher exclusivement parmi :

a) les points x tels que $f'(x)$ n'existe pas;

b) les points x tels que $f'(x) = 0$.

Inversement, x_0 étant l'un de ces points, pour savoir si $f(x_0)$ est effectivement un extremum, on étudie la variation de la fonction f sur un voisinage de x_0 .

En particulier si $f'(x)$ existe et est positif (resp. négatif) à gauche de x_0 et négatif (resp. positif) à droite de x_0 , $f(x_0)$ est un maximum (resp. minimum).

On peut aussi chercher un développement limité de $f(x)$ suivant les puissances de $x - x_0$, soit

$$(1) \quad f(x) - f(x_0) = [a_p + \varepsilon(x)] (x - x_0)^p; \quad a_p \neq 0; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Il existe alors (n° 115, 3°) $\alpha > 0$ tel que pour $0 < |x - x_0| < \alpha$, $f(x) - f(x_0)$ a le signe de sa partie principale $a_p(x - x_0)^p$.

Si p est impair, $f(x) - f(x_0)$ a des signes contraires sur $]x_0 - \alpha, x_0[$ et sur $]x_0, x_0 + \alpha[$; il n'y a pas d'extremum au point x_0 . Si p est pair, sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et pour $x \neq x_0$, $f(x) - f(x_0)$ a le même signe que a_p . La fonction f présente au point x_0 un minimum si $a_p > 0$ et un maximum si $a_p < 0$.

En particulier si f admet des dérivées successives au point x_0 et si p est l'ordre de la première dérivée non nulle en ce point, la formule de Taylor-Young fournit le développement limité de la forme (1), soit :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^p \left[\frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0) + \varepsilon(x) \right].$$

La fonction f présente ou ne présente pas d'extremum au point x_0 suivant que p est pair ou impair. Le résultat usuel à retenir est

$$f'(x_0) = 0 \text{ et } f''(x_0) > 0 \implies f(x_0) \text{ est un minimum}$$

$$f'(x_0) = 0 \text{ et } f''(x_0) < 0 \implies f(x_0) \text{ est un maximum.}$$

123. Concavité et convexité locales. — Soit (Γ) le graphe de la fonction f et M_0 le point de (Γ) d'abscisse donnée x_0 . Nous supposons ici que $f'(x_0)$ existe c'est-à-dire que (Γ) admet au point x_0 une tangente (t_0) non parallèle à Oy . Les ordonnées des points M et T d'abscisse x sur (Γ) et sur (t_0) sont respectivement (fig. 47)

$$\overline{HM} = f(x) \quad \text{et} \quad \overline{HT} = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Le point M appartient à l'un ou l'autre des deux demi-plans déterminés par la droite (t_0) suivant le signe de

$$\overline{TM} = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0),$$

fonction que nous désignerons par $g(x)$. Cette étude permet de constater l'équivalence des deux définitions suivantes :

DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE. — On dit qu'au point M_0 où il admet la tangente (t_0) le graphe (Γ) de la fonction f tourne sa convexité (resp. sa concavité) vers les y négatifs s'il existe un nombre $\alpha \neq 0$ tel que les arcs de (Γ) correspondant à $]x_0 - \alpha, x_0[$ et $]x_0, x_0 + \alpha[$ soient tous deux situés au-dessus (resp. au-dessous) de (t_0) , c'est-à-dire dans celui des demi-plans séparés par (t_0) qui contient les points $x = x_0$, $y > f(x_0)$ [resp. $y < f(x_0)$].

D'après cette définition, les expressions « au-dessus » et « au-dessous » sont relatives à un observateur placé très loin sur la partie négative de Oy , et regardant vers la partie positive de Oy ; elles peuvent donc être utilisées quelle que soit dans le plan la disposition des axes Ox et Oy .

DÉFINITION ANALYTIQUE. — On dit que la fonction f , dérivable au point x_0 , est localement convexe (resp. concave) en ce point si la fonction

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)$$

présente un minimum (resp. un maximum) au sens strict au point x_0 .

En résumé le lecteur notera la convention (qui sera reprise à propos de la convexité globale)

f convexe	$\iff$	(Γ) tourne sa	convexité	(fig. 47, I)	} vers les y négatifs
f concave	$\iff$	(Γ) tourne sa	concavité	(fig. 47, II)	

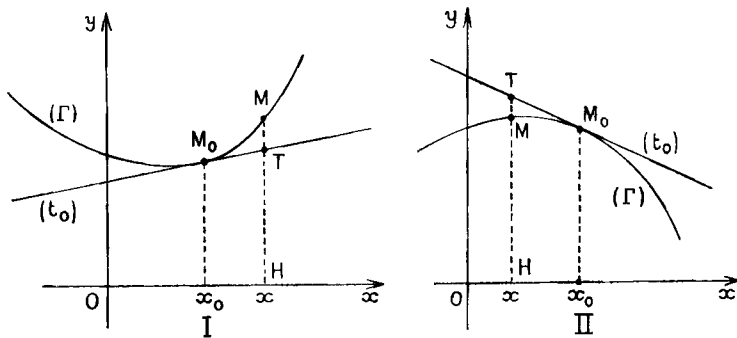


FIG. 47.

Les adjectifs « convexe » et « concave » concernent l'apparence qu'a le graphe (Γ) , au voisinage de M_0 , pour l'observateur considéré ci-dessus, placé très loin sur la partie négative de Oy , et dont le regard va dans le sens positif de l'axe Oy .

Ajoutons la définition suivante (fig. 47, III et IV) :

DÉFINITION. — On dit que M_0 est point d'inflexion géométrique du graphe (Γ) de la fonction f qui y admet la tangente (t_0) s'il existe un nombre $\alpha \neq 0$ tel que les arcs de (Γ) correspondant à $]x_0 - \alpha, x_0[$ et à $]x_0, x_0 + \alpha[$ soient de part et d'autre de (t_0) .

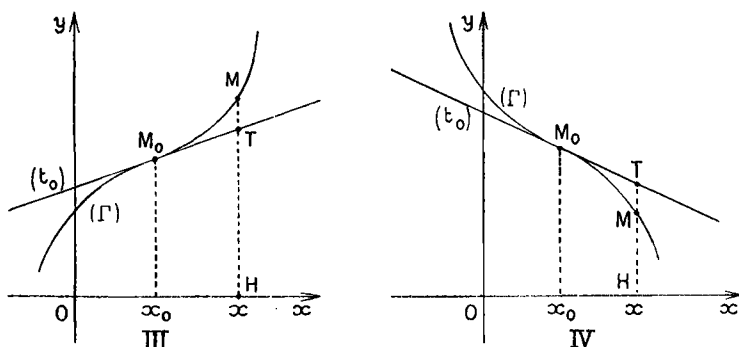


FIG. 47.

En nous limitant au cas où la fonction f admet des dérivées successives au point x_0 et en remarquant que

$$g'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad g^{(q)}(x_0) = f^{(q)}(x_0) \text{ pour } q \geq 2,$$

l'étude précédente nous apprend que, $f^{(p)}$ désignant la première dérivée qui suit f' et qui vérifie $f^{(p)}(x_0) \neq 0$

p pair et $f^{(p)}(x_0) > 0 \implies f$ est localement convexe au point x_0

p pair et $f^{(p)}(x_0) < 0 \implies f$ est localement concave au point x_0

p impair $\implies M_0$ est point d'inflexion géométrique de (Γ) .

CONSÉQUENCE. — Les abscisses des points d'inflexion géométrique de (Γ) doivent être cherchées parmi

a) les points x tels que $f''(x)$ n'existe pas,

b) les points x tels que $f''(x) = 0$ (quelquefois appelés points d'inflexion analytique).

C'est ainsi que le graphe de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ admet l'origine pour point d'inflexion géométrique, avec Oy pour tangente, alors que $f'(0)$ et a fortiori $f''(0)$ n'existent pas.

REMARQUE I. $f^{(p)}$ est la dérivée d'ordre $p-1$ de f' , coefficient directeur de la tangente; en un point d'inflexion géométrique tel que $f^{(p)}(x_0) \neq 0$, p impair, la première dérivée de f' qui ne prend pas la valeur 0 est d'ordre $p-1$, pair; f' passe par un extremum.

REMARQUE II. — Il peut arriver qu'en un point x_0 où la fonction f est dérivable aucun des quatre schémas de la figure 47 ne s'applique. C'est ainsi que la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0; \quad f(0) = 0$$

est dérivable au point $x_0 = 0$, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. Le graphe admet à l'origine la tangente Ox , mais sur tout intervalle $[0, \alpha]$ il traverse une infinité de fois cette tangente; on a eu effet $f(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{k\pi}$, k entier différent de 0, et

$$\sin \frac{1}{x} > 0 \text{ pour } x \in \left] \frac{1}{(2p+1)\pi}, \frac{1}{2p\pi} \right[, \quad \sin \frac{1}{x} < 0 \text{ pour } x \in \left] \frac{1}{2p\pi}, \frac{1}{(2p-1)\pi} \right[.$$

124. **Sous-tangente. Sous-normale.** — DÉFINITIONS. — Soit (Γ) une courbe plane et soit $x'x$ un axe tracé dans son plan. On appelle sous-tangente et sous-normale en M à la courbe relativement à l'axe $x'x$ les valeurs algébriques des projec-

tions orthogonales sur $x'x$ des vecteurs qui ont pour origine M et pour extrémités respectives les intersections de $x'x$ avec la tangente et la normale en M à la courbe.

Calcul de la sous-tangente et de la sous-normale relatives à l'axe des abscisses dans le cas du graphe (Γ) d'une fonction f .

Nous supposons que le repère est orthonormé et nous désignons respectivement par P, T, N la projection orthogonale du point M (x, y) de (Γ) sur $x'x$ et les intersections de cet axe avec la tangente et la normale à (Γ) en M (fig. 48). Solent

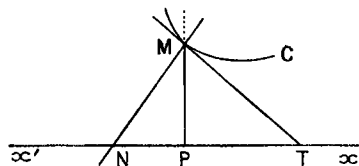


FIG. 48.

$$t = \overline{PT} \quad \text{et} \quad n = \overline{PN}$$

la sous-tangente et la sous-normale en M relativement à $x'x$.

Si l'origine des coordonnées était en T, l'équation de la tangente serait

$Y = y'X$; pour $X = \overline{TP}$ ou $X = -t$, Y a pour valeur y ; donc $t = -\frac{y}{y'}$.

Si l'origine des coordonnées était en N, l'équation de la normale serait $Y = -\frac{X}{y'}$; pour $X = \overline{NP}$ ou $X = -n$, Y a pour valeur y , donc $n = yy'$.

En résumé, la sous-tangente et la sous-normale en M sont données par les formules

$$\boxed{t = -\frac{y}{y'}} \quad \boxed{n = yy'}$$

II. — FONCTIONS CONVEXES, CONCAVES

125. — Nous introduirons successivement, dans ce sous-chapitre, sous forme géométrique, puis sous forme analytique, une notion globale (c'est-à-dire valable sur tout un arc ou sur tout un intervalle) de convexité et de concavité.

1^o **Arc convexe, arc concave.** — DÉFINITION. — Soit (Γ) le graphe de la fonction f définie sur l'intervalle I. On dit que (Γ) est convexe (resp. concave) vers les y négatifs, si tout arc M_1M_2 de (Γ) est situé au dessous (resp. au dessus) de la droite M_1M_2 , c'est-à-dire dans celui des demi-plans séparés par cette droite qui contient les points $x = x_1$, $y < f(x_1)$ [resp. $y > f(x_1)$].

THÉORÈME I. — Si une fonction f admet sur l'intervalle I une dérivée seconde strictement positive (resp. négative), le graphe (Γ) de la fonction f sur I est convexe (resp. concave) vers les y négatifs.

En effet considérons deux nombres quelconques x_1 et x_2 de I , auxquels sont associés (fig. 49) les points M_1 et M_2 de (Γ) .

$y = mx + n$ étant l'équation de la droite M_1M_2 , étudions sur $[x_1, x_2]$ le signe de la fonction

$$\varphi(x) = \overline{QM} = f(x) - (mx + n).$$

Calculons

$$\varphi'(x) = f'(x) - m \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = f''(x).$$

Comme $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, le théorème de Rolle entraîne l'existence d'au moins un point c de $]x_1, x_2[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Par ailleurs la fonction $\varphi'(x)$ est monotone sur I puisque sa dérivée a un signe fixe; le zéro c de φ' est unique. Les tableaux suivants fournissent la variation de la fonction φ :

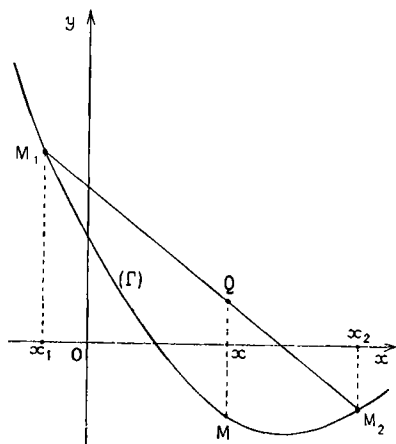


FIG. 49.

$$f''(x) > 0$$

x	x_1	c	x_2
$\varphi'(x)$	—	0	+
$\varphi(x)$	0 $\searrow$	μ	$\nearrow$ 0

$$f''(x) < 0$$

x	x_1	c	x_2
$\varphi'(x)$	+	0	—
$\varphi(x)$	0 $\nearrow$	μ	$\searrow$ 0

L'arc M_1M_2 de (Γ) est donc situé au-dessous de la droite M_1M_2 si $f''(x) > 0$, au-dessus si $f''(x) < 0$, ce qui démontre la proposition.

EXEMPLES. — Le graphe de la fonction définie par $f(x) = e^x$ (resp. $g(x) = \text{Log } x$) est convexe (resp. concave) vers les y négatifs, puisque $f''(x) = e^x$ est positive (resp. $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ est négative).

THÉORÈME II. — Si une fonction f admet sur I une dérivée seconde positive (resp. négative) le graphe (Γ) de la fonction f sur I est situé au-dessus (resp. au-dessous) de la tangente (t_0) en l'un quelconque de ses points M_0 .

Du fait que la concavité locale est connue en M_0 , la proposition est établie pour l'arc de (Γ) correspondant à un intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

Plus généralement, M et T étant les points d'abscisse x sur (Γ) et sur (t_0) reprenons la fonction (fig. 50)

$$\text{TM} = g(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0).$$

La formule de Taylor-Lagrange sur $[x_0, x]$ donne

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 g''(\xi), \quad \xi \in]x_0, x[,$$

ce qui, compte tenu de $g(x_0) = g'(x_0) = 0$ et de $g''(x) = f''(x)$, s'écrit

$$\overline{TM} = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi)$$

et entraîne

$$\overline{TM} > 0 \quad \text{si} \quad f''(x) > 0 \quad \text{sur} \quad I, \quad \overline{TM} < 0 \quad \text{si} \quad f''(x) < 0 \quad \text{sur} \quad I.$$

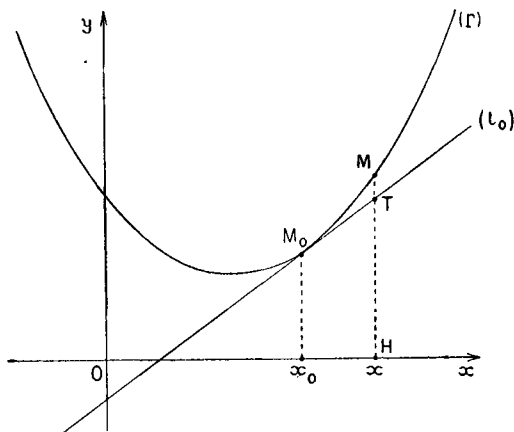


FIG. 50.

2° Fonctions convexes. — a) **DÉFINITION.** — On dit que la fonction f , définie sur l'intervalle I , est convexe si x_1, x_2 étant deux points distincts quelconques de I et h étant la fonction affine définie par $h(x_1) = f(x_1)$, $h(x_2) = f(x_2)$, on a

$$\forall x \in [x_1, x_2], \quad f(x) \leq h(x).$$

Si la fonction $-f$ est convexe, on dit que la fonction f est concave; il revient au même de dire que, pour tout x de $[x_1, x_2]$, $f(x) \geq h(x)$, h étant la fonction affine prenant pour x_1 et x_2 les mêmes valeurs que f .

Si $M_1[x_1, f(x_1)]$, $M_2[x_2, f(x_2)]$ désignent deux points du graphe (Γ) de f sur l'intervalle I , d'après le n° 146 du tome III tout point du segment M_1M_2 a pour coordonnées

$$\begin{cases} x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \\ y = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \end{cases} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

si bien que la condition de convexité pour la fonction f peut se noter :

pour tout couple x_1, x_2 de points distincts appartenant à I ,

$$\forall \alpha \in [0, 1], \quad f[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

b) **THÉORÈME.** — Si une fonction f est convexe sur un intervalle ouvert I , elle admet en tout point x_0 de I une dérivée à droite et une dérivée à gauche; f est continue en x_0 .

Soit μ la fonction définie sur $I - \{x_0\}$ par :

$$\mu(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad x_0 \in I.$$

Nous allons démontrer que la fonction μ est croissante.

Soit x et x' deux points quelconques de $I - \{x_0\}$.

α) Supposons $x_0 < x < x'$; il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$x = \alpha x_0 + (1 - \alpha)x'$$

et l'hypothèse de convexité entraîne

$$f(x) \leq \alpha f(x_0) + (1 - \alpha)f(x')$$

ou, en retranchant $f(x_0)$ à chacun des deux membres

$$f(x) - f(x_0) \leq (1 - \alpha)[f(x') - f(x_0)]$$

en divisant chacun des deux membres de l'inégalité précédente par les nombres positifs égaux $x - x_0$ et $(1 - \alpha)(x' - x_0)$ on obtient

$$\mu(x) \leq \mu(x')$$

β) En supposant $x' < x < x_0$, le même calcul donne, $x - x_0$ et $(1 - \alpha)(x_0 - x')$ étant maintenant négatifs,

$$\mu(x) \geq \mu(x').$$

γ) Supposons $x < x_0 < x'$; il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$x_0 = \alpha x + (1 - \alpha)x'$$

et l'hypothèse de convexité entraîne

$$f(x_0) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x')$$

ou

$$\alpha[f(x_0) - f(x)] \leq (1 - \alpha)[f(x') - f(x_0)]$$

En divisant chacun des deux membres de l'inégalité précédente par les nombres positifs égaux $\alpha(x_0 - x)$ et $(1 - \alpha)(x' - x_0)$, on obtient

$$\mu(x) \leq \mu(x').$$

En résumé, la fonction μ est croissante (au sens large) sur $I - \{x_0\}$.

La restriction de μ à la partie de I située à gauche de x_0 , qui est croissante et majorée par $\mu(x_1)$, x_1 étant un nombre fixe supérieur à x_0 , admet donc (n° 58, 1°, Rq. II) une limite à gauche, qui est la dérivée à gauche, en x_0 , pour la fonction f . On prouve de la même façon l'existence d'une dérivée à droite.

Enfin $f(x) - f(x_0)$, qui est $(x - x_0)\mu(x)$, admet pour limite 0 quand x vers x_0 , soit à gauche, soit à droite; la continuité de f au point x_0 en résulte.

c) CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE CONVEXITÉ. — Si la fonction f est convexe sur l'intervalle I , elle est continue en tout point x_0 de I , et, en appliquant la condition écrite en a) pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

Montrons que ces conditions entraînent, réciproquement, la convexité de f quand cette fonction est continue.

THÉORÈME. — Si la fonction f est continue sur l'intervalle I , et si, quels que soient les points x et x' de I ,

$$f\left(\frac{x + x'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(x')],$$

la fonction f est convexe sur I .

Soit a et b deux points quelconques de I , et x un point arbitraire de $[a, b]$ ($a < b$). Procédons, comme au n° 54, 3° par dichotomies successives; nous appelons $[a_1, b_1]$ celui des deux segments $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ qui contient x ; en réitérant, nous avons un

segment $[a_n, b_n]$, de mesure $\frac{b-a}{2^n}$, qui contient x ; les segments emboîtés $[a_n, b_n]$ sont tels que x est limite commune des suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$.

$$a_n = a + k \frac{b-a}{2^n} = \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)a + \frac{k}{2^n}b$$

k étant un entier naturel au plus égal à $2^n - 1$

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n} = \left(1 - \frac{k+1}{2^n}\right)a + \frac{k+1}{2^n}b.$$

On constate que ces points peuvent se noter $(1-\lambda)a + \lambda b$, λ étant une fraction de dénominateur 2^n , inférieur à 1.

Montrons, par récurrence, que la relation de convexité

$$(1) \quad f[(1-\lambda)a + \lambda b] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

est vérifiée par tous les points considérés.

Supposons donc (hypothèse de récurrence) l'inégalité (1) vérifiée pour n donné et $\lambda = \frac{k}{2^n}$ ($k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$). Appliquons alors l'hypothèse de l'énoncé

$$(2) \quad f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(a_n) + f(b_n)].$$

$$(3) \quad \frac{a_n + b_n}{2} = \left(1 - \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)a + \frac{2k+1}{2^{n+1}}b.$$

$$(4) \quad f(a_n) \leq \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(a) + \frac{k}{2^n}f(b)$$

$$f(b_n) \leq \left(1 - \frac{k+1}{2^n}\right)f(a) + \frac{k+1}{2^n}f(b).$$

$$(5) \quad \frac{1}{2}[f(a_n) + f(b_n)] \leq \left(1 - \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)f(a) + \frac{2k+1}{2^{n+1}}f(b).$$

En portant dans (2) les expressions fournies par (3) et (5), on démontre que l'égalité (1) est vérifiée pour $n+1$, quel que soit $\lambda = \frac{k}{2^{n+1}}$ ($k = 1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1$).

Il existe un nombre $\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$x = (1-\alpha)a + \alpha b;$$

puisque a_n tend vers x , $\frac{k}{2^n}$ tend vers α quand n devient infini.

L'inégalité (4) devient, à cause de la continuité de f au point x , quand n tend vers l'infini,

$$(6) \quad f[(1-\alpha)a + \alpha b] \leq (1-\alpha)f(a) + \alpha f(b),$$

L'inégalité (6) est celle qui exprime la convexité de f sur I .

***EXERCICE.** — Soit G le centre des moyennes distances des points $A_1, \dots, A_n$ du graphe (Γ) de la fonction concave $\text{Log } x$. Les coordonnées (ξ, η) de G sont les moyennes arithmétiques des coordonnées $(a_i, \text{Log } a_i)$ des points M_i , soit

$$\xi = \frac{1}{n} \sum a_i; \quad \eta = \frac{1}{n} \sum \text{Log } a_i = \frac{1}{n} \text{Log}(\Pi a_i).$$

La construction de proche en proche du barycentre qui fait intervenir un point $A_{1,2}$ du segment A_1A_2 , puis un point $A_{1,2,3}$ du segment $A_{1,2}A_3$, ... montre que tous les points intermédiaires sont au-dessous de (Γ) . Il en est de même pour G . Autrement dit la paral-

lèle menée de G à Oy rencontre (Γ) en un point dont l'ordonnée, $\text{Log } \xi$, est supérieure à η . Cela s'écrit

$$\frac{1}{n} \text{Log}(\Pi a_i) < \text{Log} \frac{\Sigma a_i}{n} \quad \text{ou} \\ \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} < \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad (a_i > 0).$$

Autrement dit la moyenne géométrique de n nombres positifs est au plus égale à leur moyenne arithmétique (l'égalité n'ayant lieu que s'il s'agit de nombres égaux).

III. SÉPARATION DES ZÉROS. SIGNE D'UNE FONCTION.

126. Zéros d'une fonction. — DÉFINITION I. — Le nombre x_0 est dit zéro de la fonction f , ou racine de l'équation $f(x) = 0$, si et seulement si $f(x_0) = 0$.

DÉFINITION II. — Le nombre x_0 étant zéro de la fonction f , s'il existe un entier naturel p tel que $f(x)$ soit un infiniment petit d'ordre p par rapport à $x - x_0$, on dit que x_0 est zéro d'ordre p .

Autrement dit x_0 est zéro d'ordre p de la fonction f si, et seulement si il existe un voisinage de x_0 sur lequel la fonction f est définie et sur lequel on peut écrire

$$(1) \quad f(x) = (x - x_0)^p [A + \varepsilon(x)] \quad \text{avec} \quad A \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

EXEMPLES : 0 est zéro simple de la fonction $f(x) = \sin x$,
0 est zéro double de la fonction $f(x) = 1 - \cos x$.

Par extension on pourrait dire que 0 est zéro d'ordre $\frac{2}{3}$ de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1 - \cos x}$; nous n'adopterons pas ce point de vue.

REMARQUE. — Si x_0 est zéro d'ordre p de la fonction f , celle-ci est dérivable au point x_0 . En effet la relation (1) montre que le quotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet, quand x tend vers x_0 , une limite qui est égale à A si $p = 1$ et à 0 si $p > 1$. Complétons ce résultat par la proposition suivante :

THÉORÈME. — Le nombre x_0 est zéro d'ordre p d'une fonction f qui admet au point x_0 une dérivée d'ordre p , si et seulement si :

$$(2) \quad f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(p-1)}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0.$$

Rappelons que l'existence de $f^{(p)}(x_0)$ implique la possibilité d'écrire la formule de Taylor-Young :

$$(3) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(x_0) \\ + \frac{(x - x_0)^p}{p!} [f^{(p)}(x_0) + \varepsilon(x)],$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction qui tend vers 0 avec $x - x_0$.

On constate que la relation (3) se réduit à la relation (1) si, et seulement si les relations (2) sont vérifiées.

COROLLAIRE. — Si x_0 est zéro d'ordre p d'une fonction f qui admet une dérivée d'ordre p en ce point, x_0 est zéro d'ordre $p - q$ de $f^{(q)}$, quel que soit l'entier q tel que $1 \leq q < p$.

En effet de l'hypothèse il résulte, en particulier,

$$f^{(q)}(x_0) = f^{(q+1)}(x_0) = \dots = f^{(p-1)}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0$$

qui est une condition suffisante pour que x_0 soit zéro d'ordre $p - q$ de $f^{(q)}$.

REMARQUE. — La définition II peut être considérée comme une extension de la définition d'un zéro multiple d'un polynôme sur le corps des réels donnée au tome I, n° 108; nous avons dit alors que x_0 est zéro d'ordre p du polynôme f si, et seulement si on peut écrire

$$(4) \quad f(x) = (x - x_0)^p g(x) \quad \text{avec} \quad g(x_0) \neq 0.$$

Quand on considère non plus le polynôme mais la fonction polynôme la relation (4) signifie en effet que $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre p par rapport à $x - x_0$.

127. **Signe d'une fonction.** — 1° La fonction f étant continue sur $[a, b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, on peut affirmer, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe au moins un point x_0 de $]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$; autrement dit le signe d'une fonction continue ne peut changer qu'en un zéro de la fonction.

2° Inversement supposons que x_0 soit un zéro d'ordre déterminé p de la fonction f :

$$(1) \quad f(x) = (x - x_0)^p [A + \varepsilon(x)] \quad \text{avec} \quad A \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Il existe un nombre positif α tel que

$$|x - x_0| < \alpha \implies \operatorname{sgn} [A + \varepsilon(x)] = \operatorname{sgn} A.$$

(Nous écrivons ici, en abrégé, *sgnu* pour *signe de u*).

Ainsi si p est pair : $0 < |x - x_0| < \alpha \implies \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A$

$$\text{si } p \text{ est impair} \left\{ \begin{array}{l} 0 < x - x_0 < \alpha \implies \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A \\ -\alpha < x - x_0 < 0 \implies \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} (-A). \end{array} \right.$$

De toute façon il existe un voisinage de x_0 sur lequel le signe de $f(x)$ est connu,

3° Dans le cas usuel d'une fonction continue par intervalles nous obtenons donc le signe de $f(x)$ en cherchant

a) les points de discontinuité de f ;

b) les zéros de f .

Nous construirons ainsi des intervalles dans chacun desquels $f(x)$ a un signe fixe; ce signe sera déterminé par une expérience.

4° **Méthode de factorisation.** — Si la fonction f peut se mettre sous la forme d'un produit de fonctions ou d'un quotient de deux fonctions, on a intérêt à étudier séparément le signe de chacune des fonctions et à appliquer la règle des signes. C'est ainsi que l'on obtient le signe d'un polynôme dont on

connaît les zéros, celui d'une fraction rationnelle dont on connaît les zéros et les pôles. En particulier si on peut écrire $f = gh$, avec $g(x) > 0$, on est ramené à rechercher le signe de $h(x)$.

128. Recherche des zéros. — La recherche simultanée des zéros de la fonction f et du signe de $f(x)$ comporte deux phases :

a) *Séparation des zéros.* — On dit que l'on a séparé les zéros d'une fonction lorsqu'on a trouvé pour chacun d'eux un intervalle ou une demi-droite contenant ce zéro et ce seul zéro.

b) *Calcul de chaque zéro avec une approximation donnée.*

Nous ne nous occuperons ici que de la première phase; la deuxième sera étudiée avec le calcul numérique au chapitre XX.

129. Séparation des zéros de la fonction f à l'aide de ses variations. — 1° Pour suivre les variations de la fonction f , on est conduit dans la plupart des cas à rechercher les zéros de la fonction dérivée f' . Si ces zéros sont connus la question est résolue; dans le cas contraire on est conduit à un problème du même type : la séparation des zéros de la fonction f' . On recommence, à cela près qu'il peut être intéressant de remplacer f' par une fonction auxiliaire plus simple g choisie de façon que l'on puisse déduire aisément le signe de $f'(x)$ de celui de $g(x)$. On itère la méthode jusqu'à ce que l'on obtienne une fonction dont tous les zéros sont connus. Il reste alors à effectuer le cheminement inverse, ce qui n'est pas toujours possible.

EXEMPLE. — Soit le polynôme

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Les dérivées successives de $P_n(x)$ sont les polynômes

$$P'_n(x) = P_{n-1}(x), \dots, P_n^{(n-1)}(x) = P_1(x) \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{x}{1}.$$

Or quand on substitue dans $P_k(x)$ un zéro λ de $P_{k-1}(x)$, on trouve $P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}$. Par suite, de proche en proche, on reconnaît que $P_1(x)$ n'a pas de zéro; que $P_2(x)$, polynôme de degré impair constamment croissant, en a un, soit α ; que les résultats de substitution de $-\infty$, α , $+\infty$ dans $P_3(x)$ sont tous positifs, et que $P_4(x)$ n'a pas de zéro réel, etc... D'une façon générale $P_n(x)$ a un zéro réel, négatif, si n est impair; $P_n(x)$ n'a pas de zéro réel si n est pair.

2° Cas dans lesquels on sait résoudre l'équation dérivée $f'(x) = 0$.

I. f est un polynôme du troisième degré, l'équation dérivée est du second degré. Rappelons qu'au lieu de substituer dans $f(x)$ un zéro de f' , il peut être plus commode de le substituer dans le reste de la division suivant les puissances décroissantes de $f(x)$ par $f'(x)$, reste qui est du premier degré.

II. Pour chercher combien une équation du quatrième degré a de racines réelles, on peut la ramener à la forme réduite

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

et observer que cette équation a autant de racines réelles que la transformée aux inverses

$$rx^4 + qx^3 + px^2 + 1 = 0$$

dont on peut résoudre l'équation dérivée.

III. Plus généralement, on sait résoudre l'équation dérivée quand l'équation proposée est de l'une des formes

$$\begin{aligned} x^m + px^n + q = 0, \quad x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + r = 0, \\ x^m + px^{m-2} + qx^{m-4} + r = 0, \end{aligned}$$

m, n étant des entiers.

IV. On sait encore résoudre l'équation dérivée quand l'équation proposée est de la forme

$$A(x+a)^p + B(x+b)^p + C = 0$$

p étant un nombre rationnel.

3° Dans la pratique une même équation peut s'écrire sous plusieurs formes. Voici des cas dans lesquels il est intéressant de modifier la forme de l'équation proposée, en faisant apparaître des discontinuités supplémentaires.

a) Les zéros de la fonction $f^p + g^q$ sont les zéros communs éventuels aux fonctions f et g et ceux de la fonction $u = f^p g^{-q} + 1$ dont la dérivée est

$$u' = f^{p-1} g^{-q-1} [p f' g - q f g'].$$

Si l'on sait trouver les zéros des trois facteurs de cette dérivée, en particulier si f et g sont des polynômes du premier degré, on sait séparer les zéros de la fonction $f^p + g^q$.

EXEMPLE. — Les zéros de la fonction $(2x-1)^3 + (x+2)^4$ sont ceux de la fonction

$$u(x) = \frac{(2x-1)^3}{(x+2)^4} + 1$$

Calculons

$$u'(x) = \frac{2(8-x)(2x-1)^2}{(x+2)^5}$$

et dressons le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	8	$+\infty$
$u(x)$	1 ↘	$-\infty \parallel -\infty$	↗ +	↘ 1

Ce tableau met en évidence l'existence de deux zéros $x_1 < -2$ et $-2 < x_2 < 8$. En remarquant que $u(0)$ est positif, on peut préciser $-2 < x_2 < 0$.

b) Les zéros de la fonction $ge^f + h$ sont les zéros communs éventuels aux fonctions g et h et ceux de la fonction $u = \frac{g}{h}e^f + 1$ dont la dérivée

$$u' = e^f \left[\frac{g}{h} f' + \left(\frac{g}{h} \right)' \right]$$

est le produit de e^f par une fonction rationnelle si les fonctions f, g, h sont elles-mêmes rationnelles.

EXEMPLE. — Cherchons si la fonction $e^{\frac{1}{x}}(2x-1) - (2x+1)$ a des zéros. $2x-1$ et $2x+1$ n'ayant pas de zéro commun, nous sommes ramenés à étudier la fonction

$$u(x) = \frac{2x-1}{2x+1} e^{\frac{1}{x}} - 1.$$

Cette fonction est définie pour $x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$. Elle admet la dérivée

$$u'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{4}{(2x+1)^2} \right] \quad \text{ou} \quad u'(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2(2x+1)^2}.$$

Cette dérivée est positive dans les intervalles de définition; d'où le tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$u(x)$	$0 \nearrow +\infty$	$\parallel -\infty \nearrow -1$	$\parallel -\infty \nearrow 0$	

La fonction $u(x)$ n'a pas de zéro et la fonction proposée non plus.

c) Les zéros de la fonction

$$g \operatorname{Log} f + h$$

$$[\text{resp. } g \operatorname{Arc} \operatorname{tg} f + h]$$

sont les zéros communs éventuels aux fonctions g et h et ceux de la fonction

$$u = \operatorname{Log} f + \frac{h}{g} \quad \left[\text{resp. } u = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} f + \frac{h}{g} \right]$$

dont la dérivée

$$u' = \frac{f'}{f} + \left(\frac{h}{g} \right)' \quad \left[\text{resp. } u' = \frac{f'}{1+f^2} + \left(\frac{h}{g} \right)' \right]$$

est une fonction rationnelle si les fonctions f, g, h sont elles-mêmes rationnelles

d) Les zéros de la fonction

$$R(\sin x, \cos x) - x R_1(\sin x, \cos x)$$

où $R(X, Y)$ et $R_1(X, Y)$ sont des fractions rationnelles sont

α) les zéros communs éventuels aux fonctions $R(\sin x, \cos x)$ et $R_1(\sin x, \cos x)$

β) les zéros de la fonction

$$u(x) = \frac{R \sin x, \cos x}{R_1(\sin x, \cos x)} - x,$$

$u'(x)$ est de la forme $R_2(\sin x, \cos x)$, $R_2(X, Y)$ désignant une fraction rationnelle.

130. *Séparation graphique des zéros d'une fonction f.* — 1° Il n'y a aucun intérêt, au point de vue de leur séparation, à considérer les zéros de l'équation $f(x) = 0$ comme les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ et de l'axe $x'x$; le tableau résumant les variations de la fonction $f(x)$ rend en effet les mêmes services que la courbe (C). En revanche il peut être commode de mettre l'équation proposée sous la forme

$$(E) \quad g(x) - h(x) = 0$$

et de considérer les racines de (E) comme les abscisses des points d'intersection des courbes d'équation $y = g(x)$ et $y = h(x)$. Il s'agit là en général d'une méthode de dégrossissage, qui ne dispense pas d'une vérification rigoureuse; signalons cependant que dans quelques cas favorables — par exemple quand la fonction h est linéaire et la fonction f convexe (resp. concave) — la méthode graphique peut se suffire à elle-même.

2° *Équation dépendant linéairement d'un paramètre* : $(E) f(x) + mg(x) = 0$. — Les racines de (E) sont les zéros communs éventuels aux fonctions f et g et les racines de l'équation

$$u(x) - m = 0 \quad \text{avec} \quad u(x) = -\frac{f(x)}{g(x)}.$$

On peut discuter, suivant les valeurs de m , l'intersection de la courbe fixe (C) d'équation $y = u(x)$ et de la droite variable (Δ) d'équation $y = m$. Il revient au même de dresser le tableau de variation de la fonction u et de discuter la position de m par rapport aux nombres $u(\alpha_i)$, les α_i étant les zéros de u' .

3° *Équation de la forme* : $(E) f(x) = ax + b$. — On peut discuter, suivant les valeurs de a et b , l'intersection de la courbe fixe (C) d'équation $y = f(x)$

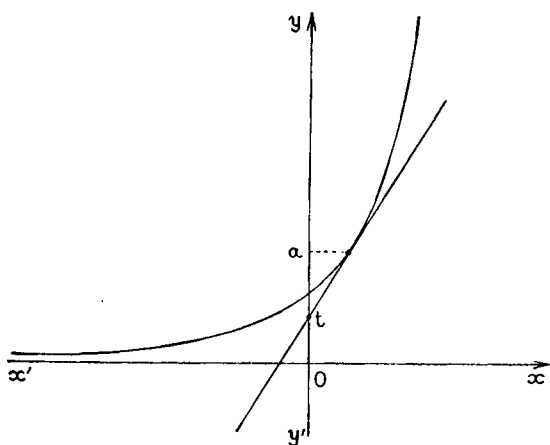


FIG. 51.

et de la droite variable (Δ) $y = ax + b$. A titre de vérification, il est cependant nécessaire en général d'étudier les variations de la fonction

$$u(x) = f(x) - ax - b;$$

or cette étude permet à elle seule de résoudre la question.

EXEMPLE I. —

$$(E) e^x = ax + b.$$

Du fait que la fonction e^x est convexe, la méthode graphique se suffit à elle-même. On constate (fig. 51) :

$a < 0$: (Δ) coupe (C) en un point et un seul.

$a > 0$: (Δ) coupe (C) en deux points, ou ne coupe pas (C) suivant que b est supérieur ou inférieur (fig. 51) à l'ordonnée à l'origine t de la tangente à (C) dont le coefficient directeur est a . L'équation de cette tangente est

$$y - a = a(x - \text{Log } a). \quad \text{On a : } t = a(1 - \text{Log } a).$$

Le nombre des racines de l'équation (E) est ainsi deux ou zéro suivant que

$b > a \text{Log} \frac{e}{a}$ ou $b < a \text{Log} \frac{e}{a}$. Si $b = a \text{Log} \frac{e}{a}$, (E) admet la seule racine a (double).

Retrouvons ce résultat en étudiant la fonction $u(x) = e^x - ax - b$.

Calculons : $u'(x) = e^x - a$. Les deux tableaux

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$	+	
$u(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$a > 0$

x	$-\infty$	$\text{Log } a$	$+\infty$
$u'(x)$	—	0	+
$u(x)$	$+\infty$	m	$+\infty$

avec $m = a \text{Log} \frac{e}{a} - b$ fournissent la réponse aussi rapidement que la méthode graphique.

$a = 0$: si $b < 0$ (E) n'admet aucune racine; si $b > 0$ elle admet la racine $\text{Log } b$.

EXEMPLE II. (E) $\text{tg } x = ax$.

La droite (Δ) [$y = ax$] rencontre en un point et un seul chacune des branches de la courbe (C) [$y = \text{tg } x$], réserve faite de celle qui passe par l'origine. Quant à celle-ci, si a est plus petit que 1, elle n'est rencontrée par (Δ) qu'en un seul point; si a est plus grand que 1, elle est rencontrée par (Δ) en trois points. Dans le cas particulier où $a = 1$, la droite (Δ) est une tangente d'inflexion à la courbe (C), le nombre est zéro triple de l'équation (E).

Ici $u(x) = \text{tg } x - ax$ est une fonction impaire; ses zéros sont donc deux à deux opposés. Elle est continue sur chaque intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, sur lequel la dérivée

$u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - a$ présente un minimum égal à $1 - a$, atteint au point $x = n\pi$.

1° $a < 1$, la fonction u croît de $-\infty$ à $+\infty$ sur l'intervalle considéré et y admet un zéro et un seul.

2° $a > 1$, on a le tableau suivant (on peut se limiter à $n > 0$).

x	$n\pi - \frac{\pi}{2}$	α_n	$n\pi$	β_n	$n\pi + \frac{\pi}{2}$
$u'(x)$	$+\infty$	↘ 0 ↘	$1 - a$	↗ 0 ↗	$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	↗ M ↘	↘ ↗	m	$+\infty$

Si $n > 1$, $M = \text{tg } \alpha_n - a\alpha_n$ est négatif (somme de deux termes négatifs); m est a fortiori négatif; par suite u admet un zéro sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

Si $n = 0$, on a $u(0) = 0$; d'où $M > 0$ et $m < 0$; u admet trois zéros sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4° Équation (E) $f[\varphi(t), \psi(t)] = 0$, à l'inconnue t . Cette équation peut être regardée comme admettant pour racines les valeurs du paramètre qui correspondent aux points d'intersection de la courbe (C) d'équation $f(x, y) = 0$ et de la courbe (Γ) représentée paramétriquement par les équations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

EXEMPLE. (E) $a \cos t + b \sin t + c = 0$

est l'équation qui donne les angles polaires des points d'intersection de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et du cercle trigonométrique : $x = \cos t$, $y = \sin t$. Ces points sont réels si la distance de l'origine à la droite est inférieure ou égale à 1, c'est-à-dire si

$$a^2 + b^2 \geq c^2.$$

5° Équation (E) $f(t, a, b) = 0$ à l'inconnue t , dépendant de deux paramètres a et b . Considérons la famille des courbes, dépendant du paramètre t ,

$$(C_t) \quad f(t, x, y) = 0.$$

A chaque valeur de t correspond une courbe de la famille et (E) n'est autre que l'équation qui fournit les paramètres t des courbes (C_t) passant par le point A (a, b) du plan. Il s'agit donc de discuter, suivant la position de A, le nombre des courbes (C_t) qui passent par A. En particulier si a et b interviennent au premier degré dans (E), les (C_t) sont des droites; comme nous le montrerons dans la théorie des enveloppes, ces droites sont en général les tangentes à une courbe (8). Si (8) est tracée, on peut lire sur la figure combien de tangentes réelles à cette courbe passent par le point donné A du plan. La question est ainsi résolue, tout au moins si on a démontré qu'une droite réelle (C_t) ne peut correspondre qu'à une valeur réelle du paramètre t .

IV. PRATIQUE DE L'ÉTUDE D'UNE FONCTION

131. Marche à suivre pour étudier la variation d'une fonction f .

1° Recherche des intervalles de définition de la fonction f .

2° Réduction des intervalles utiles par des considérations de parité et de périodicité : on constate en utilisant les définitions d'une fonction continue et d'une fonction monotone que

a) si une fonction paire (resp. impaire) est continue et monotone sur $[a, b]$, elle est continue et monotone sur $[-a, -b]$; sur les deux intervalles, elle varie en sens contraires (resp. dans le même sens). Il suffit donc d'étudier la fonction sur $[0, +\infty[$.

b) si une fonction admettant la période P est continue et monotone sur $[a, b]$, elle est continue et monotone sur $[a + mP, b + mP]$, m étant un entier relatif quelconque; elle varie dans le même sens sur les deux intervalles. Il suffit donc d'étudier la fonction sur $[\alpha, \alpha + P]$, α étant un nombre quelconque.

Si cette fonction périodique est en outre soit paire, soit impaire on choisit $\alpha = -\frac{P}{2}$; on est ainsi conduit à n'étudier la fonction que sur $\left[0, \frac{P}{2}\right]$.

c) Nous avons vu (39) que les réductions d'intervalles précédentes correspondent à l'invariance du graphe (Γ) de la fonction f — supposé tracé par rapport à un repère orthogonal — dans des symétries par rapport à Oy ou à O et dans des translations de vecteur $(P, 0)$. Il peut arriver que l'invariance de (Γ) dans d'autres symétries et dans d'autres translations permette, elle aussi, des réductions d'intervalles.

I) Il existe α tel que $f(\alpha - x) = f(x)$, quel que soit x .

Les points de (Γ) d'abscisses x et $\alpha - x$, ayant la même ordonnée et des

abscisses dont la demi-somme est $\frac{\alpha}{2}$, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\alpha}{2}$. Il suffit donc d'étudier la fonction à droite de $\frac{\alpha}{2}$.

II) Il existe α et β tels que $f(\alpha - x) = \beta - f(x)$, quel que soit x .

Les points de (Γ) d'abscisses x et $\alpha - x$, ayant à la fois des abscisses dont la demi-somme est $\frac{\alpha}{2}$ et des ordonnées dont la demi-somme est $\frac{\beta}{2}$, sont symétriques par rapport au point $C\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$. Il suffit donc d'étudier la fonction à droite de $\frac{\alpha}{2}$.

III) Il existe P et β tels que $f(x + P) = f(x) + \beta$, quel que soit x .

On passe du point $M \in (\Gamma)$ d'abscisse x , au point $M' \in (\Gamma)$ d'abscisse $x + P$ par la translation de vecteur (P, β) . La fonction f est dite pseudo-périodique. Comme dans le cas d'une fonction périodique, il suffit d'étudier f sur $[\alpha, \alpha + P]$, α étant un nombre quelconque.

3° Étude de la continuité de la fonction f sur chacun des intervalles réduits. Valeurs aux bornes de ces intervalles. — Si f est continue sur $]a, b]$ on cherche ce que devient $f(x)$ quand x tend vers a sur $]a, b]$, autrement dit on étudie la borne a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, on prolonge en général à $[a, b]$ le champ de définition de f en adoptant la convention $f(a) = l$. On obtient ainsi une fonction continue sur $[a, b]$.

4° Décomposition de chacun des intervalles utiles en sous-intervalles sur lesquels la fonction f est monotone. — Si c'est nécessaire, on a recours aux théorèmes liant le sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée. On calcule les valeurs de $f(x)$ aux bornes des sous-intervalles que l'on vient de former.

Au fur et à mesure que les résultats sont obtenus, on les consigne dans un tableau dit tableau de variation de la fonction. Il reste à construire le graphe de f . Nous ne ferons ici qu'aborder cette question; certains de ses aspects (branches infinies...) concernent plus particulièrement la géométrie analytique et seront étudiés au tome IV.

EXEMPLE I. — Variation de la fonction $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Cette fonction, du type u^v , est définie pour $x > 0$ par $\text{Log } y = \frac{1}{x} \text{Log } x$.

$$\lim_{x \rightarrow +0} \text{Log } y = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow +0} y = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } y = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1.$$

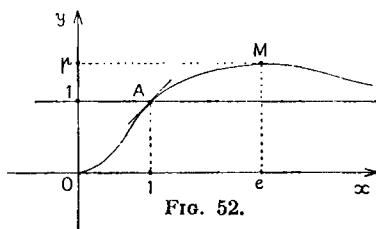
En adoptant, par convention, $y(0) = 0$ nous obtenons une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Calculons

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x} \text{Log } x\right)' \quad \text{ou} \quad y' = y \frac{1 - \text{Log } x}{x^2}$$

et dressons le tableau

	0	e	$+\infty$
y'		+	0
y	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$
			$\searrow$
			1



Pour chercher si le graphe (I') admet une tangente à l'origine, calculons

$$\text{Log} \frac{y}{x} = \text{Log} y - \text{Log} x = \frac{1-x}{x} \text{Log} x;$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \text{Log} \frac{y}{x} = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow +0} \frac{y}{x} = 0.$$

Le graphe (fig. 52) est tangent en O à Ox. Notons qu'il admet au point A (1,1) une tangente dont le coefficient directeur est 1.

(I') est asymptote à la droite d'équation $y = 1$. Calculons une valeur approchée du maximum $\mu = e^{\frac{1}{e}}$; $\log \mu = \frac{1}{e} \log e$; $\log(\log \mu) = \log(\log e) - \log e$; on trouve successivement

$$\log(\log \mu) \simeq 1,203\,49, \quad \log \mu \simeq 0,159\,77 \quad \text{et} \quad \mu \simeq 1,444\,7, \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

EXEMPLE II. — Variation de la fonction $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Cette fonction, du type u^v , est définie par $\text{Log} y = x \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ pour les valeurs de x qui satisfont à l'inégalité

$$1 + \frac{1}{x} > 0 \iff x \notin [-1, 0].$$

En remarquant que $\text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow \infty$, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e$.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = +0 \implies \lim_{x \rightarrow -1-0} \text{Log} y = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow -1-0} y = +\infty.$$

Quand x tend vers $+0$, y se présente sous la forme indéterminée $\infty \cdot 0$. Écrivons

$$\text{Log} y = x \text{Log}(1+x) - x \text{Log} x.$$

Il en résulte $\lim_{x \rightarrow +0} \text{Log} y = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +0} y = 1$. En adoptant, par convention, $y(0) = 1$ nous obtenons une fonction continue sur $]-\infty, -1[$ et $[0, +\infty[$.

$$\text{Calculons } z = \frac{y'}{y} = \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}; \quad y > 0 \implies \text{sgn} y' = \text{sgn} z.$$

Le signe de $z(x)$ s'obtient en étudiant la variation de cette fonction.

$$\text{Calculons } z' = -\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

La fonction z est croissante sur $]-\infty, -1[$, décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} z = 0$, $z(x)$ et par suite $y'(x)$ sont positifs dans les deux intervalles. Dressons le tableau

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
y	e	$\nearrow$	$+\infty$	1	$\nearrow$	e

Le graphe (Γ) admet (fig. 53) les asymptotes d'équation $x = -1$ et $y = e$. Un seul arc aboutit au point A(0,1) qui est dit *point d'arrêt* de (Γ). Cherchons si le coefficient

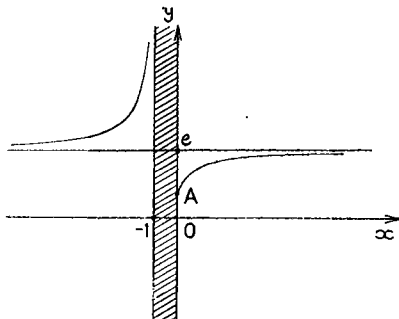


FIG. 53.

directeur m de la droite AM admet une limite quand le point M de (Γ) tend vers A. On a

$$m = \frac{y-1}{x} = \frac{e^{\text{Log } y} - 1}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow +0} \text{Log } y = 0$ entraîne $m \sim \frac{\text{Log } y}{x}$ quand $x \rightarrow +0$. Or $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\text{Log } y}{x} = +\infty$. Le graphe (Γ) admet donc au point A une demi-tangente à droite, portée par Oy.

EXEMPLE III. — Appliquons la formule des accroissements finis à la fonction $\text{Log}(1+x)$ sur $[0, x]$, nous obtenons, θ étant compris entre 0 et 1,

$$\text{Log}(1+x) = \frac{x}{1+\theta \cdot x}.$$

Étudions la fonction θ ainsi définie :

$$\theta(x) = \frac{1}{\text{Log}(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

Cette fonction est définie pour $x > -1$, sauf pour $x = 0$.

On a $\lim_{x \rightarrow -1+0} \theta(x) = 1$. D'autre part en écrivant

$$\frac{1}{\text{Log}(1+x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \varepsilon x^2} \quad (\varepsilon \text{ tendant vers zéro avec } x)$$

et faisant un développement limité du deuxième facteur du second membre, on trouve

$$(1) \quad \theta(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + \varepsilon' x, \quad (\varepsilon' \text{ tendant vers zéro avec } x).$$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$; en adoptant, par convention, $\theta(0) = \frac{1}{2}$ on obtient une fonction continue sur $[-1, +\infty[$.

La dérivée
$$\theta'(x) = \frac{-1}{(1+x)\text{Log}^2(1+x)} + \frac{1}{x^2}$$

a le signe de la fonction
$$z = [\text{Log}(1+x)]^2 - \frac{x^2}{1+x}.$$

On peut regarder z comme le produit des deux facteurs

$$z_1 = \text{Log}(1+x) + \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \text{et} \quad z_2 = \text{Log}(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

$\text{Log}(1+x)$ ayant le signe de x , z_1 a le signe de x ; il suffit donc d'étudier le signe de z_2 ; à cet effet, suivons sa variation. Sa dérivée a pour expression

$$z_2' = \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

On constate que le numérateur de cette fraction ne s'annule que pour $x = 0$ et qu'il est négatif pour $x \neq 0$; z_2' reste négative. On peut dresser le tableau suivant :

x	-1	0	$+\infty$
z_2	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$
$z = z_1 z_2$	$-$	0	$-$
θ	1 ↘	$\frac{1}{2}$ ↘	0

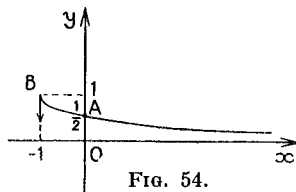


FIG. 54.

Le graphe (Γ) admet (fig. 54) la droite Ox pour asymptote. Pour chercher s'il admet une tangente au point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ formons

$$m = \frac{\theta(x) - \frac{1}{2}}{x} = -\frac{1}{12} + \epsilon', \quad \text{d'après la relation (1).}$$

On en déduit que (Γ) admet au point A une tangente dont le coefficient directeur est $-\frac{1}{12}$. D'autre part $\lim_{x \rightarrow -1+0} \theta'(x) = -\infty$; (Γ) admet au point d'arrêt $B(-1, 1)$ une demi-tangente à droite, parallèle à Oy .

EXEMPLE IV. — Variation de la fonction $y = (1 + \sin x)^{\cot x}$.

Cette fonction admet la période $P = 2\pi$. On a $y(\pi - x) = \frac{1}{y(x)}$, ce qui permet de limiter l'étude à un intervalle d'amplitude π dont une extrémité est $\frac{\pi}{2}$; choisissons $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dans cet intervalle la fonction est définie et continue, sauf aux points $-\frac{\pi}{2}$ et 0 .

$\text{Log } y = \cos x \frac{\text{Log}(1 + \sin x)}{\sin x} \sim \cos x$ quand x tend vers 0 , et par suite $\lim_{x \rightarrow 0} y = e$.

Quand x tend vers $-\frac{\pi}{2} + 0$ on a, en posant $x = -\frac{\pi}{2} + h$,

$$\text{Log } y = -\text{tgh } \text{Log}(1 - \cosh h) \sim -h \text{Log } h^2, \text{ et par suite } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0} y = 1.$$

En adoptant, par convention, $y(0) = e$ et $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ nous obtenons une fonction continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et par suite sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\text{Calculons } \frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{Log}(1 + \sin x) + \cot x \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

En isolant le logarithme :

$$y' = \frac{y}{\sin^2 x} [\sin x - \sin^2 x - \text{Log}(1 + \sin x)].$$

Le signe de y' est celui de $\varphi(u) = u - u^2 - \text{Log}(1 + u)$, avec $u = \sin x$.

Calculons : $\varphi'(u) = -\frac{u(1+2u)}{1+u}$; d'où le tableau :

u	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	
$\varphi'(u)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\varphi(u)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$

La fonction φ admet sur $[-1, +1]$ un seul zéro u_0 distinct de 0 ; on a $-1 < u_0 < -\frac{1}{2}$; $x_0 = \text{Arc sin } u_0$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{6}$. Dès lors le tableau de variation de y est le suivant

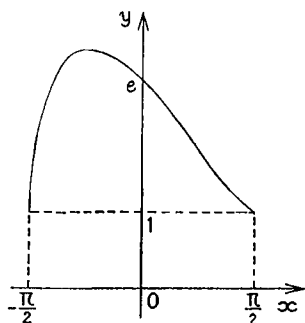


FIG. 55.

x	$-\frac{\pi}{2}$	x_0	0	$\frac{\pi}{2}$			
y'		$+$	0	$-$			
y	1	$\nearrow$	M	$\searrow$	e	$\searrow$	1

La tangente au graphe (I') au point $(0, e)$ (fig. 55) s'obtient en étudiant

$$m = \frac{y-e}{x} = e \frac{e^{\text{Log } y - 1} - 1}{x} \sim e \frac{\text{Log } y - 1}{x},$$

quand x tend vers 0 .

Un développement limité de $\text{Log } y$ est :

$$\left(\frac{1}{x} + \varepsilon_1\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon_2 x^2\right) = 1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} m = -\frac{e}{2}$. La tangente cherchée a pour coefficient directeur $-\frac{e}{2}$.

La tangente au graphe (I') au point $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$ s'obtient en étudiant

$$\mu = \frac{y-1}{x + \frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\text{Log } y - 1} - 1}{x + \frac{\pi}{2}} \sim \frac{\text{Log } y}{x + \frac{\pi}{2}} \quad \text{quand } x \text{ tend vers } -\frac{\pi}{2} + 0.$$

En posant $x + \frac{\pi}{2} = h$, on a trouvé $\text{Log } y \sim -h \text{Log } h^2$, d'où $\mu \sim -\text{Log } h^2$.

On en déduit $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0} \mu = +\infty$; la tangente cherchée est parallèle à Oy (fig. 55).

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a $y = 1$ et $y' = -\text{Log } 2$.

EXERCICES

1. — Montrer que le graphe de la fonction $\text{ch } x$ est coupé par une droite au maximum en deux points; que les graphes des fonctions $\text{sh } x$ et $\text{th } x$ sont coupés par une droite au maximum en trois points.

2*. — Étant donnés d'une part n nombres positifs x_i et d'autre part n nombres

positifs p_i dont la somme est 1, démontrer

$$\text{Log} \sum_{i=1}^n p_i x_i \geq \sum_{i=1}^n p_i \text{Log} x_i.$$

3. — Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ , le nombre des zéros réels de chacun des polynômes suivants :

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + \lambda; \quad x^4 + \lambda x^3 + 4x^2 - 1; \quad x^3 + \lambda x^2 + 1; \quad x^4 + \lambda(x^3 + 1) + 1.$$

4. — Discuter, suivant la position du point (a, b) dans $\mathbb{R}^2$, le nombre des zéros réels du polynôme $ax^3 + x^2 + x + b$; discuter de même le nombre des zéros de la fonction

$$a^x - x^b.$$

5. — On considère la suite de polynômes définie par

$$P_1(x) = \frac{3-x^2}{2} \quad \text{et} \quad P_{n+1}(x) = \frac{3 - [P_n(x)]^2}{2}.$$

Montrer que la courbe $y = P_n(x)$ passe par quatre points indépendants de n .

Montrer que le polynôme $P_n(x)$ a deux zéros réels et deux seulement.

6. — Montrer que si le polynôme P a tous ses zéros réels et distincts, le polynôme $PP'' - P'^2$ n'a aucun zéro réel.

Montrer que si le polynôme du troisième degré P a ses zéros réels et distincts, le polynôme $2PP'' - P'^2$ a deux zéros réels et deux seulement.

7*. — Montrer que si un polynôme dont les coefficients sont réels a tous ses zéros réels (distincts ou confondus) il ne peut avoir ni deux coefficients consécutifs nuls, ni un coefficient nul encadré par deux coefficients non nuls de même signe.

8. — Séparer les zéros des fonctions :

$$(2x-5)^2 + 3x^2; \quad 2(x^2 - x - 1)^4 - x^2 + x; \quad nx^n + x^{n-1} + \dots + x + 1.$$

9. — Discuter les équations :

$$\frac{a^4}{(1-x)^3} + \frac{b^4}{(1+x)^3} + 1 = 0; \quad \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \lambda; \quad \cos 3x + p \cos x + q = 0;$$

$$(x+1)^7 - x^7 - \lambda = 0; \quad (x^2 + 3\lambda x + 2\lambda^2) \text{Log} x - 2x - 3\lambda = 0; \quad \text{Arc} \, \text{tg} x - \frac{x}{1+x^2} = \lambda.$$

10. — Variation et représentation graphique des fonctions :

$$\frac{x+1}{x-1} \text{Log} |x|; \quad \frac{\text{Log} |x(2-x)|}{(x-1)^2}; \quad (x^2-1) \text{Log} \left| \frac{1+x}{1-x} \right|;$$

$$\frac{1}{x^2} \left[\text{Log}(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right]; \quad \frac{1}{x^2} \left[\text{Log} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) - x \right];$$

$\frac{1}{u} - \frac{1}{x}$, u étant l'une des fonctions $\text{sh} x$, $\text{th} x$, $\text{Log}(1+x)$, $\text{Arc} \, \text{sh} x$, $\text{Arg} \, \text{th} x$;

$$\text{tg} x - \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x; \quad \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x} - \frac{x^2}{6}; \quad \frac{\sin(2x+x)}{\cos^2 x};$$

$$(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}; \quad (2e^x - e^{-x})^{\frac{1}{x}}; \quad |\text{th} x|^{\text{sh} x}; \quad |\text{tg} x|^{\cos x};$$

$$(\cos x)^{\cos x}; \quad (1 + \text{tg} x)^{\sin x}; \quad x^{\frac{1}{\text{Log} x - 1}};$$

$$|x|^{e^{-x}}; \quad a^x - x; \quad \frac{a^x}{x}; \quad x - \log_a x;$$

11. — Étudier la variation de

$$y = \frac{1}{x+4} \text{Arc} \, \text{sin} \sqrt{\frac{4x}{15(x+4)}}$$

et trouver a de façon que $x^2 y - ax$ tende vers une limite finie quand x devient infini; trouver cette limite.

CHAPITRE XI

FONCTIONS REELLES DE PLUSIEURS VARIABLES REELLES

I. ÉTUDE DE L'ENSEMBLE R^p

132. Notion de point dans R^p . — Considérons un ensemble rangé $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de p nombres réels; un tel ensemble est un élément de l'ensemble produit $R \times R \times \dots \times R$ ou R^p (cf. I, 7); nous désignerons par une seule lettre, soit M , un élément de R^p : $M = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, et cet élément pourra s'appeler « point »; x_i est appelé la i -ième coordonnée de M .

Soit deux points $M = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $M' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_p)$. Nous convenons que $M = M' \iff x_i = x'_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$. Nous désignerons par O l'élément $(0, 0, \dots, 0)$.

Nous généralisons ainsi la considération du couple (x, y) de nombres réels associés à un point M d'un plan rapporté à un repère cartésien (I, 65) et du triplet (x, y, z) des nombres réels associés à un point M de l'espace rapporté à un repère cartésien (I, 66).

Nous appellerons *espace ponctuel* R^p , ou *espace réel à p dimensions*, l'ensemble que nous venons de définir.

133. Notion de distance. — 1° **Propriétés de la distance en Géométrie élémentaire.** — En géométrie élémentaire, à tout couple de points M, M' est associé un nombre réel, positif ou nul, appelé *distance* des points M et M' ; en le représentant par $d(M, M')$, ce nombre jouit des propriétés suivantes :

- $\alpha) d(M, M') = 0 \iff M \text{ et } M' \text{ confondus,}$
- $\beta) d(M, M') = d(M', M), \quad \forall M, M'$
- $\gamma) d(M', M'') \leq d(M, M') + d(M, M'') \quad \forall M, M', M''$

l'égalité n'a lieu que si M est situé sur le segment $M'M''$. Cette dernière inégalité est ce qu'on appelle *l'inégalité triangulaire*; elle traduit la propriété élémentaire suivant laquelle un côté d'un triangle est au plus égal à la somme des deux autres côtés.

2° **Généralisation.** — **Notion d'espace métrique.** — DÉFINITION. — On dit que dans un ensemble E est définie une distance si à tout couple d'éléments (ou points) M, M' de E on sait faire correspondre un nombre réel, positif ou nul, $d(M, M')$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\alpha) d(M, M') = 0 \iff M = M'.$$

$$\beta) d(M, M') = d(M', M) \quad \forall M \text{ et } M'.$$

$$\gamma) d(M', M'') \leq d(M, M') + d(M, M'') \quad \forall M, M', M'.$$

L'inégalité (γ) est encore dite *inégalité triangulaire*.

L'ensemble E ainsi muni d'une distance d (on dit aussi une *métrique*) prend le nom d'*espace métrique*; on le note (E, d) .

EXEMPLES. — 1° La fonction $d(x, y) = |x - y|$ est une distance dans l'ensemble R ; la métrique ainsi définie est dite *métrique naturelle* (ou *euclidienne*) de R .

2° Sur un ensemble quelconque E , on définit une distance en convenant $d(M, M') = 1$ si $M \neq M'$, $d(M, M) = 0$.

3° Exemples de distances dans R^n . — a) Posons

$$d_1(M, M') = \sup |x_i - x'_i|.$$

Vérifions les trois propriétés qui caractérisent une distance :

$$\alpha) \sup |x'_i - x_i| = 0 \iff x'_i - x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \iff M = M'$$

$$\beta) \sup |x'_i - x_i| = \sup |x_i - x'_i| : \text{l'expression est symétrique en } M \text{ et } M'$$

$$\gamma) x''_i - x'_i = (x''_i - x_i) + (x_i - x'_i) \implies |x''_i - x'_i| \leq |x''_i - x_i| + |x_i - x'_i|$$

$$\text{Or } |x''_i - x_i| + |x_i - x'_i| \leq \sup |x''_i - x_i| + \sup |x_i - x'_i| \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Tous les nombres $|x''_i - x'_i|$ ($i = 1, 2, \dots, p$) étant majorés par le second membre de l'inégalité précédente, il en résulte :

$$\sup |x''_i - x'_i| \leq \sup |x''_i - x_i| + \sup |x_i - x'_i|$$

c'est-à-dire l'inégalité triangulaire.

b) Posons $d_2(M, M') = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \dots + (x'_p - x_p)^2}$, et vérifions les trois propriétés qui caractérisent une distance :

$$\alpha) \sqrt{\sum (x'_i - x_i)^2} = 0 \iff x'_i = x_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, p \iff M = M'$$

$$\beta) d_2(M, M') = d_2(M', M)$$

$\gamma)$ L'inégalité triangulaire résulte des calculs suivants.

$$x''_i - x'_i = (x''_i - x_i) + (x_i - x'_i)$$

posons

$$\alpha_i = x''_i - x_i \quad \beta_i = x_i - x'_i.$$

Nous avons à vérifier que

$$(I) \quad \sqrt{\sum (\alpha_i + \beta_i)^2} \leq \sqrt{\sum \alpha_i^2} + \sqrt{\sum \beta_i^2}$$

$$(I) \iff (II) \quad \sum (\alpha_i + \beta_i)^2 \leq \sum \alpha_i^2 + \sum \beta_i^2 + 2\sqrt{\sum \alpha_i^2} \cdot \sqrt{\sum \beta_i^2}$$

$$(II) \iff (III) \quad \sum \alpha_i \beta_i \leq \sqrt{\sum \alpha_i^2} \cdot \sqrt{\sum \beta_i^2}.$$

Si $\sum \alpha_i \beta_i \leq 0$, l'inégalité précédente est satisfaite, donc aussi l'inégalité (I).

Si $\sum \alpha_i \beta_i > 0$,

$$(III) \iff (IV) \quad (\sum \alpha_i \beta_i)^2 \leq (\sum \alpha_i^2) \cdot (\sum \beta_i^2).$$

Or l'identité de Lagrange ⁽¹⁾ donne

$$(\sum \alpha_i^2) (\sum \beta_i^2) - (\sum \alpha_i \beta_i)^2 = \sum (\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i)^2$$

(1) (Note en regard).

ce qui justifie l'inégalité (IV), et par équivalences successives, l'inégalité (I).

La distance $d_2(M, M')$ est appelée *distance naturelle* (ou *euclidienne*) de R^p ; elle généralise la distance de deux points de la géométrie élémentaire rapportés à un repère orthonormé. Muni de cette distance, R^p devient ce qu'on appelle un *espace métrique euclidien* à p dimensions.

c) Le lecteur vérifiera aisément qu'en posant

$$d_2(M, M') = |x'_1 - x_1| + |x'_2 - x_2| + \dots + |x'_p - x_p|$$

on définit encore une distance dans R^p .

134. Ensembles particuliers de points dans R^p . — 1° Nous avons appelé, dans l'ensemble R ,

intervalle ouvert $]a, b[$, l'ensemble des nombres x tels que $a < x < b$ et *intervalle fermé* $[a, b]$, l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x \leq b$.

Nous allons généraliser dans les espaces $R^2, R^3, \dots, R^p$.

2° **Espace R^2 .** — Nous appellerons *pavé rectangulaire ouvert* l'ensemble des points $M(x, y) \in R^2$ tels que

$$\alpha_1 < x < \beta_1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 < y < \beta_2$$

et *pavé rectangulaire fermé* l'ensemble des points M tels que

$$\alpha_1 \leq x \leq \beta_1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 \leq y \leq \beta_2.$$

Lorsque aucune ambiguïté n'est à craindre, on dit simplement *pavé*.

Si M est représenté par un point d'un plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points considérés est celui des points intérieurs à un rectangle (pavé ouvert), ou celui des points du rectangle lui-même et des points qui lui sont intérieurs (pavé fermé) (fig. 56).

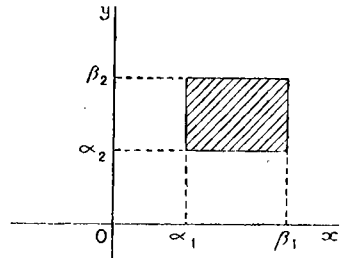


FIG. 56.

(1) L'identité de Lagrange, relative à deux ensembles $(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_p)$ de p nombres, donne une expression de la différence

$$\delta = (\sum \alpha_i^2) (\sum \beta_i^2) - (\sum \alpha_i \beta_i)^2.$$

Les termes de même indice $\alpha_i^2 \beta_i^2 - \alpha_i^2 \beta_i^2$ donnent un résultat nul; les termes associant les indices j et k sont

$$\alpha_j^2 \beta_k^2 + \alpha_k^2 \beta_j^2 - 2\alpha_j \beta_j \alpha_k \beta_k$$

ou encore

$$(\alpha_j \beta_k - \alpha_k \beta_j)^2.$$

Finalement

$$(\sum \alpha_i^2) (\sum \beta_i^2) - (\sum \alpha_i \beta_i)^2 = \sum (\alpha_j \beta_k - \alpha_k \beta_j)^2,$$

la dernière sommation étant étendue à tous les couples distincts d'indices j et k pris parmi les entiers $1, 2, \dots, p$.

En métrique euclidienne, nous appellerons *disque ouvert* (resp. *fermé*) de centre $A(a, b)$, de rayon r , l'ensemble des points M tels que

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2 \text{ (resp. } (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2 \text{)}.$$

Géométriquement, le repère étant encore orthonormé, le disque ouvert est l'ensemble des points intérieurs au cercle (A, r) , le disque fermé est l'ensemble des points du cercle (A, r) et des points qui lui sont intérieurs (fig. 57).

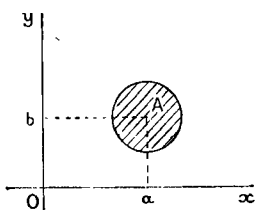


FIG. 57.

On peut naturellement, au moyen d'autres inégalités définir dans $\mathbb{R}^2$ des ensembles de points moins simples que les précédents, auxquels une image géométrique permettra parfois de donner un nom; de tels ensembles seront désignés par

le nom général de *champ*, ou de *domaine*.

Par exemple, l'ensemble des points M tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 < 0$ (resp. ≤ 0) constituera un champ elliptique ouvert (resp. fermé).

3° Espace $\mathbb{R}^3$. — Nous appellerons *pavé parallélépipédique ouvert* (resp. *fermé*) l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{array}{lll} x \in]\alpha_1, \beta_1[& y \in]\alpha_2, \beta_2[& z \in]\alpha_3, \beta_3[\\ \text{(resp. } x \in [\alpha_1, \beta_1]) & y \in [\alpha_2, \beta_2] & z \in [\alpha_3, \beta_3]). \end{array}$$

Lorsque aucune ambiguïté n'est à craindre, on peut dire simplement *pavé*.

En métrique euclidienne, nous appellerons *boule ouverte* (resp. *fermée*) de centre $A(a, b, c)$, de rayon r , l'ensemble des points M tels que

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r^2 \text{ (resp. } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2 \text{)}$$

Plus généralement un champ de variation de M pourra être défini par une ou plusieurs inégalités entre les nombres x, y, z .

Par exemple $x^2 + y^2 - 2az < 0$ définira un champ dont l'image géométrique est l'intérieur d'un parabolôïde.

4° Espace $\mathbb{R}^p$. — On appellera *pavé parallélépipédique* (ou simplement *pavé*) *ouvert* (resp. *fermé*) l'ensemble des points $M(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$x_i \in]\alpha_i, \beta_i[\text{ (resp. } x_i \in [\alpha_i, \beta_i]); \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

En métrique euclidienne, on appellera *boule ouverte* (resp. *fermée*) de centre $A(a_1, a_2, \dots, a_p)$, de rayon r , l'ensemble des points M tels que

$$\sum_{i=1}^{i=p} (x_i - a_i)^2 < r^2 \quad \left(\text{resp. } \sum_{i=1}^{i=p} (x_i - a_i)^2 \leq r^2 \right).$$

135. Normes et distances dans $\mathbb{R}^p$. — **1° Diverses structures de l'ensemble $\mathbb{R}^p$.** — Depuis le début de ce chapitre, nous avons désigné par *espace ponctuel* $\mathbb{R}^p$ l'ensemble produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, sur lequel n'existe encore aucune structure. Nous avons vu (I, 150, exemple II) qu'il

est possible de définir sur R^p une addition et une multiplication par un réel; on obtient ainsi un ensemble, muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels, que l'on désigne par $\overrightarrow{R^p}$. Ainsi le p -uplet rangé $(x_1, \dots, x_p)$ désigne tantôt un point M de l'espace ponctuel R^p , tantôt un vecteur $\overrightarrow{V}$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{R^p}$ (rapporté à sa « base canonique »).

Les définitions du tome III, chap. V, permettront de munir R^p d'une structure d'espace affine. Nous adopterons alors comme origine le point $O(0, 0, \dots, 0)$ et pour repère l'ensemble de O et de la base canonique de $\overrightarrow{R^p}$. La notation $M' = M + \overrightarrow{X}$ où M et M' sont deux points de R^p exprime que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{X}$ de $\overrightarrow{R^p}$ sont égaux.

2° **Parties convexes.** — Dans R^p on utilise la notion suivante :

DÉFINITION. — *Un sous-ensemble E' d'un espace affine réel E est dit convexe si, M et M' étant deux points quelconques de E' , le segment $[M, M']$, ensemble des points P de E tels que : $P = M + \alpha \overrightarrow{MM'}$, avec $\alpha \in [0, 1]$ est une partie de E' .*

On peut aussi dire qu'une partie E' d'un espace vectoriel E , sur le corps R , est convexe si $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ étant deux vecteurs quelconques de E' , l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{W}$ de E tels que : $\overrightarrow{W} = \alpha \overrightarrow{V} + \beta \overrightarrow{V'}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ est une partie de E' .

3° **Espace vectoriel normé.** — a) **DÉFINITION.** — Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels. On appelle norme sur l'espace vectoriel E toute application de E dans l'ensemble des réels positifs ou nuls qui, à tout vecteur $\overrightarrow{V}$ de E , associe un nombre $N(\overrightarrow{V})$, positif ou nul, tel que

$$\begin{cases} a) N(\overrightarrow{V}) = 0 \iff \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \\ b) N(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V_1}) \leq N(\overrightarrow{V}) + N(\overrightarrow{V_1}) \\ c) N(\lambda \overrightarrow{V}) = |\lambda| N(\overrightarrow{V}), \end{cases}$$

quels que soient $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V_1}$ dans E et λ dans R .

E est dit alors *espace vectoriel normé* sur R .

On utilise aussi la notation $\|\overrightarrow{V}\|$ pour désigner une norme du vecteur $\overrightarrow{V}$.

EXEMPLES. — E étant un espace vectoriel sur R , de dimension p , rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}\}$, associons au vecteur générique,

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e_1} \cdot x_1 + \dots + \overrightarrow{e_p} \cdot x_p, \quad \text{les réels positifs ou nuls}$$

$$N_1(\overrightarrow{V}) = \sup |x_i|, \quad N_2(\overrightarrow{V}) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}, \quad N_3(\overrightarrow{V}) = \sum |x_i| \\ (i = 1, 2, \dots, p).$$

Nous définissons ainsi trois normes, ainsi que le lecteur s'en assurera en raisonnant comme au n° 133-3°.

b) Normes équivalentes. — DÉFINITION. — Deux normes N et N' sur un même espace vectoriel E (sur le corps des réels) sont dites équivalentes s'il existe un nombre réel k , strictement positif, tel que

$$\forall \vec{V} \in E, \quad N(\vec{V}) \leq kN'(\vec{V}) \quad \text{et} \quad N'(\vec{V}) \leq kN(\vec{V}).$$

EXEMPLE. — Montrons que les normes $N_1(\vec{V})$ et $N_2(\vec{V})$ signalées en a) sont équivalentes; en effet

$$\sup |x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2} \leq \sqrt{p} \sup |x_i|$$

$$\text{Par suite } N_1(\vec{V}) \leq N_2(\vec{V}) \implies N_1(\vec{V}) \leq \sqrt{p} N_2(\vec{V}) \quad \text{car} \quad \sqrt{p} > 1;$$

d'autre part

$$N_2(\vec{V}) \leq \sqrt{p} N_1(\vec{V});$$

on obtient finalement les inégalités b) avec $k = \sqrt{p}$.

Le lecteur trouvera des compléments sur les normes au n° 1 du tome IV.

Nous utiliserons en outre la propriété suivante : sur l'espace vectoriel $\vec{R}^p$, deux normes quelconques sont équivalentes (cf. Appendice I, n° 287).

c) GÉNÉRALISATION. — La définition posée en a) s'étend au cas où E est un espace vectoriel sur un corps commutatif valué (I, 41, 5°) et en particulier au cas d'un espace vectoriel sur le corps des complexes.

4° Distance déduite d'une norme. — THÉORÈME. — Tout espace vectoriel normé est rendu métrique par la convention

$$d(\vec{V}, \vec{V}') = N(\vec{V} - \vec{V}').$$

En écrivant que N vérifie les axiomes a), b), c) de la norme, on constate en effet que d vérifie les axiomes α), β), γ), de la distance énoncés au n° 133, 2°.

REMARQUE. — Si, sur un espace vectoriel, une distance d « dérive » d'une norme, elle vérifie, outre α), β), γ), les deux axiomes suivants

$$\delta) \quad d(\vec{V} + \vec{V}'', \vec{V}' + \vec{V}'') = d(\vec{V}, \vec{V}') \quad (\text{conservation par translation}).$$

$$\epsilon) \quad d(\lambda \vec{V}, \lambda \vec{V}') = |\lambda| d(\vec{V}, \vec{V}') \quad (\text{transformation par homothétie}).$$

CAS PARTICULIER. — Sur $\vec{R}^p$ la convention $d(M, M') = N(\overrightarrow{MM'})$ permet de définir trois distances à partir des trois normes introduites au 3°. On retrouve ainsi les trois distances citées au n° 133, 3°.

136. — Voisinages. 1° En utilisant la distance $|x - x'|$ dans R (133, 2°), on peut donner pour un intervalle ouvert et pour un voisinage dans R (10) une interprétation qui permet la généralisation suivante :

DÉFINITION I. — Soit A un point d'un espace métrique (E, d) ; on appelle boule ouverte (A, r) l'ensemble des points M de E tels que $d(A, M) < r$.

On dit que la boule (A, r) est fermée si $d(A, M) \leq r$.

On dit que A est le centre de la boule, et que r est son rayon.

DÉFINITION II. — Étant donné le point A de E , on appelle voisinage de A toute partie de E qui contient une boule ouverte de centre A .

Il résulte de cette définition que l'intersection de plusieurs voisinages de A , en nombre fini, est un voisinage de A .

THÉORÈME ET DÉFINITION. — Si M et M' sont deux points quelconques d'un espace métrique (E, d) il existe un voisinage de M et un voisinage de M' sans point commun; on traduit cette propriété en disant qu'un espace métrique est séparé.

En effet si les boules de centres M et M' et de rayon commun $r = \frac{1}{3} d(M, M')$ avaient un point commun P , ce point serait tel que

$$d(M, M') > d(M, P) + d(M', P)$$

ce qui constituerait une contradiction avec l'inégalité triangulaire.

2° Distances équivalentes. — **DÉFINITION.** — Deux distances d et d' sur le même ensemble E sont dites équivalentes s'il existe un nombre réel k , strictement positif, tel que, pour tout couple de points M, M' , de E

$$d(M, M') \leq kd'(M, M') \quad \text{et} \quad d'(M, M') \leq kd(M, M').$$

Si E est un espace vectoriel normé, deux distances dérivant de normes équivalentes sont équivalentes. En particulier, dans l'espace R^p , toutes les distances qui dérivent d'une norme sur $\vec{R}^p$ sont équivalentes (n° 135, 3°); il en est ainsi en particulier des distances d_1 et d_2 considérées au n° 133.

$$d_1(M, M') \leq d_2(M, M') \leq \sqrt{p} d_1(M, M').$$

APPLICATION. — Si les distances d et d' sont équivalentes, toute boule ouverte $\mathcal{B}$ de centre A relative à d est contenue dans une boule ouverte $\mathcal{B}'$ de centre A , relative à d' , et inversement. Les voisinages de A , définis à partir de d sont aussi les voisinages de A définis à partir de d' .

Si l'on sait que $d(A, M) < r$, nécessairement $d'(A, M) < kr$.

Si l'on sait que $d'(A, M) < r$, nécessairement $d(A, M) < kr$.

Si l'on veut que $d(A, M) < r$, il suffit que $d'(A, M) < \frac{r}{k}$.

Si l'on veut que $d'(A, M) < r$, il suffit que $d(A, M) < \frac{r}{k}$.

Dans les définitions nos 137 et 138, relatives à R^p , nous utiliserons des distances dérivant d'une norme et nous pourrions affirmer que les notions ainsi introduites ne dépendent pas du choix de la distance. Il n'en serait pas de même si nous étendions les définitions à un espace métrique quelconque.

137. Convergence d'une suite sur un espace métrique. — 1° Conformément à la définition générale du n° 20, une suite sur l'espace métrique (E, d) est une application, $\{M_n\}$, déterminée par $n \rightarrow M_n$, de l'ensemble des naturels dans l'ensemble (E, d) .

2° DÉFINITION. — On dit que la suite $\{M_n\}$ converge et a pour limite A , s'il existe un point A de l'ensemble E tel que la suite sur R , $\{d(A, M_n)\}$ converge et a pour limite 0.

REMARQUE. — Si d et δ sont deux distances sur le même ensemble E , et si une suite $\{M_n\}$ converge vers A sur l'espace métrique (E, d) , elle converge vers A sur (E, δ) dans le cas où d et δ sont des distances équivalentes (mais pas nécessairement dans le cas contraire).

3° Suites de Cauchy. — **DÉFINITION.** — Sur un espace métrique (E, d) , une suite $\{M_n\}$ est dite suite de Cauchy si à tout nombre réel positif ε on peut faire correspondre un naturel N tel que, pour tout couple de naturels p et q supérieurs à N , on ait $d(M_p, M_q) < \varepsilon$.

THÉORÈME I. — Sur un espace métrique, toute suite de Cauchy est bornée.

THÉORÈME II. — Sur un espace métrique, toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Les démonstrations du n° 24, 2°, s'étendent sans difficulté.

La réciproque n'est pas vraie, ainsi que le montre l'étude de la suite

$$\left\{ u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right\}$$

(cf. n° 32 3°); $\{u_n\}$ est une suite sur Q et sur R , chacun de ces ensembles étant muni de la distance euclidienne. Sur R la suite converge vers e , par suite c'est une suite de Cauchy (24, 2°, a); sur Q , $\{u_n\}$ est aussi une suite de Cauchy car le naturel N associé à un ε donné, au titre de R , reste valable quand $\{u_n\}$ est une suite sur Q , mais $\{u_n\}$ n'est pas convergente sur Q (32, 3°).

Nous sommes ainsi conduits à poser :

DÉFINITION. — Un espace métrique sur lequel toute suite de Cauchy est convergente est appelé espace complet.

Un espace vectoriel sur R (resp. C) normé et complet est appelé espace de Banach réel (resp. complexe).

4° Suites sur R^p . — Toutes les distances sur R^p étant équivalentes, nous pourrions adopter la distance d_1 du n° 133. Nous écrivons :

$A = (a_1, \dots, a_p); M_n = (x_1^n, \dots, x_p^n); d(A, M_n) = \sup |x_i^n - a_i|, (i = 1, \dots, p)$, étant entendu que l'indice supérieur, n , indique un rang et non une puissance.

THÉORÈME. — Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\{M_n\}$ admette la limite A est que la coordonnée de rang i de M_n ait pour limite la coordonnée de rang i de A .

a) *Condition nécessaire.* — Si $\lim d(A, M_n) = 0$, à tout ε positif on sait associer un entier $N(\varepsilon)$ tel que

$$n > N(\varepsilon) \implies \sup |x_i^n - a_i| < \varepsilon,$$

en d'autres termes, $n > N(\varepsilon) \implies |x_i^n - a_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, p)$, c'est-à-dire que $\lim |x_i^n| = a_i$, quel que soit $i = 1, 2, \dots, p$.

b) *Condition suffisante.* — Supposons que chacune des suites $\{x_i^n\}$ ait pour limite a_i . A tout ε positif, on sait associer un entier $N_i(\varepsilon)$ tel que

$$n > N_i(\varepsilon) \implies |x_i^n - a_i| < \varepsilon.$$

Soit $N(\varepsilon) = \sup N_i(\varepsilon)$ pour $i = 1, 2, \dots, p$.

Alors $n > N(\varepsilon) \implies \sup |x_i^n - a_i| < \varepsilon$

en d'autres termes, $\lim d(A, M_n) = 0$.

REMARQUE. — L'ensemble R^p (pour $p \geq 2$) n'étant pas ordonné, on ne peut concevoir sur R^p une suite monotone.

THÉORÈME. — L'espace métrique R^p est complet.

Soit $\{M_n\}$ une suite de Cauchy sur l'espace R^p , muni de la distance d_1 (133) : par hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall m > N \\ \forall q > N \end{array} \right\}, \quad \text{on a} \quad \sup |x_i^m - x_i^q| < \varepsilon.$$

Il en résulte que chacune des p suites sur R , $\{x_i^n\}$ est une suite de Cauchy et par conséquent (24, 2^o, b) est une suite convergente. D'après le théorème précédent, il en est de même pour la suite $\{M_n\}$.

REMARQUE. — Après le n^o 155, le lecteur pourra montrer que les ensembles C et C^p sont complets; en effet C est l'ensemble R^2 muni d'une structure de corps et de la métrique euclidienne.

5^o Théorème de Bolzano-Weierstrass dans R^p . — On donne un espace métrique (E, d) et une partie $\mathcal{D}$ de cet espace métrique.

a) $\mathcal{D}$ est dite *bornée* s'il existe une boule ouverte de E qui contient $\mathcal{D}$.

b) Un point A de E est dit *point d'accumulation* de $\mathcal{D}$ si toute boule ouverte de centre A contient au moins un point de $\mathcal{D}$ autre que A .

Ces définitions posées, on peut démontrer (nous le ferons dans l'appendice I) le théorème de Bolzano-Weierstrass qui s'énonce ainsi :

THÉORÈME. — Toute partie bornée de R^p qui comporte une infinité de points a au moins un point d'accumulation.

II. FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

138. Fonction réelle de plusieurs variables réelles. — 1^o DÉFINITION.

Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de R^p ; une application f de $\mathcal{C}$ dans R est dite *fonction numérique* — ou *fonction réelle* — des p variables réelles $x_1, x_2, \dots, x_p$, coordonnées d'un point M de R^p .

On écrit $u = f(M)$ ou $u = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Si $p = 2$, on désigne par x et y les variables et par z la valeur qui leur correspond par $f : z = f(x, y)$; on associe au couple (x, y) le point P de coordonnées x, y, z relativement à un repère orthonormé; l'ensemble de tous les points P obtenus quand M décrit la région du plan xOy associée à $\mathcal{C}$ est, dans la pratique, une surface.

Si $p = 3$, on désigne par x, y, z les variables; à tout point $M(x, y, z)$ pris dans $\mathcal{C}$ on associe un point géométrique M relativement à un repère orthonormé (l'ambiguïté n'est pas à craindre entre les deux significations données à la lettre M), et se donner $u = f(M)$, c'est associer un nombre réel à tout point géométrique (par exemple, une densité si les points géométriques considérés appartiennent à un corps solide); on dit que f est une fonction scalaire du point M .

Si $p \geq 4$, on a intérêt à utiliser les notations générales pour désigner les coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^p$; la fonction f est définie sur un champ qui, dans ce livre, sera simplement un pavé parallélépipédique ou une boule.

EXEMPLES. — La fonction $z = \sqrt{x(y^2 + 1)}$ est définie sur le demi-plan $x \geq 0$.
La fonction $u = \text{Log}(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ est définie sur la boule ouverte $(0, 1)$.

2° Limite d'une fonction de plusieurs variables. — Soit $u = f(M)$, une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ du point A (sauf peut-être au point A lui-même).

DÉFINITION. — On dit que $f(M)$ admet la limite l lorsque M tend vers A , si à tout nombre positif ε on sait faire correspondre un nombre positif α tel que

$$\left. \begin{array}{l} M \in \mathcal{C} \\ 0 < d(A, M) < \alpha \end{array} \right\} \implies |f(M) - l| < \varepsilon.$$

Les théorèmes généraux sur les limites des fonctions d'une variable s'étendent aux limites des fonctions de plusieurs variables; on montre ainsi

- a) l'unicité de la limite,
- b) l'égalité entre la limite d'une somme et la somme des limites,
- c) l'égalité entre la limite d'un produit et le produit des limites.

3° Continuité d'une fonction de plusieurs variables. —

DÉFINITION. — On dit que la fonction $f(M)$, définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de A , est continue en A si $f(M)$ a pour limite $f(A)$ lorsque M tend vers A .

En d'autres termes, $f(M)$ est continue au point A si, à tout nombre positif ε on sait faire correspondre un nombre positif α tel que

$$\left. \begin{array}{l} M \in \mathcal{C} \\ d(A, M) < \alpha \end{array} \right\} \implies |f(M) - f(A)| < \varepsilon.$$

Par exemple, explicitons ces conditions dans le cas d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ du point (a, b) ; la continuité au point (a, b) s'exprime par

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \mathcal{C} \\ |x - a| < \alpha \\ |y - b| < \alpha \end{array} \right\} \implies |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon.$$

ou encore par

$$\forall \varepsilon < 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \left\{ \frac{M \in \mathcal{C}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \alpha} \right\} \Rightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon.$$

4° Application de la continuité. — Supposons la fonction $f(x, y)$ continue au point (a, b) , et supposons que les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ aient pour limites respectives a et b .

Montrons qu'alors la suite $\{f(x_n, y_n)\}$ a pour limite $f(a, b)$. Par hypothèse on a les conditions (1).

Or au nombre α on sait associer les entiers N_1 et N_2 tels que

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\Rightarrow |x_n - a| < \alpha \\ n \geq N_2 &\Rightarrow |y_n - b| < \alpha. \end{aligned}$$

Dès lors

$$n \geq \sup(N_1, N_2) \Rightarrow |f(x_n, y_n) - f(a, b)| < \varepsilon$$

ce qu'il fallait démontrer.

5° Une fonction continue par rapport à chacune des variables n'est pas nécessairement continue. — La continuité de la fonction $f(x, y)$ au point (a, b) entraîne :

a) la continuité de $f(x, b)$, par rapport à x , au point $x = a$; car l'une ou l'autre des conditions du 3° entraîne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \left\{ \frac{M \in \mathcal{C}}{|x - a| < \alpha} \right\} \Rightarrow |f(x, b) - f(a, b)| < \varepsilon.$$

b) la continuité de $f(a, y)$, par rapport à y , pour $y = b$.

Mais la réciproque de cette propriété n'est pas vraie : si la fonction $f(x, b)$ est continue pour $x = a$, et si la fonction $f(a, y)$ est continue pour $y = b$, on ne peut en déduire la continuité de $f(x, y)$ au point (a, b) .

Par exemple considérons la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ f(0, 0) = 0. \end{cases}$$

$f(x, 0) = 0$, même pour $x = 0$; cette fonction, constante, est continue pour $x = 0$.
 $f(0, y) = 0$, même pour $y = 0$; cette fonction, constante, est continue pour $y = 0$.

Si $x \neq 0$, $f(x, x) = \frac{1}{2}$. Il en résulte que,

$$\forall \alpha > 0, \exists M \in \text{disque } (0, \alpha) \text{ tel que } f(M) - f(0) = \frac{1}{2}.$$

La fonction $f(M)$ n'est pas continue au point 0.

D'ailleurs l'expression $f(M) = \sin \theta \cos \theta$, obtenue en passant en coordonnées polaires, montre que si on astreint M à décrire un arc Γ qui admet une tangente en 0, la restriction de $f(M)$ à Γ admet une limite quand le point M tend vers 0, cette limite dépendant de Γ .

Cet exemple montre en outre qu'on ne pourra pas étudier des « formes indéterminées » avec des fonctions de plusieurs variables comme avec des fonctions d'une variable, la limite d'une telle forme indéterminée pouvant dépendre du chemin parcouru par le point M lorsque sa distance au point A étudié tend vers zéro.

6° EXEMPLES. — a) La fonction $x + y + z$ est continue en un point quelconque (a, b, c) .

Posons $x = a + h, \quad y = b + k, \quad z = c + l.$
 $u = x + y + z \quad u_0 = a + b + c.$
 $u - u_0 = h + k + l, \quad \text{et} \quad |u - u_0| \leq |h| + |k| + |l|.$

Pour que l'inégalité $|u - u_0| < \varepsilon$ soit vérifiée,
 il suffit que l'inégalité $|h| + |k| + |l| < \varepsilon$ soit vérifiée,

et pour cela il suffit que l'on ait $|h| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |k| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |l| < \frac{\varepsilon}{3},$ ce qu'il fallait démontrer.

b) La fonction xy est continue en un point quelconque (a, b) :

Posons $x = a + r \cos \theta \quad y = b + r \sin \theta,$ en passant en coordonnées polaires.

$$u = ab + ar \sin \theta + br \cos \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta; \quad u_0 = ab$$

$$|u - u_0| \leq |r| [|a| + |b| + |r|].$$

En prenant $|r| < 1,$

$$|r| [|a| + |b| + |r|] \leq |r| [|a| + |b| + 1].$$

Pour que $|u - u_0| < \varepsilon,$ il suffit que $|r| [|a| + |b| + 1] < \varepsilon;$

en posant
$$\alpha = \inf \left[1, \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1} \right],$$

 $|r| < \alpha \implies |xy - ab| < \varepsilon.$

c) La fonction $\frac{x}{y}$ est continue en un point quelconque (a, b) où b n'est pas nul.

Posons $x = a + r \cos \theta, \quad y = b + r \sin \theta, \quad (b \neq 0).$

$$u = \frac{a + r \cos \theta}{b + r \sin \theta}, \quad u_0 = \frac{a}{b} \quad \text{d'où} \quad u - u_0 = \frac{br \cos \theta - ar \sin \theta}{b(b + r \sin \theta)}.$$

et si $|r| < |b| \quad |u - u_0| \leq \frac{|r| [|b| + |a|]}{|b| [|b| - |r|]}.$

Choisissons d'abord $|r| < \frac{|b|}{2},$

le second membre de l'inégalité précédente est inférieur à

$$\frac{|r| [|b| + |a|]}{\frac{|b|^2}{2}} \quad \text{ou} \quad A|r|, \quad \text{avec} \quad A = \frac{2 [|b| + |a|]}{|b|^2}.$$

Pour que $|u - u_0| < \varepsilon,$ il suffit que $A|r| < \varepsilon;$

en posant
$$\alpha = \inf \left[\frac{|b|}{2}, \frac{\varepsilon}{A} \right],$$

$$|r| < \alpha \implies |u - u_0| < \varepsilon.$$

7° **Propriétés d'une fonction de plusieurs variables, continue sur une boule fermée.** — Nous supposons que la fonction f définie par $u = f(M)$ est définie et continue sur une boule fermée $\mathcal{C}$.

Les propriétés signalées au n° 54 sont encore vraies; énonçons-les sans démonstration.

a) la fonction $f(M)$ est uniformément continue sur la boule $\mathcal{C}$; en d'autres termes,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathcal{C}, M'' \in \mathcal{C} \\ d(M', M'') < \alpha \end{array} \right\} \implies |f(M') - f(M'')| < \varepsilon$$

b) l'ensemble $f(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$ des valeurs prises par $f(M)$, pour $M \in \mathcal{C}$ est borné.

c) soit $\mu_1 = \sup (\mathcal{F})$, $\mu_2 = \inf (\mathcal{F})$
 $f(M)$ atteint effectivement ses bornes μ_1 et μ_2 ; c'est-à-dire qu'il existe au moins un couple de points

$$M_1 \in \mathcal{C} \text{ et } M_2 \in \mathcal{C} \text{ tels que } f(M_1) = \mu_1, f(M_2) = \mu_2.$$

d) $f(M)$ prend au moins une fois toute valeur comprise entre μ_1 et μ_2 .

Il en résulte que l'ensemble $f(\mathcal{C})$ est le segment $[\mu_1, \mu_2]$. En particulier, s'il existe sur la boule $\mathcal{C}$ deux points M_1 et M_2 tels que $f(M_1)$ et $f(M_2)$ soient de signes contraires, il existe dans $\mathcal{C}$ au moins un point M tel que $f(M) = 0$.

8° Opérations sur les fonctions continues de plusieurs variables.

— La définition de ces opérations est la même que dans le cas d'une fonction réelle d'une variable réelle (40). On démontre, comme dans le cas d'une variable (53) que, si $f(M)$ et $g(M)$ sont continues sur la boule $\mathcal{C}$,

a) $f(M) + g(M)$ est continue sur $\mathcal{C}$;

b) $f(M) \cdot g(M)$ est continue sur $\mathcal{C}$;

c) $\frac{f(M)}{g(M)}$ est continue en tout point de $\mathcal{C}$ où $g(M) \neq 0$.

139. *Généralisation. — Applications de R^p dans R^q .* — 1° Dans les paragraphes précédents, l'étude des fonctions de plusieurs variables nous a amenés à étudier les applications d'un sous-ensemble de R^p dans R .

On peut aussi étudier les applications d'un sous-ensemble de R dans R^p , c'est-à-dire considérer simultanément p fonctions d'une même variable réelle; cette étude sera détaillée au début du tome IV, en utilisant le langage vectoriel, comme préliminaire à l'étude des lignes déterminées paramétriquement, dans le plan ou dans l'espace.

Bornons-nous à donner quelques indications sur le cas général d'une application f dans R^q d'un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de R^p .

On dit aussi que cette application est une fonction définie sur le champ $\mathcal{C}$ de R^p , à valeurs dans R^q , et si on désigne par M et P les points génériques de R^p et R^q , on écrit

$$P = f(M).$$

Si $p = 1$, en appelant t la variable de R , on écrira $P = f(t)$.

Si $p = 2$, $q = 3$, au point M de coordonnées λ et μ dans R^2 , on associe le point P de coordonnées u, v, w dans R^3 ; autrement dit, u, v, w sont des fonctions simultanées de λ et μ ; on écrit

$$M(\lambda, \mu) \longrightarrow P(u, v, w)$$

$$\text{ou} \quad P = f(M)$$

ou encore, sous forme développée,

$$u = F(\lambda, \mu) \quad v = G(\lambda, \mu) \quad w = H(\lambda, \mu).$$

2° Notion de limite. — Supposons que R^p et R^q soient munis d'une distance, d sur R^p et δ sur R^q ; soient A un point fixe de R^p , L un point fixe de R^q .

Supposons f définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de A (sauf peut-être en A).

DÉFINITION. — On dit que P a pour limite L lorsque M tend vers A si à tout nombre ε positif on sait faire correspondre un nombre positif α tel que

$$\left. \begin{array}{l} M \in \mathcal{C} \\ 0 < d(A, M) < \alpha \end{array} \right\} \implies \delta(L, P) < \varepsilon.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le point P ait pour limite le point L lorsque M tend vers A est que chacune des coordonnées de P ait pour limite la coordonnée de même rang de L , lorsque M tend vers A .

3° Notion de continuité. — **DÉFINITION.** — On dit que la fonction $P = f(M)$, définie sur un voisinage de A , est continue en A , si $f(M)$ a pour limite $f(A)$ lorsque M tend vers A .

En d'autres termes, à tout nombre positif ε on sait faire correspondre un nombre positif α tel que

$$\left. \begin{array}{l} M \in \mathcal{C} \\ d(A, M) < \alpha \end{array} \right\} \implies \delta[f(A), f(M)] < \varepsilon.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $f(M)$ soit une fonction continue en A est que chacune des coordonnées de $f(M)$ soit une fonction des coordonnées de M , continue en A .

4° Continuité uniforme. — Si la fonction $P = f(M)$ est définie et continue sur une boule fermée $\mathcal{C}$ de l'espace R^p , on démontre (nous l'admettrons) qu'elle y est uniformément continue, c'est-à-dire : qu'à tout nombre positif ε on sait, associer un nombre positif $\alpha(\varepsilon)$ tel que si $P' = f(M')$ et $P'' = f(M'')$,

$$\left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathcal{C}, M'' \in \mathcal{C} \\ d(M', M'') < \alpha \end{array} \right\} \implies \delta(P', P'') < \varepsilon,$$

Les autres propriétés générales signalées au n° 54 et relatives aux bornes supérieure et inférieure ne peuvent s'étendre car elles étaient liées à la relation d'ordre sur R ; or les espaces R^q ($q > 2$) ne sont pas ordonnés.

140. Fonctions composées. 1° — **Définition.** — Nous l'exposerons sur l'exemple particulier $p = 2, q = 3$ déjà signalé.

$M(\lambda, \mu)$ appartenant à un champ $\mathcal{C}$ de R^2 , on lui associe un point $P(u, v, w)$ de R^3 ; considérons une fonction g de P , à valeurs dans R , et définie sur un champ $\mathcal{D}$ de R^3 auquel appartient le point $P = f(M)$ lorsque M est un point quelconque de $\mathcal{C}$.

On peut alors écrire le schéma suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{g} & \theta \\
 \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 & & \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 & & \in \mathbb{R} \\
 M & \xrightarrow{g \circ f} & \theta & &
 \end{array}$$

Autrement dit il existe une application, $g \circ f$, de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$; on peut aussi écrire $\theta = g[f(M)]$.

Si on explicite les coordonnées de P , on écrit

$$\theta = g(u, v, w)$$

et comme $u = F(\lambda, \mu)$, $v = G(\lambda, \mu)$, $w = H(\lambda, \mu)$, on peut écrire finalement

$$\theta = g[F(\lambda, \mu), G(\lambda, \mu), H(\lambda, \mu)].$$

On dit que θ est une *fonction composée* des variables indépendantes λ, μ , les *fonctions composantes* étant $F(\lambda, \mu)$, $G(\lambda, \mu)$, $H(\lambda, \mu)$.

2° Continuité d'une fonction composée. — Supposons que la fonction $P = f(M)$, définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de $A(a, b)$ soit continue en A ; posons $L = f(A)$ et supposons que la fonction $\theta = g(P)$, définie sur un voisinage $\mathcal{D}$ de $L(l, m, n)$ soit continue en L .

Nous allons montrer que, dans ces conditions, la fonction composée $\theta = g[f(M)]$ est continue au point A .

La continuité de $g(P)$ s'exprime par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \delta(L, P) < \alpha \implies |g(P) - g(L)| < \varepsilon.$$

La continuité de $f(M)$ s'exprime par

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \alpha' > 0 \quad \text{tel que} \quad d(A, M) < \alpha' \implies \delta(f(A), f(M)) < \varepsilon'.$$

Choisissons $\varepsilon' = \alpha$.

A tout nombre positif ε nous savons faire correspondre un nombre α' tel que

$$d(A, M) < \alpha' \implies |g[f(M)] - g[f(A)]| < \varepsilon.$$

En explicitant les fonctions numériques en jeu, si les fonctions $F(\lambda, \mu)$, $G(\lambda, \mu)$, $H(\lambda, \mu)$ sont continues au point (a, b) , et si la fonction $g(u, v, w)$ est continue au point $l = F(a, b)$, $m = G(a, b)$, $n = H(a, b)$, la fonction composée

$$g[F(\lambda, \mu), G(\lambda, \mu), H(\lambda, \mu)]$$

est continue au point (a, b) .

III. DÉRIVÉES PARTIELLES

141. Dérivées partielles. — Soit $f(x, y, z)$ ou $f(M)$ une fonction de plusieurs variables, application dans $\mathbb{R}$ d'un champ $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ qui contient le point $A(a, b, c)$.

1° DÉFINITION. — Si la fonction $f(x, b, c)$ de la seule variable x admet une dérivée pour la valeur a de la variable, on représente cette dérivée par la notation $f'_x(a, b, c)$ ou $f'_x(A)$ et on dit que c'est la dérivée partielle de $f(x, y, z)$ par rapport à x au point A (ou encore pour les valeurs a, b, c des variables).

$f'_x(a, b, c)$ s'énonce « f prime indice x de a, b, c . »

$f'_x(A)$ s'énonce « f prime indice x de A . »

En d'autres termes

$$f'_x(a, b, c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b, c) - f(a, b, c)}{h}.$$

De même si la fonction $f(a, y, c)$ de la variable y et la fonction $f(a, b, z)$ de la variable z admettent des dérivées, la première pour $y = b$, l'autre pour $z = c$, ces dérivées sont les dérivées partielles de $f(x, y, z)$ par rapport à y ou z au point (a, b, c) . On les représente par $f'_y(a, b, c)$ et $f'_z(a, b, c)$.

Si en chaque point du champ $\mathcal{C}$ la fonction $f(x, y, z)$ admet des dérivées partielles, la correspondance entre le point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{C}$ et la dérivée partielle $f'_x(x, y, z)$ [ou $f'_x(M)$] définit sur $\mathcal{C}$ une nouvelle fonction du point M , la fonction f'_x ; on définirait de même les fonctions f'_y et f'_z .

2° **Dérivabilité et continuité.** — Prenons pour simplifier une fonction $f(x, y)$ de deux variables.

a) *L'existence de dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité en ce point.*

L'existence de $f'_x(a, b)$ suppose la continuité de la fonction $f(x, b)$ pour la valeur a . L'existence de $f'_y(a, b)$ suppose la continuité de la fonction $f(a, y)$ pour la valeur b .

Mais on a vu (138-5°) que la continuité séparée par rapport à x et par rapport à y n'entraînait pas la continuité par rapport à l'ensemble (x, y) . L'existence des dérivées partielles en un point A n'entraîne pas davantage la continuité de la fonction en ce point.

Reprenons la fonction déjà étudiée :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } M(x, y) \neq O(0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

$$f'_x(O) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0.$$

$$\text{De même } f'_y(O) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Les deux dérivées partielles existent au point O , et pourtant nous avons vu que la fonction n'est pas continue en O .

b) *L'existence de dérivées partielles continues en un point entraîne la continuité en ce point.* — Prenons une fonction $f(x, y)$ admettant au point $A(a, b)$ et sur un voisinage $\mathcal{C}$ de A des dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ que l'on suppose continues au point A .

Posons, au point M , $x = a + h$, $y = b + k$
et soit $\Delta = f(M) - f(A) = f(a + h, b + k) - f(a, b)$.

Nous supposons $|h|$ et $|k|$ assez petits pour que tous les points du rectangle ayant pour sommets opposés les points A, M et dont les côtés sont parallèles aux axes, appartiennent au voisinage C.

On peut écrire

$$\Delta = \begin{cases} f(a+h, b+k) - f(a, b+k) & \Delta_1 \\ + f(a, b+k) - f(a, b) & \Delta_2 \end{cases}$$

$$\text{Or} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= hf'_x(a + \theta h, b+k) & 0 < \theta < 1 \\ \Delta_2 &= kf'_y(a, b + \theta'k) & 0 < \theta' < 1. \end{aligned}$$

La continuité de la fonction f'_x au point A permet d'écrire

$$f'_x(a + \theta h, b+k) = f'_x(a, b) + \varepsilon_1(h, k),$$

la fonction ε_1 de M ayant pour limite 0 quand M tend vers A et prenant la valeur 0 au point A.

De même la continuité de la fonction f'_y au point A permet d'écrire

$$f'_y(a, b + \theta'k) = f'_y(a, b) + \varepsilon_2(h, k),$$

la fonction ε_2 de M ayant pour limite 0 quand M tend vers A et prenant la valeur 0 au point A.

En définitive, on peut écrire, dans les hypothèses faites,

$$(1) \quad \begin{cases} f(M) - f(A) = hf'_x(A) + kf'_y(A) + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2, \\ \varepsilon_1 \text{ et } \varepsilon_2 \rightarrow 0 & \text{lorsque } (h, k) \rightarrow (0, 0). \end{cases}$$

Lorsque M tend vers A, $f(M) - f(A)$ a pour limite 0, c'est dire que la fonction $f(M)$ est continue au point A.

La démonstration s'étend au cas d'une fonction d'un nombre quelconque de variables en écrivant

$$\begin{aligned} f(M) - f(A) &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots && \text{avec} \\ \Delta_1 &= f(a+h, b+k, c+l, \dots) - f(a, b+k, c+l, \dots) \\ \Delta_2 &= f(a, b+k, c+l, \dots) - f(a, b, c+l, \dots) \\ \Delta_3 &= f(a, b, c+l, \dots) - f(a, b, c, \dots), && \text{etc...} \end{aligned}$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — Si $f(M)$ admet au point A des dérivées partielles continues, $f(M)$ est continue en ce point.

3° Dérivée d'une fonction composée. — a) *Cas d'une variable indépendante.* — Reprenons les notations de l'étude précédente et donnons-nous deux fonctions

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t)$$

définies sur un intervalle I. Soit $t_0 \in I$, posons

$$a = \varphi(t_0) \quad b = \psi(t_0)$$

et supposons la fonction $f(x, y)$ pourvue de dérivées partielles sur un voisinage $\mathcal{C}$ du point $A(a, b)$, ces dérivées étant continues au point A .

La fonction composée $F(t) = f[\varphi(t), \psi(t)]$ est-elle dérivable pour t_0 , si l'on suppose les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ dérivables pour t_0 ?

Donnons à la variable t l'accroissement Δt ;

$$\begin{aligned} t &= t_0 + \Delta t. \\ \varphi(t_0 + \Delta t) &= a + h \quad \psi(t_0 + \Delta t) = b + k. \\ F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) &= f(a + h, b + k) - f(a, b) \\ &= hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b) + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 \end{aligned}$$

ε_1 et ε_2 admettent la limite 0 quand Δt tend vers 0, parce qu'alors h et k admettent aussi la limite 0.

$$\frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = \frac{h}{\Delta t} f'_x(a, b) + \frac{k}{\Delta t} f'_y(a, b) + \frac{h}{\Delta t} \varepsilon_1 + \frac{k}{\Delta t} \varepsilon_2.$$

Or $\frac{h}{\Delta t} \rightarrow \varphi'(t_0) \quad \frac{k}{\Delta t} \rightarrow \psi'(t_0)$

le second membre de l'égalité précédente a pour limite

$$f'_x(A) \varphi'(t_0) + f'_y(A) \psi'(t_0),$$

c'est donc que le premier membre admet la même limite; en définitive $F(t)$ admet, pour t_0 , une dérivée donnée par la formule

$$F'(t_0) = f'_x(A) \varphi'(t_0) + f'_y(A) \psi'(t_0).$$

On retient cette formule pour un point t quelconque, sous la forme :

$$F'(t) = f'_x(M) \varphi'(t) + f'_y(M) \psi'(t).$$

Le raisonnement fait pour une fonction de deux variables peut s'étendre à un nombre quelconque de variables. Par exemple

$F(x) = f(u, v, w)$, où u, v, w sont des fonctions de x dérivables admet pour dérivée

$$F'(x) = f'_u(u, v, w) u' + f'_v(u, v, w) v' + f'_w(u, v, w) w'$$

en tout point où les dérivées partielles sont continues.

REMARQUE. — Cette règle de dérivation d'une fonction composée contient comme cas particuliers les règles qui donnent la dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions. Par exemple, les dérivées partielles du produit uvw par rapport à u, v, w étant respectivement vw, uw, uv , le théorème précédent donne pour dérivée du produit uvw de trois fonctions de x :

$$u'vw + uv'w + uvw'.$$

La même règle permet de retrouver la dérivée de u^v , u et v étant des fonctions de x . En effet si

$$f(u, v) = u^v, \quad f'_u(u, v) = vu^{v-1} \quad \text{et} \quad f'_v(u, v) = u^v \text{Log } u$$

$$\text{on a donc } (u^v)' = u^v u^{v-1} + v' u^v \text{Log } u \quad \text{ou} \quad u^v \left[\frac{u'}{u} v + v' \text{Log } u \right].$$

b) Cas de plusieurs variables indépendantes. — Si, dans $f(u, v, w)$, on remplace u, v, w par trois fonctions de x et y pourvues de dérivées partielles.

$$u = \varphi(x, y) \quad v = \psi(x, y) \quad w = \theta(x, y),$$

on obtient une fonction composée des variables x et y

$$F(x, y) = f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \theta(x, y)].$$

Il suffit d'imaginer successivement que y , puis x , ont des valeurs constantes pour obtenir

$$F'_x(x, y) = f'_u(\varphi, \psi, \theta) \cdot \varphi'_x(x, y) + f'_v(\varphi, \psi, \theta) \cdot \psi'_x(x, y) + f'_w(\varphi, \psi, \theta) \cdot \theta'_x(x, y)$$

$$F'_y(x, y) = f'_u(\varphi, \psi, \theta) \cdot \varphi'_y(x, y) + f'_v(\varphi, \psi, \theta) \cdot \psi'_y(x, y) + f'_w(\varphi, \psi, \theta) \cdot \theta'_y(x, y).$$

REMARQUE. — Pour une fonction d'une variable, il n'y a pas d'inconvénient à représenter par une lettre, y , la valeur que la fonction f associe à x , et à désigner la dérivée par y' au lieu de $f'(x)$.

Au contraire, pour une fonction de plusieurs variables la notion de dérivée partielle est liée à la façon dont les variables interviennent dans la définition de la fonction; si par exemple $z = f(x, y)$, on ne remplacera pas $f'_x(x, y)$ par z'_x car si l'on fait la substitution $y = 2x$, $z = f(x, 2x)$ a pour dérivée par rapport à x l'expression $f'_x(x, 2x) + 2f'_y(x, 2x)$.

142. Application différentiable de R^p dans R . — 1° La formule (1) du n° 141, 2° s'étend à un nombre quelconque, p , de variables; on a, par exemple, pour une fonction f de trois variables ayant des dérivées partielles continues en A ,

$$(x, y, z) \xrightarrow{f} f(x, y, z) = \omega$$

$$f(A + \vec{dM}) - f(A) = hf'_x(A) + kf'_y(A) + lf'_z(A) + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 + l\varepsilon_3$$

en désignant par $\vec{dM}$ le vecteur générique (h, k, l) , d'une partie $\mathcal{D}$ de l'espace vectoriel $\vec{R}^3$ (cf. notations du n° 135) et par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des fonctions de $\vec{dM}$ qui tendent vers 0 quand $\vec{dM}$ tend vers $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Montrons que l'application ε de $\vec{R}^3$ dans R déterminée par

$$\varepsilon(\vec{dM}) = \frac{h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 + l\varepsilon_3}{\|\vec{dM}\|} \quad \text{si} \quad \vec{dM} \neq \vec{0}, \quad \text{et} \quad \varepsilon(\vec{0}) = 0$$

est continue pour $\vec{0}$.

Du fait de l'équivalence des normes sur $\vec{R}^3$, nous pouvons adopter :

$$\|\vec{dM}\| = \sup(|h|, |k|, |l|); \quad \text{alors} \quad \frac{|\vec{h}|}{\|\vec{dM}\|} \leq 1, \dots$$

et on en déduit : $|\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3|$.

La continuité de ε en résulte. Cette étude conduit à poser :

2° DÉFINITION. — On dit que l'application f de R^p dans R , définie sur la boule ouverte $\mathcal{D}$ de centre A et de rayon r , est différentiable au point A s'il existe une application linéaire, $\mathcal{L}$, de $\vec{R}^p$ dans R telle que l'application ε de $\vec{R}^p$ dans R déterminée, pour $\vec{dM} \neq \vec{0}$, par la formule

$$(1) \quad f(A + \vec{dM}) - f(A) = \mathcal{L}(\vec{dM}) + \|\vec{dM}\| \times \varepsilon(\vec{dM})$$

admet la limite 0 quand $\vec{dM}$ tend vers $\vec{0}$.

Dans la définition de ε , on suppose $\vec{dM} \in \vec{R}^p$ et $\|\vec{dM}\|$ assez petite pour que le point $A + \vec{dM}$ appartienne à $\mathcal{D}$.

On dit que $\mathcal{L}$ est l'application différentielle de f au point A et que l'image, $\mathcal{L}(\vec{dM})$, par $\mathcal{L}$ du vecteur générique $\vec{dM}$ de $\vec{R}^p$ est la différentielle de f . En explicitant, dans le cas où $p = 3$,

$$\vec{dM} = (h, k, l) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}(\vec{dM}) = \alpha h + \beta k + \gamma l$$

on constate que $\mathcal{L}$ est continue en $\vec{0}$. Comme il en est de même pour ε on peut énoncer :

THÉORÈME I. — Une fonction de plusieurs variables différentiable en A est continue en ce point.

D'autre part la formule (1) donne, pour $k = l = 0$ et $h \neq 0$

$$\frac{f(a + h, b, c) - f(a, b, c)}{h} = \alpha + \frac{|h|}{h} \times \varepsilon(h, 0, 0)$$

ce qui montre que f admet en A une dérivée partielle par rapport à x , égale à α . L'application différentielle $\mathcal{L}$ est donc nécessairement

$$(h, k, l) \quad \longrightarrow \quad hf'_x(A) + kf'_y(A) + lf'_z(A).$$

On peut énoncer :

THÉORÈME II. — Une fonction de plusieurs variables différentiable en A admet en ce point des dérivées partielles du premier ordre.

Notation usuelle. — Comme au n° 68, 6°, si ω désigne l'image de (x, y, z) par f , l'image du vecteur générique $\vec{dM} = (dx, dy, dz)$ de $\vec{R}^3$ par l'application

linéaire $\mathcal{L}$ se note $d\omega$ et s'appelle différentielle de f au point A ; on a ainsi :

$$d\omega = f'_x(A) dx + f'_y(A) dy + f'_z(A) dz.$$

3° La définition du 2° permet d'énoncer le résultat du 1° sous la forme :

THÉORÈME. — Toute fonction de plusieurs variables ayant des dérivées partielles continues en un point est différentiable en ce point.

On est ainsi conduit à énoncer :

DÉFINITION. — On dit qu'une application de R^p dans R est continûment différentiable en un point lorsqu'elle admet en ce point des dérivées partielles continues.

REMARQUE. — La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie : une fonction différentiable est plus particulière qu'une fonction ayant des dérivées partielles mais moins particulière qu'une fonction continûment différentiable.

*143. — DÉRIVATION SOUS LE SIGNE SOMME. — 1° *Définition d'une fonction par une intégrale.* — Soit $f(t, x)$ une fonction réelle de deux variables réelles t et x , définie et continue sur un domaine (D) contenant le pavé rectangulaire fermé (C)

$$a \leq t \leq b, \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

x étant un point fixe, quelconque de $[\alpha, \beta]$, $f(t, x)$ est une fonction de t continue, et par conséquent intégrable sur $[a, b]$.

A tout $x \in [\alpha, \beta]$ on sait ainsi faire correspondre un nombre

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt.$$

Cette correspondance définit une application F de $[\alpha, \beta]$ dans R .

2° *Continuité de $F(x)$.* — Cherchons si $F(x)$ est continue au point $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Étudions pour cela

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^b [f(t, x) - f(t, x_0)] dt.$$

Les propriétés de l'intégrale nous donnent

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dt.$$

Or la fonction $f(t, x)$ étant continue sur (C), elle y est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \gamma > 0 \quad \text{tel que}$$

$$\sup_{\substack{(t, x), (t', x') \in C \\ (|t - t'|, |x - x'|) < \gamma}} |f(t, x) - f(t', x')| < \varepsilon \quad \Bigg\} \implies |f(t', x') - f(t, x)| < \varepsilon.$$

Il en résulte qu'à tout $\varepsilon > 0$, on sait associer $\gamma > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \gamma \implies |F(x) - F(x_0)| < \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b - a),$$

ce qui démontre la continuité de $F(x)$ sur $[\alpha, \beta]$.

3° *Dérivée de $F(x)$.* — Ajoutons ici l'hypothèse que la fonction $f(t, x)$ admet une dérivée partielle du premier ordre par rapport à x , $f'_x(t, x)$, continue sur (D), et cherchons si $F(x)$ est dérivable au point $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

Alors

$$g(x_0) = \int_a^b f'_x(t, x_0) dt \text{ existe. Posons}$$

$$\Delta = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) = \int_a^b \left[\frac{f(t, x) - f(t, x_0)}{x - x_0} - f'_x(t, x_0) \right] dt.$$

D'après la formule des accroissements finis,

$$\frac{f(t, x) - f(t, x_0)}{x - x_0} = f'_x(t, \xi); \quad \xi \in]x, x_0[.$$

ξ dépend de t, x, x_0 . Mais la continuité uniforme de $f'_x(t, x)$ sur (C) s'exprime par :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \gamma > 0 \quad \text{tel que} \\ \left. \begin{aligned} (t, x), (t', x') \in C \\ \sup(|t - t'|, |x - x'|) < \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f'_x(t', x') - f'_x(t, x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $|x - x_0| < \gamma$ entraîne $|\xi - x_0| < \gamma$, il en résulte que

$$|x - x_0| < \gamma \Rightarrow |f'_x(t, \xi) - f'_x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

Par suite

$$|x - x_0| < \gamma \Rightarrow |\Delta| < \varepsilon(b - a),$$

ce qui montre que $g(x_0) = F'(x_0)$.

$$\text{En résumé} \quad F'(x) = \int_a^b f'_x(t, x) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

144. *Interversion de deux dérivations partielles successives.* —

1° Soit $f(x, y)$ une fonction des variables x et y définie sur un champ C , et y admettant des dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$. Ces nouvelles fonctions peuvent admettre à leur tour sur C des dérivées partielles par rapport à x , et par rapport à y :

$$\begin{aligned} \text{celles de } f'_x(x, y) \text{ sont notées } f''_{xx} \text{ et } f''_{xy} \\ \text{celles de } f'_y(x, y) \text{ sont notées } f''_{yx} \text{ et } f''_{yy}. \end{aligned}$$

On dit que ce sont les dérivées partielles secondes de la fonction $f(x, y)$.

On abrège f''_{xx} et f''_{yy} en écrivant respectivement f''_{x^2} et f''_{y^2} .

Nous allons montrer que pour les fonctions usuelles les dérivées partielles secondes f''_{xy} et f''_{yx} ne sont pas distinctes, en d'autres termes qu'on peut intervertir l'ordre des dérivations partielles par rapport aux variables x et y .

2° THÉORÈME. — Si les dérivées partielles $f''_{xy}(x, y)$ et $f''_{yx}(x, y)$ sont définies sur un voisinage du point (a, b) et si elles sont continues en ce point

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

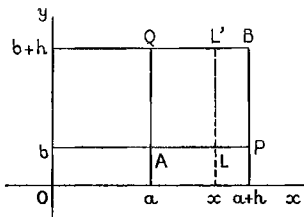


FIG. 58.

*Considérons les points

$$\begin{aligned} A &= (a, b), & B &= (a + h, b + h), \\ P &= (a + h, b), & Q &= (a, b + h), \end{aligned}$$

h désignant un réel non nul, tel que $|h|$ soit assez petit pour que le pavé fermé APBQ appartienne à C .

Posons : $\Delta = f(A) + f(B) - f(P) - f(Q).$

L et L' étant les points déterminés par la droite d'abscisse x sur les côtés AP et BQ du pavé, soit φ l'application de R dans R déterminée par

$$x \rightarrow \varphi(x) = f(L') - f(L) \quad \text{ou} \quad f(x, b + h) - f(x, b).$$

Cette fonction admet, sur le segment $[a, a + h]$, la dérivée

$$\varphi'(x) = f'_x(x, b + h) - f'_x(x, b),$$

puisque, d'après l'hypothèse, $f'_x(x, y)$ existe sur le pavé fermé.

$$\Delta = (f(B) - f(P)) - (f(Q) - f(A)) \quad \text{ou} \quad \varphi(a + h) - \varphi(a).$$

Par application de la formule des accroissements finis à la fonction φ , sur $[a, a + h]$:

$$\Delta = h[f'_x(a + \theta h, b + h) - f'_x(a + \theta h, b)], \quad 0 < \theta < 1.$$

Entre crochets se trouve l'accroissement que prend la fonction $f'_x(a + \theta h, y)$ de la variable y entre les valeurs b et $b + h$; la formule des accroissements finis, applicable pour les mêmes raisons que ci-dessus, donne :

$$\Delta = h^2 f''_{xy}(a + \theta h, b + \theta_1 h), \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

En appelant M_1 le point de coordonnées $(a + \theta h, b + \theta_1 h)$, on voit qu'il existe un point, M_1 , du pavé ouvert APBQ tel que

$$\Delta = h^2 f''_{xy}(M_1).$$

En transposant x et y on met en évidence l'existence d'un second point M_2 de ce pavé tel que

$$\Delta = h^2 f''_{yx}(M_2).$$

Des expressions trouvées pour Δ on déduit, compte tenu de $h \neq 0$,

$$(1) \quad f''_{xy}(M_1) = f''_{yx}(M_2).$$

En utilisant dans R^2 la distance : $d(M', M'') = \sup(|x' - x''|, |y' - y''|)$ on a

$$d(A, M_1) < |h| \quad \text{et} \quad d(A, M_2) < |h|.$$

On en déduit que, quand h tend vers 0 (ce qui est compatible avec $h \neq 0$), les points M_1 et M_2 , qui sont fonctions de h , tendent vers A; d'après la continuité de f''_{xy} et de f''_{yx} au point A, les deux membres de (1), qui sont égaux, admettent les limites $f''_{xy}(A)$ et $f''_{yx}(A)$, qui sont ainsi égales.

3° Généralisation. — I. Si les dérivées partielles secondes sont continues dans tout le champ d'existence $\mathcal{C}$ de la fonction f , on écrira

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

et la fonction f admet trois dérivées partielles secondes.

Si les dérivées partielles successives de la fonction f admettent des dérivées partielles continues, on peut simplifier l'écriture de ces dérivées partielles. Par exemple $f_{xyyxy}^{(5)}(x, y)$ représente la dérivée partielle du cinquième ordre formée en prenant les dérivées partielles successivement par rapport à x , par rapport à y , par rapport à y , par rapport à x , par rapport à y .

En appliquant le théorème d'intervention, on se ramène à

$$f_{xyyxy}^{(5)}(x, y) \quad \text{qu'on note} \quad f_{xy}^{(5)}(x, y).$$

Plus généralement si on a dérivé partiellement α fois par rapport à x , β fois par rapport à y , ($\alpha + \beta = n$), la dérivée partielle obtenue, d'ordre n , se notera

$$f_{x^\alpha y^\beta}^{(n)}(x, y)$$

si toutes les dérivées partielles mises successivement en jeu sont continues.

II. Le résultat s'étend à une fonction d'un nombre quelconque de variables. C'est ainsi que $f(x, y, z)$ admet trois dérivées partielles

$$f'_x(x, y, z) \quad f'_y(x, y, z) \quad f'_z(x, y, z)$$

et six dérivées partielles du second ordre

$$\begin{aligned} f''_{xz}(x, y, z) & \quad f''_{yz}(x, y, z) = f''_{zy}(x, y, z) \\ f''_{yx}(x, y, z) & \quad f''_{zx}(x, y, z) = f''_{xz}(x, y, z) \\ f''_{zy}(x, y, z) & \quad f''_{xy}(x, y, z) = f''_{yx}(x, y, z) \end{aligned}$$

L'énoncé du résultat général est le suivant :

THÉORÈME. — Si le calcul d'une dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables $x, y, \dots, l$ au point $(a, b, \dots, l)$ comporte p dérivations par rapport à x , q dérivations par rapport à y , $\dots$, s dérivations par rapport à l , on trouve le même résultat en effectuant les dérivations dans un autre ordre à la condition de calculer encore p fois la dérivée par rapport à x , q fois par rapport à y , etc., enfin s fois par rapport à l , toutes les dérivées partielles calculées étant supposées continues dans un champ contenant le point $(a, b, \dots, l)$.

4° **Notation différentielle.** — Par analogie avec le n° 69, 3°, on représente respectivement f'_x, f'_y, f'_z par les notations $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Lorsque f est d'une écriture compliquée, on écrit $\frac{\partial}{\partial x}(f)$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Plus généralement, on représente $f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}^{(p)}$ par la notation $\frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$.

Comme au n° 69, 3°, nous ne donnons aucun sens aux numérateurs et aux dénominateurs pris séparément dans les symboles précédents.

5° **Notations de Monge.** — Dans l'étude d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables il est parfois commode d'utiliser les notations de Monge :

$$\begin{aligned} p &= f'_x(x, y) & q &= f'_y(x, y) \\ r &= f''_{xx}(x, y) & s &= f''_{xy}(x, y) & t &= f''_{yy}(x, y). \end{aligned}$$

145. Dérivées successives d'une fonction composée. — 1° Cas général. — Soit $f(x, y, z)$ une fonction pourvue de dérivées partielles successives continues, et

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t)$$

trois fonctions de t pourvues de dérivées successives.

$$\text{Soit} \quad F(t) = f[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)]$$

la fonction composée obtenue à partir des fonctions composantes $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$. Nous savons que

$$F'(t) = f_x(\varphi, \psi, \theta) \cdot \varphi' + f_y(\varphi, \psi, \theta) \cdot \psi' + f_z(\varphi, \psi, \theta) \cdot \theta'.$$

Dérivons par rapport à t le premier des trois termes du second membre; nous obtenons

$$f'_x(\varphi, \psi, \theta) \cdot \varphi'' + \varphi' [f''_{x^2}(\varphi, \psi, \theta) \cdot \varphi' + f''_{xy}(\varphi, \psi, \theta) \cdot \psi' + f''_{xz}(\varphi, \psi, \theta) \cdot \theta']$$

En procédant de même pour les deux autres termes nous obtenons finalement

$$F''(t) = f'_x \cdot \varphi'' + f'_y \cdot \psi'' + f'_z \cdot \theta'' \\ + f''_{x^2} \cdot \varphi'^2 + f''_{y^2} \cdot \psi'^2 + f''_{z^2} \cdot \theta'^2 + 2 f''_{yz} \cdot \psi' \theta' + 2 f''_{zx} \cdot \theta' \varphi' + 2 f''_{xy} \cdot \varphi' \psi',$$

en écrivant pour abrégér,

$$f'_x \text{ pour } f'_x(\varphi, \psi, \theta) \dots, f''_{x^2} \text{ pour } f''_{x^2}(\varphi, \psi, \theta), \dots$$

L'application des mêmes règles conduit au calcul de $F^{(n)}(t)$, mais les calculs deviennent rapidement compliqués, sauf dans le cas, que nous allons examiner maintenant, où les fonctions composantes sont linéaires en t .

2° Cas où les fonctions composantes sont affines. — Supposons que l'on ait

$$x = a + ht, \quad y = b + kt, \quad z = c + lt,$$

a, b, c, h, k, l étant des nombres donnés et t une variable. Nous nous proposons de calculer les dérivées successives de la fonction composée $f(x, y, z) = F(t)$ de la variable t . Dans ce cas particulier les dérivées d'ordre supérieur au premier des diverses fonctions composantes sont nulles, les dérivées du premier ordre étant les constantes h, k, l . D'après la règle de dérivation d'une fonction composée

$$F'(t) = hf'_x(x, y, z) + kf'_y(x, y, z) + lf'_z(x, y, z).$$

Une nouvelle application de la même règle donne $F''(t)$ que nous écrirons, aucune confusion n'étant possible, en remplaçant $f''_{x^2}(x, y, z)$ par f''_{x^2} , $f''_{xy}(x, y, z)$ par f''_{xy} , etc.

$$F''(t) = h[hf''_{x^2} + kf''_{xy} + lf''_{xz}] + k[hf''_{xy} + kf''_{y^2} + lf''_{yz}] + l[hf''_{xz} + kf''_{yz} + lf''_{z^2}]$$

ou

$$F''(t) = h^2 f''_{x^2} + k^2 f''_{y^2} + l^2 f''_{z^2} + 2 kl f''_{yz} + 2 th f''_{zx} + 2 hk f''_{xy}.$$

Le second membre rappelle le développement du carré de la forme linéaire

$$hf_x + kf_y + lf_z$$

dans laquelle f_x, f_y, f_z sont des coefficients quelconques; c'est ce carré dans lequel $(f_x)^2, (f_y)^2, (f_z)^2, f_x f_y, f_x f_z, f_y f_z$ sont respectivement remplacés par les dérivées secondes $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{zz}, f''_{xy}, f''_{xz}, f''_{yz}$. Nous nous proposons de démontrer que, quel que soit l'entier p , $F^{(p)}(t)$ se déduit du développement de la p -ième puissance de $hf_x + kf_y + lf_z$ en y remplaçant $(f_x)^\alpha (f_y)^\beta (f_z)^\gamma$ par la dérivée partielle

$$f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}^{(\alpha+\beta+\gamma)}(x, y, z) \quad \text{ou} \quad f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}^{(p)}(x, y, z).$$

On représente le polynôme homogène de degré p des variables h, k, l que l'on forme ainsi par la notation

$$((hf_x + kf_y + lf_z))^p$$

et on dit que c'est la puissance p -ième symbolique de $hf_x + kf_y + lf_z$.

Cette loi de formation des dérivées successives étant vérifiée pour la dérivée seconde, pour démontrer qu'elle est générale, il suffit de raisonner par induction en montrant que, si elle est vraie pour la dérivée d'ordre $p-1$, elle l'est aussi pour celle d'ordre p . Supposons donc que

$$F^{(p-1)}(t) = ((hf_x + kf_y + lf_z))^{p-1}.$$

Cette égalité signifie que si

$$\begin{aligned} (hf_x + kf_y + lf_z)^{p-1} &= \sum A h^\alpha k^\beta l^\gamma (f_x)^\alpha (f_y)^\beta (f_z)^\gamma \\ F^{(p-1)}(t) &= \sum A h^\alpha k^\beta l^\gamma f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}^{(\alpha+\beta+\gamma)}(x, y, z). \end{aligned}$$

$F^{(p)}(t)$ étant la somme des dérivées des différents termes du second membre,

$$F^{(p)}(t) = \sum A h^\alpha k^\beta l^\gamma [h f_{x^{\alpha+1} y^\beta z^\gamma}^{(\alpha+\beta+\gamma+1)}(x, y, z) + k f_{x^\alpha y^{\beta+1} z^\gamma}^{(\alpha+\beta+\gamma+1)}(x, y, z) + l f_{x^\alpha y^\beta z^{\gamma+1}}^{(\alpha+\beta+\gamma+1)}(x, y, z)].$$

Or la quantité entre crochets peut s'obtenir en effectuant le produit

$$(f_x)^\alpha (f_y)^\beta (f_z)^\gamma (hf_x + kf_y + lf_z)$$

et en le transformant par la convention formulée plus haut. L'expression de $F^{(p)}(t)$ peut donc s'obtenir en effectuant le produit

$$[\sum A h^\alpha k^\beta l^\gamma (f_x)^\alpha (f_y)^\beta (f_z)^\gamma] (hf_x + kf_y + lf_z)$$

et en le transformant, toujours par la même convention. Or ce produit, c'est celui de la $(p-1)$ -ième puissance de $hf_x + kf_y + lf_z$ par $hf_x + kf_y + lf_z$, c'est donc $((hf_x + kf_y + lf_z))^p$. Finalement, on a bien

$$F^{(p)}(t) = ((hf_x + kf_y + lf_z))^p.$$

En utilisant la généralisation de la formule du binôme (I, n° 56)

$$F^{(p)}(t) = \sum \frac{p!}{\alpha! \beta! \gamma!} h^\alpha k^\beta l^\gamma f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}^{(p)}(x, y, z), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = a + ht \\ y = b + kl \\ z = c + lt. \end{cases}$$

Ce calcul de $F^{(p)}(t)$ est valable en un point t de R tel que la fonction

$(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p inclus sur un voisinage $\mathcal{C}$ du point $(a + hl, b + kl, c + lt)$, ce que nous exprimerons en disant que f est de classe C^p sur $\mathcal{C}$.

3° CAS OÙ LES FONCTIONS COMPOSANTES SONT DES FONCTIONS AFFINES DE PLUSIEURS VARIABLES. — L'étude de certaines questions de Géométrie analytique nous amènera à substituer aux variables x, y, z , dans la fonction $f(x, y, z)$, les nouvelles variables X, Y, Z définies par les formules

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y = y_0 + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z = z_0 + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z. \end{cases}$$

Posons $F(X, Y, Z) = f(x_0 + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \dots)$. En appliquant le résultat obtenu au n° 141 nous avons

$$\begin{cases} F'_X(X, Y, Z) = \alpha f'_x(x, y, z) + \beta f'_y(x, y, z) + \gamma f'_z(x, y, z) \\ F'_Y(X, Y, Z) = \alpha' f'_x(x, y, z) + \beta' f'_y(x, y, z) + \gamma' f'_z(x, y, z) \\ F'_Z(X, Y, Z) = \alpha'' f'_x(x, y, z) + \beta'' f'_y(x, y, z) + \gamma'' f'_z(x, y, z) \end{cases}$$

étant entendu que, dans les seconds membres, les lettres x, y, z sont remplacées par leurs valeurs en fonction de X, Y, Z .

L'étude précédente permet immédiatement de mettre sous forme de carré symbolique

$$F''_{X^2}(X, Y, Z) = ((\alpha f_x + \beta f_y + \gamma f_z))^2.$$

Calculons

$$\begin{aligned} F''_{XY}(X, Y, Z) &= \alpha [\alpha' f''_{x^2} + \beta' f''_{xy} + \gamma' f''_{xz}] \\ &\quad + \beta [\alpha' f''_{yx} + \beta' f''_{y^2} + \gamma' f''_{yz}] \\ &\quad + \gamma [\alpha' f''_{zx} + \beta' f''_{zy} + \gamma' f''_{z^2}]. \end{aligned}$$

Le second membre est le produit symbolique

$$((\alpha f_x + \beta f_y + \gamma f_z)) ((\alpha' f_x + \beta' f_y + \gamma' f_z))$$

$\alpha \alpha' f_x f_x$ étant remplacé par $\alpha \alpha' f''_{x^2}, \dots$

$\alpha \beta' f_x f_y$ étant remplacé par $\alpha \beta' f''_{xy}, \dots$

Plus généralement, on montrerait, par récurrence, que

$$F^{(n)}_{X^p Y^q Z^r}(X, Y, Z) = ((\alpha f_x + \beta f_y + \gamma f_z))^p ((\alpha' f_x + \beta' f_y + \gamma' f_z))^q ((\alpha'' f_x + \beta'' f_y + \gamma'' f_z))^r.$$

IV. FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS.

FORMULE DE TAYLOR

146. Formule des accroissements finis pour une fonction de plusieurs variables. — 1° Soit $f(x, y, z)$ une fonction définie sur un champ $\mathcal{C}$ contenant le segment de droite défini par les deux points $A(a, b, c)$ et $B(a + h, b + k, c + l)$. Nous nous proposons de donner une expression de l'accroissement $\Delta = f(B) - f(A)$.

Soit

$$\begin{aligned} F(t) &= f(a + ht, b + kt, c + lt) \\ \Delta &= F(1) - F(0). \end{aligned}$$

Supposons $F(t)$ continue sur le segment $[0, 1]$ et dérivable sur l'inter-

valle $]0, 1[$; alors $\Delta = F'(\theta)$ ($0 < \theta < 1$). Ces hypothèses seront acquises si la fonction f est continue, et admet des dérivées partielles continues sur $\mathcal{C}$.

$$\text{Or} \quad F'(\theta) = hf'_x(M) + kf'_y(M) + lf'_z(M).$$

Par suite

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c) &= hf'_x(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) \\ &\quad + kf'_y(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) + lf'_z(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) \end{aligned}$$

ou en appelant P le point $(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l)$ intérieur au segment AB

$$f(B) - f(A) = hf'_x(P) + kf'_y(P) + lf'_z(P).$$

2° Application. — Supposons que sur le champ $\mathcal{C}$ considéré on ait

$$\begin{aligned} |f'_x(x, y, z)| &< H_1 & |f'_y(x, y, z)| &< H_2 & |f'_z(x, y, z)| &< H_3. \\ |f(B) - f(A)| &< H_1|h| + H_2|k| + H_3|l|. \end{aligned}$$

On évalue ainsi un majorant de l'erreur commise quand au lieu de calculer $f(A)$ on est obligé de calculer $f(B)$, B étant un point voisin de A .

Des applications de ce résultat seront données lors de l'étude consacrée au Calcul numérique (nos 257 et 258).

3° Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit constante. — a) Soit $f(x, y, z)$ une fonction définie sur le champ $\mathcal{C}$ et qui est constante; en tout point de $\mathcal{C}$ cette fonction admet des dérivées partielles qui sont nulles.

b) Inversement, démontrons que, si la fonction $f(x, y, z)$ admet des dérivées partielles du premier ordre sur $\mathcal{C}$,

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \\ f'_z &= 0 \end{aligned} \right\} \forall (x, y, z) \in \mathcal{C} \implies f(x, y, z) = \text{Cte sur } \mathcal{C}.$$

Soit (x_0, y_0, z_0) un point M_0 fixe de $\mathcal{C}$ et supposons qu'on puisse appliquer la formule des accroissements finis aux deux points M_0 et $M(x, y, z)$, c'est-à-dire supposons tous les points du segment M_0M dans $\mathcal{C}$.

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = (x - x_0)f'_x(P) + (y - y_0)f'_y(P) + (z - z_0)f'_z(P),$$

P étant un point (x_1, y_1, z_1) intérieur au segment M_0M .

Par hypothèse $f'_x(P) = 0, \quad f'_y(P) = 0, \quad f'_z(P) = 0.$

Par suite $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$

En résumé :

Pour qu'une fonction de plusieurs variables soit constante sur un champ $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que ses dérivées partielles prennent la valeur 0 en tout point de $\mathcal{C}$.

147. Exemples d'équations aux dérivées partielles. — DÉFINITION.
— On appelle équation aux dérivées partielles une équation où figurent une fonction inconnue de plusieurs variables et les dérivées partielles de cette fonction. Intégrer cette équation, c'est en trouver toutes les solutions.

Dans les exemples suivants, la fonction inconnue z est fonction des deux variables indépendantes x et y .

EXEMPLE I. — (E) $z'_x(x, y) = 0$.

Il s'agit de trouver une fonction z telle que, en tout point, $z'_x(x, y) = 0$. Fixons une valeur x_0 :

$$z(x, y) - z(x_0, y) = (x - x_0)z'_x(x_1, y)$$

d'après la formule des accroissements finis; d'après l'hypothèse $z'_x(x_1, y) = 0$ et

$$z(x, y) = z(x_0, y),$$

en d'autres termes la fonction z ne dépend que de la variable y .

Les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions de la variable y .

$$z'_x(x, y) = 0 \implies z = \varphi(y).$$

$$\text{De même} \quad z'_y(x, y) = 0 \implies z = \varphi(x)$$

φ étant une fonction quelconque.

EXEMPLE II. — (E) $z'_x(x, y) = a$, a étant une constante.

On se ramène à l'exemple précédent en posant $z - ax = 0$, ce qui donne

$$0'_x(x, y) = 0$$

d'où

$$z = ax + \varphi(y),$$

φ étant une fonction quelconque.

EXEMPLE III. — (E) $z''_{xy}(x, y) = 0$.

En posant $z'_y(x, y) = q$, on est ramené à l'exemple I puisque $q'_x(x, y) = 0$.

$$z'_y(x, y) = \varphi(y), \quad \varphi \text{ étant une fonction quelconque}$$

Prenons, par rapport à y , les primitives des deux membres, nous obtiendrons

$$z = v(y) + C^{\text{te}},$$

mais la constante d'intégration n'est constante que par rapport à y , c'est donc une fonction de x , soit $u(x)$, et finalement

$$z''_{xy}(x, y) = 0 \implies z = u(x) + v(y).$$

u et v étant des fonctions quelconques.

EXEMPLE IV. — (E) $z''_{xx}(x, y) = 0$.

En posant

$$z'_x(x, y) = p, \text{ on est ramené à l'exemple I puisque } p'_x(x, y) = 0.$$

En prenant, par rapport à x , les primitives des deux membres, nous obtiendrons finalement

$$z = x\varphi(y) + \psi(y), \quad \varphi \text{ et } \psi \text{ étant deux fonctions quelconques.}$$

148. Formule de Taylor pour une fonction de plusieurs variables.

— 1° Reprenons les notations du n° 146, et appliquons la formule de Taylor à la fonction

$$F(t) = f(a + ht, b + kt, c + lt)$$

entre les valeurs 0 et 1 : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta).$$

Nous en aurons la possibilité si

$$F(t), F'(t), \dots, F^{(n-1)}(t) \text{ existent et sont continues sur } [0, 1] \\ \text{et si } F^{(n)}(t) \text{ existe sur }]0, 1[.$$

Ces propriétés sont acquises si $f(x, y, z)$ admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n , inclusivement, dans un champ $\mathcal{C}$ contenant tous les points

$$M(a + ht, b + kt, c + lt) \quad \text{pour} \quad t \in [0, 1];$$

c'est-à-dire tous les points du segment AB.

$$\text{Or} \quad F^{(p)}(t) = ((hf_x + kf_y + lf_z))^p,$$

en remplaçant dans les dérivées partielles x, y, z par $a + ht, b + kt, c + lt$. Nous écrivons donc :

$$F^{(p)}(0) = ((hf_x(a, b, c) + kf_y(a, b, c) + lf_z(a, b, c)))^p \\ F^{(n)}(\theta) = ((hf_x(a + \theta h, b + \theta k, c + \theta t) + kf_y(\dots) + lf_z(\dots)))^n$$

et nous obtenons finalement la formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables :

$$f(a + h, b + k, c + t) = f(a, b, c) + [hf'_x(a, b, c) + kf'_y(a, b, c) + lf'_z(a, b, c)] \\ + \dots + \frac{1}{p!} ((hf_x(a, b, c) + kf_y(a, b, c) + lf_z(a, b, c)))^p + \dots \\ + \dots + \frac{1}{n-1!} ((hf_x(a, b, c) + kf_y(a, b, c) + lf_z(a, b, c)))^{n-1} \\ + \frac{1}{n!} ((hf_x(a + \theta h, b + \theta k, c + \theta t) + kf_y(\dots) + lf_z(\dots)))^n$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1.

En appelant P le point $(a + \theta h, b + \theta k, c + \theta t)$ du segment de droite AB

$$f(B) = f(A) + [hf'_x(A) + kf'_y(A) + lf'_z(A)] + \dots + \frac{1}{p!} ((hf_x(A) + kf_y(A) + lf_z(A)))^p$$

$$+ \dots + \frac{1}{(n-1)!} ((hf_x(A) + kf_y(A) + lf_z(A)))^{n-1} + \frac{1}{n!} ((hf_x(P) + kf_y(P) + lf_z(P)))^n.$$

2° Cas particulier : $f(x, y, z)$ est une fonction polynôme de degré n . Les dérivées partielles d'ordre n sont des constantes et 0 n'entre pas dans la formule. Les deux membres deviennent des fonctions polynômes égales des variables h, k, l quand on y remplace a, b , et c par 0. Cette substitution ne modifie pas les termes qui composent

$$\frac{1}{n!} ((hf_x(a + \theta h, b + \theta k, c + \theta l) + kf_y(\dots) + lf_z(\dots)))^n$$

puisque les dérivées partielles d'ordre n sont des constantes; ces termes sont au second membre tous ceux de degré n par rapport à h, k, l . On conclut de là que si $\varphi(h, k, l)$ est l'ensemble des termes de degré n de $f(h, k, l)$,

$$\frac{1}{n!} ((hf_x(a + \theta h, b + \theta k, c + \theta l) + kf_y(\dots) + lf_z(\dots)))^n = \varphi(h, k, l).$$

Si $f(x, y, z)$ est du second degré

$$f(a + h, b + k, c + l) = f(a, b, c) + hf'_x(a, b, c) + kf'_y(a, b, c) + lf'_z(a, b, c) + \varphi(h, k, l).$$

REMARQUE. — Dans le Cours d'Algèbre (I, 109), nous avons établi la formule de Taylor pour un polynôme, à partir de la définition algébrique de la dérivée d'un polynôme.

V. FONCTIONS HOMOGÈNES

149. Définition des fonctions homogènes. — 1° **Étude de cas particuliers.** — A tout polynôme homogène de degré n (I, n° 111), à trois indéterminées, est associée une fonction f qui vérifie, quels que soient x, y, z, λ , l'égalité

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z).$$

Une propriété analogue a lieu pour certaines fonctions.

Par exemple, soit $f(x, y) = \frac{x^2 + xy - y^2}{x + y}$; $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

Soit $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$; (on suppose ainsi $x + y + z \geq 0$).

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{\frac{1}{2}} f(x, y, z) \text{ en supposant } \lambda > 0.$$

2° Définition. — On dit qu'une fonction f des variables x, y, z est positivement homogène de degré n si

a) le champ de définition, $\mathcal{C}$, est formé de « demi-droites » issues de l'origine, ce qui signifie que

$$\{ (x, y, z) \in \mathcal{C}, \quad \lambda > 0 \} \implies (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in \mathcal{C};$$

b) la fonction vérifie

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}, \quad \forall \lambda > 0, \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z).$$

Abréviativement, on dit simplement que f est homogène.

Les fonctions signalées ci-dessus sont respectivement homogènes de degré 1, et de degré $\frac{1}{2}$.

2° Conséquences. — a) La somme de plusieurs fonctions homogènes de degré n est une fonction homogène de degré n ;

b) Le produit de deux fonctions homogènes de degrés respectifs n et p est une fonction homogène de degré $n + p$;

c) Le quotient d'une fonction homogène de degré n par une fonction homogène de degré p est une fonction homogène de degré $n - p$;

d) La puissance p -ième d'une fonction homogène de degré n est une fonction homogène de degré np . En particulier, si p est un entier naturel, la racine p -ième d'une fonction homogène de degré n est une fonction homogène de degré $\frac{n}{p}$.

3° Formation des fonctions homogènes. — Si dans l'égalité

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z)$$

nous remplaçons λ par $\frac{1}{z}$ (en supposant $z \neq 0$) nous trouvons que

$$F(x, y, z) = z^n F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$

par conséquent, toute fonction homogène de degré n des variables x, y, z est sur un certain champ le produit de la puissance n^e de l'une des variables par une fonction des rapports des autres variables à celle-là.

En particulier, toute fonction homogène de degré zéro des variables x, y, z est

une fonction des rapports $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$. Par exemple $\frac{x+y-z}{x-y+z}$ peut s'écrire $\frac{\frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1}{\frac{x}{z} - \frac{y}{z} + 1}$.

Réciproquement, quelle que soit la fonction $\varphi(x, y)$ de deux variables le produit

$$z^n \varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

est manifestement une fonction homogène de degré n des variables x, y, z .

150. Propriétés des fonctions homogènes. — **1° Dérivées partielles.**

— **THÉORÈME I.** — Les dérivées partielles du premier ordre d'une fonction homogène de degré n sont, si elles existent, des fonctions homogènes de degré $n - 1$.

Par définition, une fonction f des variables x, y, z , définie sur le champ $\mathbb{C}$,

est homogène de degré n si

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{C}, \quad \forall \lambda > 0, \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z) \quad (1)$$

En donnant à λ, y, z des valeurs particulières, on obtient dans les deux membres la même fonction de x .

D'après la forme du second membre, la dérivée de cette fonction est $\lambda^n f'_x(x, y, z)$. D'après la forme du premier membre, on calcule cette dérivée comme celle de la fonction composée obtenue en remplaçant u par λx dans $f(u, \lambda y, \lambda z)$; on trouve ainsi $\lambda f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, d'où l'égalité

$$\lambda f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f'_x(x, y, z).$$

Pour toutes les valeurs de x, y, z, λ , considérées au début, on a donc

$$f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{n-1} f'_x(x, y, z)$$

ce qui prouve que $f'_x(x, y, z)$ est une fonction homogène de degré $n - 1$.

COROLLAIRE. — *Les dérivées partielles d'ordre p d'une fonction homogène de degré n sont, si elles existent, des fonctions homogènes de degré $n - p$.*

Cette proposition résulte immédiatement de l'application répétée du théorème aux dérivées partielles d'ordre 1, 2, ... $p - 1$.

2° Théorème d'Euler. — Supposons que la fonction homogène $f(x, y, z)$ admette des dérivées partielles continues et dérivons par rapport à λ les deux membres de l'égalité de définition (1); nous obtenons

$$x f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + y f'_y(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + z f'_z(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = n \lambda^{n-1} f(x, y, z),$$

et en faisant $\lambda = 1$, nous avons l'égalité d'Euler

$$(2) \quad x f'_x(x, y, z) + y f'_y(x, y, z) + z f'_z(x, y, z) = n f(x, y, z).$$

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'EULER. — Montrons que si, sur un certain champ, la fonction $f(x, y, z)$ vérifie l'égalité (2), elle est homogène de degré n .

Remplaçant x, y, z par $\lambda x, \lambda y, \lambda z$, (2) devient

$$(3) \quad \lambda x f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + \lambda y f'_y(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + \lambda z f'_z(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = n f(\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Soit $\varphi(\lambda) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

$$\varphi'(\lambda) = x f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + y f'_y(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + z f'_z(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

et l'égalité (3) s'écrit $\lambda \varphi'(\lambda) = n \varphi(\lambda)$. D'après l'étude de l'équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre (n° 240, 3°), il en résulte : $\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{n}{\lambda}$; les fonctions $\varphi(\lambda)$ et λ^n ayant même dérivée logarithmique sont dans un rapport constant, d'où

$$\varphi(\lambda) = k \lambda^n,$$

la constante k est fournie par la substitution $\lambda = 1$

$$\varphi(1) = f(x, y, z),$$

et l'on a retrouvé l'égalité de définition des fonctions homogènes.

CAS PARTICULIER. — Soit à intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$xz'_x(x, y) + yz'_y(x, y) = 0,$$

où z est une fonction inconnue des variables x et y .

Cette équation exprime que z est une fonction homogène de degré 0, des variables x et y , donc une fonction de $\frac{y}{x}$:

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right), f \text{ étant une fonction quelconque.}$$

VI. FONCTIONS IMPLIQUES

151. Fonction implicite d'une variable. — 1° DÉFINITION. — Étant donné une fonction réelle des variables réelles x et y , soit $f(x, y)$, considérons, s'il existe, l'ensemble des couples x, y pour lesquels cette fonction prend la valeur zéro, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$(1) \quad f(x, y) = 0.$$

Si pour chaque point x d'un ensemble E , partie de R , l'équation (1) a une solution en y , la correspondance entre x et y définit une application de E dans R que l'on appelle fonction implicite de la variable x .

Exemple : $f(x, y) = e^y \cdot \sin x + 2e^y - 1$
 On a $f(x, y) = 0 \iff y = -\text{Log}(2 + \sin x).$

REMARQUE. — En général, à chaque valeur de $x \in E$ sont associées plusieurs valeurs de y , d'où plusieurs fonctions implicites de x ; on dit parfois que l'ensemble de ces fonctions est une fonction multiforme de x .

Par exemple si l'on donne $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a

$$\text{soit } y = \sqrt{1 - x^2}, \text{ soit } y = -\sqrt{1 - x^2}; \quad x \in [0, 1].$$

Si l'on donne $\sin y - \sin x = 0$, on a

$$\text{soit } y = x + k.2\pi, \text{ soit } y = \pi - x + k.2\pi.$$

L'interprétation géométrique des solutions (x, y) donne, dans le premier des cas précédents, le cercle $(O, 1)$, et dans le second cas deux familles de droites parallèles.

L'exploitation systématique, en Géométrie, des résultats d'analyse acquis dans cette étude, sera faite au tome IV, dans l'étude des courbes planes définies par $f(x, y) = 0$.

2° THÉORÈME I. — Soit $f(x, y)$ une fonction des variables x et y définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ du point (a, b) tel que $f(a, b) = 0$.

Nous supposons $f(x, y)$ douée des propriétés suivantes :

I. $f(x, y)$ est continue sur $\mathcal{V}$

II. $f'_y(x, y)$ existe et est continue sur $\mathcal{V}$ et $f'_y(a, b) \neq 0$.

Il existe alors sur un voisinage de a une fonction $\varphi(x)$ continue telle que $f[x, \varphi(x)] = 0$, avec $b = \varphi(a)$.

*a) Puisque $f'_y(a, b)$ n'est pas nulle et que la fonction $f'_y(x, y)$ est continue au point

(a, b) , il existe un voisinage $\mathcal{V}_1$ de (a, b) où $f'_y(x, y)$ a le signe de $f'_y(a, b)$: supposons ce signe positif.

Soit $a \pm \alpha$, $b \pm \beta$ les abscisses et ordonnées respectives des côtés d'un rectangle intérieur à $\mathcal{V}$ et à $\mathcal{V}_1$. La fonction $f(a, y)$ est continue pour $y \in [b - \beta, b + \beta]$, elle a une dérivée positive; elle est donc croissante et comme elle prend la valeur 0 pour $y = b$,

$$f(a, b - \beta) < 0 \quad f(a, b + \beta) > 0.$$

La continuité de $f(x, y)$ assure l'existence d'un nombre positif α_1 , tel que

$$\begin{aligned} f(x, b - \beta) &< 0 & \text{pour} & \quad x \in [a - \alpha_1, a + \alpha_1] \\ f(x, b + \beta) &> 0 & \text{pour} & \quad x \in [a - \alpha_1, a + \alpha_1]. \end{aligned}$$

Si x est fixé, sur le segment $[a - \alpha_1, a + \alpha_1]$ et si y croît de $b - \beta$ à $b + \beta$, $f(x, y)$ croît d'une valeur négative à une valeur positive, donc prend la valeur 0 une et une seule fois. A toute valeur x du segment précédent correspond une valeur y telle que $f(x, y) = 0$; nous noterons cette correspondance entre x et y sous la forme $y = \varphi(x)$.

b) Plus généralement on peut associer à tout nombre positif ε , assez petit (qui joue le rôle de β), un nombre positif η (qui joue le rôle de α_1) tel que

$$|x - a| < \eta \implies |\varphi(x) - b| < \varepsilon.$$

La continuité de φ au point a en résulte.

c) α_1 ayant été déterminé comme il a été dit en a), soit α_1 un point quelconque de $]a - \alpha_1, a + \alpha_1[$. Les hypothèses vérifiées par f et f'_y au point (a, b) sont aussi vérifiées au point $(\alpha_1, \varphi(\alpha_1))$. La fonction φ est donc continue au point α_1 et, par suite, sur

$$]a - \alpha_1, a + \alpha_1[.$$

3° THÉORÈME II. — Si la fonction $f(x, y)$ du théorème I admet en outre sur $\mathcal{V}$ une dérivée partielle $f'_x(x, y)$ continue au point (a, b) , la fonction implicite $y = \varphi(x)$ admet une dérivée au point $x = a$.

*Reprenons la démonstration du théorème I. Soit h tel que $|h| < \alpha_1$.

Définissons $k(h)$ par $b + k = \varphi(a + h)$. Nous avons $f(a + h, b + k) - f(a, b) = 0$.

Or (n° 141, 2°, b) le premier membre de l'égalité précédente s'écrit, compte tenu de l'existence de f'_x et f'_y :

$$hf'_x(a + \theta h, b + k) + kf'_y(a, b + \theta'k) \quad \theta \in]0, 1[, \theta' \in]0, 1[.$$

Compte tenu de $f'_y(a, b + \theta'k) \neq 0$, on en déduit pour $h \neq 0$,

$$\frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h} = \frac{k}{h} = - \frac{f'_x(a + \theta h, b + k)}{f'_y(a, b + \theta'k)}.$$

La continuité de f'_x et f'_y au point (a, b) entraîne l'existence de $\varphi'(a)$. On a

$$\varphi'(a) = - \frac{f'_x(a, b)}{f'_y(a, b)}.$$

REMARQUE. — D'une façon intuitive on peut dire, sous certaines conditions, que si $f(a, b) = 0$, la fonction $f(x, y)$ prend, sur un voisinage du point A (a, b) , la valeur zéro en tous les points d'une courbe, et une seule, d'équation $y = \varphi(x)$, passant par A.

4° Calcul de la dérivée d'une fonction implicite. — Ayant admis l'existence de la fonction implicite définie par l'équation (1) et de sa dérivée,

pour calculer cette dérivée il suffit d'observer que si dans $f(x, y)$ on remplace y par cette fonction implicite $y = \varphi(x)$, $f(x, y)$ devient nulle quelle que soit la valeur x appartenant à l'intervalle sur lequel la fonction implicite est définie; la dérivée de la fonction de x , $f[x, \varphi(x)]$, ainsi obtenue est donc nulle dans cet intervalle. Or, quand on y remplace y par $\varphi(x)$, $f(x, y)$ devient une fonction composée de x par l'intermédiaire de x et de y . En écrivant que la dérivée de cette fonction composée est nulle on trouve, à condition que $f'_y(x, y) \neq 0$,

$$(2) \quad f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$\text{d'où} \quad \varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Ce résultat nous servira au tome IV, pour écrire l'équation de la tangente à la courbe plane définie par l'équation $f(x, y) = 0$.

5° **DÉRIVÉES SUCCESSIVES D'UNE FONCTION IMPLICITE.** — En poursuivant le raisonnement précédent et écrivant que l'on obtient une nouvelle identité en dérivant par rapport à x les deux membres de l'identité (2), on obtient (en utilisant les notations de Monge)

$$\begin{aligned} r + sy' + y'(s + ty') + qy'' &= 0 \\ \text{ou (3)} \quad r + 2sy' + ty'^2 + qy'' &= 0. \end{aligned}$$

On peut remplacer y' par la valeur $-\frac{p}{q}$ déduite de (2) et l'hypothèse $q \neq 0$ permet d'obtenir

$$y'' = -\frac{q^2r - 2pqsy' + p^2q}{q^3}.$$

Les raisonnements et les calculs précédents peuvent se poursuivre.

152. Fonction implicite de deux variables. — 1° **DÉFINITION.** — Étant donné une fonction réelle des variables réelles x, y, z , soit $f(x, y, z)$, considérons, s'il existe, l'ensemble des triplets x, y, z pour lesquels cette fonction prend la valeur zéro, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0.$$

Si pour chaque point (x, y) d'un champ $\mathcal{C}$, partie de $\mathbb{R}^2$, l'équation (1) a au moins une solution en z , la correspondance entre (x, y) et z définit une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle fonction implicite des deux variables x et y .

L'équation (1) peut avoir une seule solution en z , comme

$$(x + y)z - (x - y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{x - y}{x + y} \quad (x + y \neq 0)$$

En général, à chaque couple $(x, y) \in \mathcal{C}$ sont associées plusieurs valeurs de z , d'où plusieurs fonctions implicites de x et y ; on dit parfois que l'ensemble de ces fonctions est une fonction multiforme de x et y . Par exemple

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

donne,

$$\text{soit} \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \text{soit} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (x^2 + y^2 \leq 1).$$

L'interprétation géométrique des solutions (x, y, z) donne des surfaces, un paraboloïde hyperbolique dans le premier cas, une sphère dans le second cas.

Là encore, l'étude des surfaces définies par $f(x, y, z) = 0$, qui sera faite au tome IV, constituera l'exploitation géométrique des résultats d'analyse acquis dans cette étude.

2° Théorème d'existence. — On donne une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables prenant la valeur 0 au point $A(a, b, c)$; on suppose que sur un voisinage $\mathcal{V}$ de A les fonctions $f(x, y, z)$ et $f'_z(x, y, z)$ sont définies et continues, et que $f'_z(a, b, c) \neq 0$. On démontre alors qu'à tout point (x, y) d'un voisinage $\mathcal{C}$ de (a, b) on peut associer une valeur de z , $z = \varphi(x, y)$, telle que $f[x, y, \varphi(x, y)] = 0$, $c = \varphi(a, b)$, la fonction $\varphi(x, y)$ étant continue sur $\mathcal{C}$.

Si en outre $f'_x(x, y, z)$ et $f'_y(x, y, z)$ sont continues au point A , $\varphi(x, y)$ admet des dérivées partielles au point (a, b) .

3° Calcul pratique des dérivées partielles. — Quel que soit le point (x, y) de $\mathcal{C}$,

$$f[x, y, \varphi(x, y)] = 0.$$

On aura sur $\mathcal{C}$ de nouvelles égalités en égalant les dérivées partielles des deux membres, soit par rapport à x , soit par rapport à y , ce qui donne

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, \varphi) + f'_z(x, y, \varphi) \cdot \varphi'_x &= 0 \\ f'_y(x, y, \varphi) + f'_z(x, y, \varphi) \cdot \varphi'_y &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En particulier, au point } (a, b) \text{ on a } f'_x(A) + f'_z(A) \cdot \varphi'_x(a, b) &= 0 \\ f'_y(A) + f'_z(A) \cdot \varphi'_y(a, b) &= 0 \end{aligned}$$

d'où $\varphi'_x(a, b)$ et $\varphi'_y(a, b)$ puisque $f'_z(A) \neq 0$.

Des raisonnements analogues conduisent, le cas échéant, au calcul des dérivées partielles des divers ordres de la fonction $\varphi(x, y)$.

REMARQUE. — D'une façon intuitive, on peut dire, sous certaines conditions, que si $f(a, b, c) = 0$, la fonction $f(x, y, z)$ prend, sur un voisinage du point $A(a, b, c)$ la valeur zéro en tous les points d'une surface, et une seule, d'équation $z = \varphi(x, y)$, passant par A .

153. Fonctions implicites déterminées par un système d'équations. — Considérons le système des équations

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0 \qquad (2) \quad g(x, y, z) = 0$$

et essayons de le résoudre par rapport à y et z en considérant x comme donné.

Soit $A(a, b, c)$ une solution de ce système :

$$f(a, b, c) = 0 \qquad g(a, b, c) = 0.$$

Supposons f et g continues, ainsi que leurs dérivées partielles pour tout point $M(x, y, z)$ d'un voisinage $\mathcal{V}$ de A .

Si (3) $f'_z(a, b, c) \neq 0$, on sait résoudre (1) par rapport à z : il existe un voisinage $\mathcal{C}$ de (a, b) tel que

$$(1) \quad \Longleftrightarrow \quad z = \varphi(x, y), \quad c = \varphi(a, b), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C}.$$

Alors celles des solutions de (1) qui vérifient (2) sur $\mathcal{V}$ sont telles que

$$(4) \quad g[x, y, \varphi(x, y)] = 0.$$

$$\text{Posons} \quad G(x, y) = g[x, y, \varphi(x, y)].$$

On sait résoudre (4) par rapport à y , sur un voisinage $\mathcal{C}_1$ de (a, b) si

$$(5) \quad G'_y(a, b) \neq 0; \quad \text{or} \quad G'_y(x, y) = g'_y(x, y, \varphi) + g'_z(x, y, \varphi) \cdot \varphi'_y.$$

$$G'_y(a, b) = g'_y(A) + g'_z(A) \cdot \varphi'_y(a, b).$$

$$\text{D'autre part } f[x, y, \varphi(x, y)] = 0 \implies f'_y(x, y, \varphi) + f'_z(x, y, \varphi) \cdot \varphi'_y = 0$$

$$\text{d'où } (6) \quad f'_y(A) + f'_z(A) \cdot \varphi'_y(a, b) = 0.$$

On porte dans (5) la valeur $\varphi'_y(a, b)$ fournie par (6), ce qui donne

$$G'_y(a, b) = \frac{g'_y(A)f'_z(A) - g'_z(A)f'_y(A)}{f'_z(A)}.$$

On voit apparaître au numérateur l'opposée de la valeur prise au point A par le déterminant

$$D(M) = \begin{vmatrix} f'_y(M) & f'_z(M) \\ g'_y(M) & g'_z(M) \end{vmatrix}$$

Si $D(A) \neq 0$, on sait résoudre (4) par rapport à y ; il existe un voisinage I de a tel que

$$\text{et par suite} \quad \begin{array}{lll} y = \psi(x), & b = \psi(a), & \forall x \in I \\ z = \theta(x), & c = \theta(a), & \text{en posant } \theta(x) = \varphi[x, \psi(x)]. \end{array}$$

La condition $D(A) \neq 0$ entraîne que l'une au moins des dérivées partielles f'_y, f'_z, g'_y, g'_z n'est pas nulle en A , par conséquent la condition (3) — ou l'une des similaires — est conséquence de $D(A) \neq 0$.

$$\text{En définitive, si} \quad \begin{vmatrix} f'_y(A) & f'_z(A) \\ g'_y(A) & g'_z(A) \end{vmatrix} \neq 0,$$

on peut résoudre le système (1), (2), en y et z ,

$$\text{soit} \quad y = \psi(x), \quad z = \theta(x), \quad \text{avec} \quad b = \psi(a), \quad c = \theta(a).$$

On peut démontrer que ces fonctions sont continues sur un voisinage de a , et admettent des dérivées au point a .

On calcule pratiquement ces dérivées en dérivant par rapport à x , sur un voisinage de a , les deux membres des relations

$$f[x, \psi(x), \theta(x)] = 0 \implies f'_x(x, \psi, \theta) + f'_y(x, \psi, \theta)\psi' + f'_z(x, \psi, \theta)\theta' = 0$$

$$g[x, \psi(x), \theta(x)] = 0 \implies g'_x(x, \psi, \theta) + g'_y(x, \psi, \theta)\psi' + g'_z(x, \psi, \theta)\theta' = 0$$

ce qui donne au point A

$$(7) \quad \begin{cases} f'_x(A) + f'_y(A) \cdot \psi'(a) + f'_z(A) \cdot \theta'(a) = 0 \\ g'_x(A) + g'_y(A) \cdot \psi'(a) + g'_z(A) \cdot \theta'(a) = 0. \end{cases}$$

On sait résoudre les équations (7) linéaires en $\psi'(a)$ et $\theta'(a)$ puisque leur déterminant n'est autre que $D(A) \neq 0$. Les différentielles, au chapitre suivant, donneront une autre façon de calculer les dérivées ψ' et θ' .

REMARQUE I. — Le déterminant $D(M)$ introduit dans l'étude précédente généralise la notion de déterminant d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

REMARQUE II. — D'une façon intuitive, on peut, sous certaines conditions, dire que les surfaces qui ont pour équations $f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0$ et qui ont en commun le point $A(a, b, c)$, ont aussi en commun une courbe et une seule, d'équations paramétriques $y = \psi(x), z = \theta(x)$, passant par A .

VII. EXTREMUM

154. *Extremum d'une fonction de plusieurs variables.* —

1° DÉFINITION. — On dit qu'une fonction f de plusieurs variables x, y, z définie sur un voisinage du point $A(a, b, c)$ présente en ce point un maximum relatif (resp. minimum relatif) au sens large, s'il existe une boule ouverte $\mathcal{B}$ de centre A telle que

$$\forall M(x, y, z) \in \mathcal{B}, \quad \text{on ait} \quad f(M) \leq f(A) \quad [\text{resp. } f(M) \geq f(A)].$$

La dénomination d'*extremum* s'applique aussi bien à un maximum relatif qu'à un minimum relatif.

Si, M étant distinct de A , les inégalités précédentes sont strictes, on dit que l'*extremum* est strict.

2° THÉORÈME. — Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour qu'une fonction de plusieurs variables pourvue de dérivées partielles atteigne un extremum en un certain point est que toutes les dérivées partielles du premier ordre prennent en ce point la valeur zéro.

a) La condition est nécessaire. — Supposons pour fixer les idées que la fonction $f(x, y, z)$ atteigne un maximum au point (a, b, c) . On peut déterminer $\alpha > 0$ tel que pour tous les points autres que (a, b, c) qui vérifient les inégalités

$$|x - a| < \alpha, \quad |y - b| < \alpha, \quad |z - c| < \alpha$$

on ait

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) < 0.$$

En particulier, pour $y = b, z = c$ et $0 < |x - a| < \alpha$

$$f(x, b, c) - f(a, b, c) < 0.$$

La fonction $f(x, b, c)$ de la seule variable x étant maximum pour $x = a$, sa dérivée prend la valeur 0 pour cette valeur de x , donc $f'_x(a, b, c) = 0$.

On reconnaît de même que $f'_y(a, b, c) = 0$ et $f'_z(a, b, c) = 0$.

b) La condition n'est pas suffisante. — Soit par exemple

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2;$$

les dérivées partielles $2x, 2y, -2z$ prennent la valeur zéro au point $(0, 0, 0)$. Sur toute boule de centre $(0, 0, 0)$, de rayon ϵ , il existe un point $(\epsilon, 0, 0)$ où $f(x, y, z) > f(0, 0, 0)$ et un point $(0, 0, \epsilon)$ où $f(x, y, z) < f(0, 0, 0)$.

Nous avons déjà vu (122) que la condition n'est pas suffisante dans le cas d'une variable.

3° Conséquence. — Pour trouver les extremums d'une fonction de plusieurs variables, $f(x, y, z)$ par exemple, on est conduit :

a) à chercher les valeurs de x, y, z pour lesquelles la fonction $f(x, y, z)$ n'admet pas de dérivées partielles;

b) à résoudre le système

$$f'_x(x, y, z) = 0, \quad f'_y(x, y, z) = 0, \quad f'_z(x, y, z) = 0.$$

Ayant trouvé une solution (a, b, c) de ce système, on doit examiner si elle correspond effectivement à un maximum ou à un minimum de $f(x, y, z)$. A cet effet, il faut chercher si la différence

$$f(x, y, z) - f(a, b, c)$$

conservé un signe constant pour les points (x, y, z) autres que (a, b, c) tels que l'on ait

$$|x - a| < \alpha, \quad |y - b| < \alpha, \quad |z - c| < \alpha,$$

α étant un nombre positif suffisamment petit. La formule de Taylor peut être utilisée pour cette étude.

4° **Étude de la réciproque dans un cas particulier.** — Considérons une fonction $f(x, y)$ de deux variables qu'on suppose pourvue de dérivées partielles successives continues.

Nous appellerons $M(x, y)$ un point courant, $A(a, b)$ le point particulier étudié, tel que

$$f'_x(a, b) = 0 \quad f'_y(a, b) = 0.$$

Désignant d'une façon générale les dérivées partielles secondes $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$, par les lettres r, s, t , nous poserons

$$f''_{xx}(a, b) = r_0 \quad f''_{xy}(a, b) = s_0 \quad f''_{yy}(a, b) = t_0.$$

La formule de Taylor permet d'écrire, avec

$$x = a + h \quad \text{et} \quad y = b + k$$

$$f(M) - f(A) = \frac{1}{2}(h^2 r_0 + 2 h k s_0 + k^2 t_0) + \frac{1}{6} \left(\left(h f'''_{xx}(P) + k f'''_{xy}(P) \right) \right)^2,$$

les dérivées du 3^e ordre qui interviennent dans le terme complémentaire étant prises au point $P(a + \theta h, b + \theta k)$ avec $0 < \theta < 1$.

Passons en coordonnées polaires, de pôle A

$$h = \rho \cos \theta \quad k = \rho \sin \theta \quad (\rho > 0)$$

$$f(M) - f(A) = \frac{\rho^2}{2}(r_0 \cos^2 \theta + 2 s_0 \cos \theta \sin \theta + t_0 \sin^2 \theta) + \frac{\rho^3}{6} K,$$

K restant borné (soit $|K| < \mu$) sur un voisinage convenablement choisi, $\mathcal{V}$, de A. Le coefficient de $\frac{\rho^3}{2}$ est une fonction continue $H(\theta)$, de période π , elle que

$$2 H(\theta) = r_0 + t_0 + (r_0 - t_0) \cos 2 \theta + 2 s_0 \sin 2 \theta$$

$$\text{ou } 2 H(\theta) = r_0 + t_0 + k \cos(2 \theta + \varphi) \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{(r_0 - t_0)^2 + 4 s_0^2}.$$

$$2 H(\theta) \text{ admet les bornes } 2 \alpha = r_0 + t_0 - k \quad \text{et} \quad 2 \beta = r_0 + t_0 + k;$$

$$\text{notons que } 4 \alpha \beta = (r_0 + t_0)^2 - k^2 \quad \text{ou} \quad \alpha \beta = r_0 t_0 - s_0^2.$$

1^{er} Cas : $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$; α et β ont un signe commun, qui est celui de leur somme $r_0 + t_0$, et par suite le signe commun à r_0 et t_0 . Supposons, par exemple, r_0 et t_0 positifs :

$$\forall \theta, \quad 0 < \alpha \leq H(\theta) \leq \beta.$$

Pour un point $M \neq A$, qui appartient à la fois à $\mathcal{V}$ et à un cercle de centre A , de rayon inférieur à $\frac{3\alpha}{\mu}$, $f(M) - f(A)$ est positif : la fonction f présente au point A un minimum strict.

Si r_0 et t_0 sont négatifs, f présente en A un maximum strict.

2^e Cas : $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$; α et β ont des signes distincts; $H(\theta)$ prend des valeurs tantôt positives, tantôt négatives; on peut choisir un couple (D_1, D_2) de droites passant par A , telles que

$$M \in D_1 \implies H(\theta) = -\lambda_1 (\lambda_1 > 0); \quad M \in D_2 \implies H(\theta) = \lambda_2 (\lambda_2 > 0).$$

Pour un point $M \neq A$, appartenant à la fois à $\mathcal{V}$ et à un cercle de centre A , de rayon inférieur à $\frac{3\lambda_1}{\mu}$ et à $\frac{3\lambda_2}{\mu}$, on a

$$\text{si } M \in D_1, \quad f(M) - f(A) < 0 \quad \text{et si } M \in D_2, \quad f(M) - f(A) > 0.$$

La fonction f ne présente pas d'extremum au point A .

3^e Cas : $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$; il est nécessaire de développer la formule de Taylor à l'ordre 3 au moins.

Nous verrons ultérieurement l'interprétation géométrique de ce résultat.

REMARQUE. — Dans l'étude d'une fonction $f(x)$ d'une seule variable, nous avons vu que si $f'(a) = 0$, en général $f''(a) \neq 0$, et a correspond à un extremum.

Au contraire, dans l'étude d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables, en un point où $f'_x(a, b) = 0$ et $f'_y(a, b) = 0$, on peut dire qu'en général $s_0^2 - r_0 t_0$ ne sera pas nul, mais il y a autant de « chances » pour que cette quantité soit positive ou soit négative; on ne peut donc pas dire que l'annulation des dérivées partielles soit une condition en général suffisante d'existence d'un extremum.

5^o Extremum d'une fonction de plusieurs variables liées par des relations. — Nous ne considérons dans la suite que des fonctions pourvues de dérivées partielles sur le champ où elles sont définies.

a) Pour fixer les idées, considérons une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables x, y, z liées par une relation

$$(1) \quad g(x, y, z) = 0.$$

Cette relation définit z comme fonction implicite de x et de y , soit $z = \varphi(x, y)$; en supposant z remplacé par cette fonction dans $f(x, y, z)$ on est ramené à chercher les extremums d'une fonction de deux variables x, y ; les

valeurs correspondantes de ces variables annulent les deux dérivées partielles de cette fonction, c'est-à-dire sont telles que

$$(2) \quad \begin{cases} f'_x + \varphi'_x f'_z = 0 \\ f'_y + \varphi'_y f'_z = 0. \end{cases}$$

Or, $g(x, y, z)$ devient la fonction nulle quand on y remplace z par la fonction $\varphi(x, y)$,

$$(3) \quad \begin{cases} g'_x + \varphi'_x g'_z = 0 \\ g'_y + \varphi'_y g'_z = 0. \end{cases}$$

Portons dans les équations (2) les valeurs de φ'_x et de φ'_y définies par les relations (3); on trouve que les valeurs de x, y, z susceptibles de rendre maximum ou minimum la fonction vérifient le système formé par l'équation (1) et les équations

$$(4) \quad \frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} = \frac{f'_z}{g'_z}.$$

Toute valeur d'un extremum est racine de l'équation obtenue en éliminant x, y, z , entre les équations (1), (4) et $u = f(x, y, z)$.

Comme exercice le lecteur pourra chercher ainsi le minimum de

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

x, y, z étant liées par la relation $Ax + By + Cz + D = 0$

et trouver ainsi la distance d'un point à un plan en coordonnées rectangulaires.

b) On raisonnera de même pour trouver les valeurs de x, y, z pour lesquelles $f(x, y, z)$ est extremum, x, y, z étant liées par deux équations

$$g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0.$$

On regardera ces équations comme définissant par exemple y et z en fonction de x ; $f(x, y, z)$ devient une fonction de la seule variable x . On trouvera facilement que les valeurs x, y, z qui correspondent à un extremum forment une solution du système

$$g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0, \quad \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = 0.$$

EXERCICES

1. — Connaissant les dérivées successives de la fonction $y = f(x)$, calculer la dérivée quatrième et la dérivée cinquième de la fonction réciproque $x = \varphi(y)$.

2. — Quelle relation doit exister entre la fonction $x = \varphi(y)$ réciproque de $y = f(x)$, ses dérivées $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$ et la variable y pour que l'on ait

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (e^y - x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 0.$$

3. — Calculer les trois premières dérivées de la fonction y de la variable x définie par l'équation

$$x^2 + y^2 = e^{2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}}.$$

Interpréter géométriquement le résultat trouvé pour y' . Vérifier que $\frac{(1 + y'^2)^3}{y'^2(x^2 + y^2)}$ reste constant.

4. — Calculer la dérivée de la fonction y de la variable x définie par

a)
$$y = x(\operatorname{Log} y - 1) - x \operatorname{Log} x$$

b)
$$x \left(\sin \frac{y}{x} + e^{\frac{x}{y}} \right) - y = 0$$

c)
$$\operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{x^3 + y^3 - 3xy^2}{x^3 + y^3 - 3x^2y}} = \frac{\pi}{12}$$

d)
$$f(x, y) = 0, f \text{ étant une fonction homogène.}$$

5. — Calculer les dérivées partielles successives des fonctions

$$\sin x \sin y \sin z \quad \text{et} \quad \cos^2 x \cos^2 y.$$

6. — Existence et continuité des dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = y^2 \sin \frac{x}{y} \quad \text{si} \quad y \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x, 0) = 0.$$

7. — Continuité de la fonction $f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = x^2 \quad \text{si} \quad |x| \leq |y| \quad \text{et} \quad f(x, y) = y^2 \quad \text{si} \quad |x| > |y|.$$

8. — Calculer $f''_{xy}(0, 0)$ et $f''_{yx}(0, 0)$ pour la fonction $f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = xy \sin \frac{\pi x - y}{2x + y} \quad (x + y \neq 0)$$

$$f(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad x + y = 0.$$

9. — Montrer que s'il existe une fonction φ telle que, sur un certain champ, la fonction $f(x, y, z)$, pourvue de dérivées partielles, vérifie l'égalité

(1)
$$f(tx, ty, tz) = \varphi(t)f(x, y, z),$$

la fonction f est homogène.

Même question en remplaçant (1) par

(2)
$$f[(1+t)x, e^t y, (1+\sin t)z] = \varphi(t)f(x, y, z).$$

10. — Trouver tous les polynômes $f(x, y)$ homogènes de degré n tels que

a)
$$f''_{x^2}(x, y) = f''_{y^2}(x, y) \quad \text{b)} \quad \frac{1}{x} f'_x(x, y) = \frac{1}{y} f'_y(x, y).$$

11. — Trouver tous les polynômes $f(x, y)$ tels que : $xf'_x + yf'_y = 4f$.

12. — Trouver toutes les fonctions de la forme $z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

a)
$$z''_{x^2} + z''_{y^2} = 0; \quad \text{b)} \quad z''_{x^2} + k^2 z''_{y^2} = z.$$

13. — Trouver toutes les fonctions f , d'une variable, telles que

a)
$$z = f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \quad \text{vérifie} \quad z''_{x^2} + z''_{y^2} = 0$$

b)
$$u = f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right) \quad \text{ou} \quad u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad \text{vérifie} \quad u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0$$

c)
$$z = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{vérifie} \quad z''_{x^2} + z''_{y^2} = \frac{y}{x^3} \quad \text{ou} \quad z''_{x^2} - z''_{y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

14. — Montrer que, quelles que soient les fonctions f et g d'une variable, la fonction

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$$

vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 z''_{xx} + 2xy z''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0.$$

15. — Montrer que, quelles que soient les fonctions f et g d'une variable, la fonction z des variables x et y définie par les relations

$$z = \alpha x + yf(\alpha) + g(\alpha), \quad 0 = x + yf'(\alpha) + g'(\alpha)$$

dans lesquelles α est un paramètre, vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$z''_{xx} \cdot z''_{yy} = (z''_{xy})^2.$$

16. — Montrer que, quelle que soit la fonction f de deux variables, la fonction implicite z de x et y définie par $f(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0$ vérifie

$$yz z'_x + xz z'_y = xy.$$

17. — La fonction de deux variables indépendantes : $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ présente-t-elle un extremum en l'un des points $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ou $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$?

18. — Extremums de la fonction de deux variables indépendantes :

$$z = x^2 y^3 (1 + 3x + 2y).$$

19. — α et β étant des nombres donnés, supérieurs à 1, trouver le minimum de la fonction

$$z = \frac{x^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{2xy}{\alpha\beta - 1} + \frac{y^2}{\beta^2 - 1}.$$

20. — Minimum de $z = x^3 + 2xy^2 + y^3$, x et y étant liés par $xy = a^2$.

21. — Extremums de $u = (1 + x)(1 + y)(1 + z)$, les variables x , y et z étant liées par $a^x b^y c^z = k$.

22. — Maximum du produit des distances aux côtés d'un triangle d'un point intérieur à ce triangle.

23*. — Déterminer sur trois courbes données trois points tels que le triangle les admettant pour sommets ait une aire extremum. Cas particulier : les trois courbes sont confondues avec une même ellipse.

24. — Parmi les triangles dont les sommets A, B, C sont respectivement sur trois droites données D_1 , D_2 , D_3 , d'un plan construire celui qui admet le périmètre minimum.

25. — Existence et développement limité au voisinage de $x = 0$ de la fonction $y(x)$ définie par :

$$\begin{aligned} \text{Arc tg}(xy) &= e^{x+y} - 1, & y(0) &= 0; \\ xy - \sin y + x &= 0, & y(0) &= 0; \\ \sin x - \sin y + 2x - y &= 0, & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

CHAPITRE XII

FONCTIONS COMPLEXES

155. Suites de nombres complexes. — **1° DÉFINITION.** — On appelle suite de nombres complexes une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. En d'autres termes, on associe à l'entier naturel n le nombre complexe

$$u_n = a_n + ib_n;$$

La partie réelle a_n de u_n , ainsi que le coefficient b_n de i sont les termes généraux de deux suites réelles $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$.

2° Extension de la notion de limite. — On dit que $\{u_n\}$ admet la limite L si $|u_n - L|$ tend vers zéro pour n infini.

Notons que le module de $u_n - L$ n'est autre que la distance (euclidienne) des images, dans le plan complexe, des nombres u_n et L .

En abrégé, $\lim u_n = L$ signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \text{ entier naturel tel que } n > p \implies |u_n - L| < \varepsilon.$$

Par application du résultat obtenu précédemment sur la convergence d'une suite $\{M_n\}$ dans $\mathbb{R}^n$, nous énoncerons :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\{a_n + ib_n\}$ admette la limite $A + iB$ est que $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ admettent les limites respectives A et B .

3° Opérations sur les limites. — Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux suites formées de nombres complexes et admettant des limites respectivement égales aux nombres complexes

$$U = A + iB, \quad V = C + iD.$$

Il est facile de démontrer que les suites $\{u_n + v_n\}$, $\{u_n - v_n\}$, $\{u_n v_n\}$ ont des limites égales à $U + V$, $U - V$ et UV et que, si les nombres de la suite $\{v_n\}$ et leur limite V ne sont pas nuls, la suite $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ admet pour limite $\frac{U}{V}$.

Développons le raisonnement pour cette dernière suite, il est le même pour les autres. Posons

$$u_n = a_n + ib_n, \quad v_n = c_n + id_n$$

et calculons

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{a_n c_n + b_n d_n}{c_n^2 + d_n^2} + i \frac{b_n c_n - a_n d_n}{c_n^2 + d_n^2}.$$

D'après les propriétés des suites formées de nombres réels, les suites qui ont pour termes généraux $\frac{a_n c_n + b_n d_n}{c_n^2 + d_n^2}$ et $\frac{b_n c_n - a_n d_n}{c_n^2 + d_n^2}$ ont des limites respectivement égales à $\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$ et $\frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$ il en résulte que la suite $\left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$ a pour limite $\frac{U}{V}$.

4° Limite infinie. — On dit que $u_n = a_n + ib_n$ devient infini si $|u_n|$ tend vers l'infini avec n , c'est-à-dire si

$$\forall A > 0, \exists p \text{ entier naturel tel que } n > p \implies |a_n + ib_n| > A.$$

156. Fonctions complexes d'une variable réelle. — 1° DÉFINITION.

— On appelle fonction complexe d'une variable réelle une application F d'une partie I de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes. En d'autres termes, on associe à tout élément x de I un nombre complexe $Z = X + iY$; ses deux composantes X et Y sont des fonctions de x , et, en nommant F la transformation étudiée, on écrit

$$F(x) = f(x) + ig(x).$$

2° Notion de limite. — On dit que $F(x)$ admet la limite L quand x tend vers a et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$, si $|F(x) - L|$ tend vers 0 lorsque x tend vers a ; en d'autres termes si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } 0 < |x - a| < \alpha \implies |F(x) - L| < \varepsilon.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que, en posant $L = A + iB$, $f(x)$ et $g(x)$ aient pour limites respectives A et B lorsque x tend vers a ; la démonstration est analogue à celle qui a été donnée pour les suites de nombres complexes, ou les suites de points dans un espace métrique.

3° Continuité. — On dit que $F(x)$ est continue au point $x = a$ si $F(a)$ existe et si $F(x)$ tend vers $F(a)$ lorsque x tend vers a , en d'autres termes si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x - a| < \alpha \implies |F(x) - F(a)| < \varepsilon.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient continues au point a .

Les propositions relatives aux limites des sommes, des produits, des quotients se déduisent des propositions concernant les fonctions réelles et les règles de calcul des nombres complexes. En particulier la somme et le produit de fonctions continues sont encore des fonctions continues; le quotient de deux fonctions continues est une fonction continue si pour la valeur considérée de la variable la fonction diviseur n'est pas nulle.

Par exemple $\cos x + i \sin x$ est une fonction continue en tout point.

De même, si a et b sont complexes, $ax + b$ est une fonction continue de la variable réelle x , et il en est de même pour $(ax + b)^m$, m étant un entier positif ou négatif (si $m < 0$, on suppose $x \neq -\frac{b}{a}$).

4° Dérivée d'une fonction complexe de variable réelle. — DÉFINITION.

— On dit que la fonction F définie sur le segment $\mathcal{C}$ de l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = f(x) + ig(x)$$

est dérivable au point x_0 de $\mathcal{C}$ si le rapport $m = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$

admet une limite L quand x tend vers x_0 sur $\mathcal{C}$.

Le nombre L est appelé dérivée de la fonction F au point x_0 ; on l'écrit

$$L = F'(x_0).$$

D'après l'égalité

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + i \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

pour que le premier membre ait une limite lorsque x tend vers x_0 , il faut et il suffit que les rapports réels

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

aient respectivement une limite quand x tend vers x_0 .

En d'autres termes : pour que F soit dérivable au point x_0 , il faut et il suffit que f et g le soient; si $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$ sont les dérivées de f et g au point x_0 ,

$$F'(x_0) = f'(x_0) + ig'(x_0).$$

Les propriétés énoncées pour les limites des fonctions complexes d'une variable réelle permettent d'étendre à ces fonctions les règles de dérivation données pour la somme, le produit ou le quotient de fonctions réelles d'une variable réelle. En particulier, si U désigne une fonction complexe d'une variable réelle, admettant une dérivée U' et si m est un entier positif ou négatif, U^m admet une dérivée donnée par la formule $mU^{m-1}U'$.

EXEMPLES. — I. Quels que soient les nombres complexes a et b , la fonction $(ax + b)^m$ de la variable réelle x est définie, m étant un entier positif ou négatif; cette fonction admet pour dérivée $ma(ax + b)^{m-1}$. [Si $m < 0$, on suppose $ax + b \neq 0$].

II. La fonction $\cos x + i \sin x$ de la variable réelle x admet pour dérivée

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad -\sin x + i \cos x;$$

elle admet une dérivée n^e qui est $\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

III. On pourra dériver une fonction rationnelle de la variable réelle x , par la règle usuelle de dérivation d'un quotient, pour toute valeur distincte d'un pôle de cette fonction.

L'élément simple $\frac{A}{(x-a)^k}$, où A et a sont complexes, et x est une variable réelle, pour dérivée $\frac{-kA}{(x-a)^{k+1}}$.

Les dérivées successives d'une fonction rationnelle d'une variable réelle pourront s'obtenir en décomposant au préalable cette fonction rationnelle en éléments simples.

Par exemple soit $f(x) = \text{Arc tg } x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right]$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{2i} \left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right]$$

et finalement

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x^2+1)^n} [C_n^1 x^{n-1} - C_n^3 x^{n-3} + C_n^5 x^{n-5} - \dots]$$

5° Primitives d'une fonction complexe de la variable réelle. — Toute fonction Φ de la variable réelle x telle que

$$\Phi'(x) = F(x)$$

est dite primitive de la fonction F .

Si f_1 et g_1 sont des primitives de f et de g respectivement toute primitive de F est telle que

$$\Phi(x) = f_1(x) + ig_1(x) + C$$

où C est une constante complexe.

Une primitive de la fonction $A(x-a)^k$, où k est un entier positif ou négatif, différent de -1 , est $\frac{A}{k+1}(x-a)^{k+1}$, quelles que soient les constantes complexes A et a , x étant une variable réelle.

6° Intégrale d'une fonction complexe de variable réelle. — $F(x)$ étant définie sur le segment $[a, b]$, on dit qu'elle est intégrable si, étant donnée une subdivision de $[a, b]$ par une suite monotone $a, x_1, \dots, x_{h-1}, x_h, \dots, x_{n-1}, b$, la somme

$$\sigma = \sum_{h=1}^n (x_h - x_{h-1}) F(\lambda_h); \quad \lambda_h \in [x_{h-1}, x_h]$$

admet une limite I lorsque $\sup |x_h - x_{h-1}|$ tend vers zéro.

Il faut et il suffit pour cela que $f(x)$ et $g(x)$ soient intégrables sur $[a, b]$.

Dans ces conditions on écrit

$$\int_a^b [f(x) + ig(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + i \int_a^b g(x) dx.$$

Par exemple

$$H = \int_0^1 \frac{dx}{x-i} = \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2+1} + i \frac{1}{x^2+1} \right] dx = \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} + i \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}.$$

Des primitives des fonctions $\frac{x}{x^2+1}$ et $\frac{1}{x^2+1}$ sont respectivement $\frac{1}{2} \operatorname{Log}(x^2+1)$ et $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$, et par suite

$$H = \operatorname{Log} \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}.$$

157. Fonctions complexes d'une variable complexe. — 1^o DÉFINITION.

— On appelle fonction complexe d'une variable complexe une application F d'une partie C de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ lui-même. En d'autres termes

$$z = x + iy \xrightarrow{f} Z = X + iY.$$

On peut écrire, de façon équivalente,

$$m(x, y) \xrightarrow{F} M(X(x, y), Y(x, y)).$$

ce qui permet de considérer f comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (espace affine, muni de la distance euclidienne). Nous pouvons alors donner les notions de voisinage et de limite.

2^o Notion de limite. — Étant donné le point $l = \sigma + ib$, on appelle *voisinage* de l tout domaine qui contient l'ensemble des points $z = x + iy$ tels que $|z - l| < r$, r étant un nombre positif.

Soit $f(z)$ une fonction définie sur un voisinage du point l , sauf peut-être en l .

On dit que $f(z)$ admet la limite $L = A + iB$ quand z tend vers $l = a + ib$ si le module de la différence $f(z) - L$ admet la limite 0 quand le module de la différence $z - l$ tend vers 0.

En d'autres termes,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall z (0 < |z - l| < \alpha), \text{ on a } |f(z) - L| < \varepsilon.$$

On écrit

$$\lim_{z \rightarrow l} f(z) = L.$$

$f(z)$ admet la limite L lorsque z tend vers l , si et seulement si les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ (partie réelle et partie imaginaire de $f(z)$) admettent respectivement les limites A et B (partie réelle et partie imaginaire de L) lorsque (x, y) tend vers $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$f(z)$ est dite continue pour $z = l$ si $\lim_{z \rightarrow l} f(z) = f(l)$

$f(z)$ est continue pour l si et seulement si les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont continues au point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Les théorèmes usuels sur les limites et la continuité de la somme du produit, du quotient de fonctions réelles d'une variable réelle s'étendent aux fonctions complexes d'une variable complexe.

En particulier une fonction polynôme

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n \quad (1)$$

est continue sur tout le plan complexe.

Une fonction rationnelle $\frac{f(z)}{g(z)}$, f et g étant deux fonctions polynômes de la variable z , est une fonction continue pour toute valeur z qui n'est pas un zéro du polynôme g .

3° Limite infinie. — a) On dit que $f(z)$ devient infini lorsque z tend vers z_0 si $|f(z)|$ tend vers l'infini lorsque z tend vers z_0 ; en d'autres termes :

$\forall A > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall z (0 < |z - z_0| < \alpha)$, on a $|f(z)| > A$.
 n étant un entier naturel $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ devient infini lorsque z tend vers z_0 .

b) Reprenons la fonction polynôme (1) lorsqu'elle ne se réduit pas à une constante : ($n \geq 1$; $A_0 \neq 0$).

Écrivons
$$f(z) = A_0 z^n \cdot P\left(\frac{1}{z}\right)$$

avec
$$P\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{A_1}{A_0} \left(\frac{1}{z}\right) + \dots + \frac{A_n}{A_0} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$|z| \rightarrow \infty \text{ équivaut à } \frac{1}{z} \rightarrow 0, \text{ ce qui entraîne } P\left(\frac{1}{z}\right) \rightarrow 1.$$

Étant donné que $|f(z)| = |A_0| |z|^n \left|P\left(\frac{1}{z}\right)\right|$, $|f(z)|$ tend vers l'infini lorsque $|z|$ tend vers l'infini; on dira simplement que $f(z)$ devient infini avec z .

c) La fonction rationnelle $\frac{f(z)}{g(z)}$ devient infinie lorsque z tend vers une valeur z_0 telle que $g(z_0) = 0$, $f(z_0) \neq 0$.

EXERCICES

1. — On appelle $P(x, y)$ tout polynôme à coefficients complexes, de degré donné n , homogène qui vérifie $P_{x^2}'' + P_{y^2}'' = 0$.

Montrer que l'ensemble E formé par le polynôme nul et les polynômes $P(x, y)$ forme un espace vectoriel. Trouver la dimension et une base de cet espace vectoriel.

2. — Limite, pour n infini, de

$$\left(1 + \frac{in}{n^2 - 1}\right)^n; \quad \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (z = x + yi \text{ donné}).$$

3. — On considère, dans R^2 , la transformation qui associe au point (x, y) le point (X, Y) . On donne $X = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}$.

$$\text{Calculer } Y \text{ sachant que } \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Calculer $Z = X + iY$ en fonction de $z = x + iy$.

4* — On désigne par $P(z)$ un polynôme à coefficients complexes. Calculer, pour toutes les valeurs de l'entier naturel p , l'intégrale

$$I_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{-p i \theta} d\theta$$

En déduire que, si $|P(z)|$ admet le majorant k quand le point z parcourt le cercle trigonométrique ($|z| = 1$), les coefficients de $P(z)$ ont un module inférieur à k .

Retrouver ce résultat par l'étude des valeurs prises par le polynôme $P(z)$, de degré n , pour les racines m -ièmes de l'unité ($m = n + 1$).

CHAPITRE XIII

DIFFÉRENTIELLES

Nous avons rencontré la notion d'application différentiable

a) au n° 68 dans le cas d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

b) au n° 142 dans le cas d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Nous nous proposons dans les n°s 159 à 162 d'étendre cette notion au cas d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. En première lecture, on pourra se contenter de lire le n° 158; qui fait suite au n° 142 et qui permet d'aborder les calculs pratiques des n°s 163 et 164.

I. DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

158. Complément sur les différentielles des fonctions numériques continûment différentiables.

1° THÉORÈME. — Étant données

a) l'application continûment différentiable de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$

$$z = g(y_1, \dots, y_q)$$

b) les q applications continûment différentiables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

$$y_1 = F_1(x_1, \dots, x_p) \dots y_q = F_q(x_1, \dots, x_p),$$

l'application composée de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

$$z = g[F_1(x_1, \dots, x_p), \dots, F_q(x_1, \dots, x_p)]$$

que nous écrirons $z = g^*(x_1, \dots, x_p)$

est continûment différentiable et sa différentielle s'écrit

$$dz = \frac{\partial g}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_q} dy_q$$

à condition de considérer $dy_1, \dots, dy_q$, comme les différentielles des applications $F_1, \dots, F_q$.

Le théorème du n° 141, 3° relatif à la dérivation d'une fonction composée donne

$$(1) \quad \frac{\partial g^*}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_q} \frac{\partial F_q}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Les hypothèses sur la continuité des dérivées partielles de $g, F_1, \dots, F_q$ entraînent la continuité des dérivées partielles de g^* , qui est donc continûment différentiable. On a ainsi

$$(2) \quad dz = \frac{\partial g^*}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g^*}{\partial x_p} dx_p.$$

Compte tenu de (1); (2) s'écrit

$$(3) \quad dz = \frac{\partial g}{\partial y_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_p} dx_p \right) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_q} \left(\frac{\partial F_q}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_q}{\partial x_p} dx_p \right).$$

$$\text{Or} \quad dy_j = \frac{\partial F_j}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial x_p} dx_p \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

L'égalité (3) peut donc finalement s'écrire

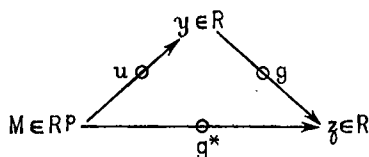
$$(4) \quad dz = \frac{\partial g}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_q} dy_q.$$

La formule (4) a la même apparence que celle qui donnerait la différentielle de l'application g (n° 142), mais ici $dy_1, \dots, dy_q$ sont les différentielles des applications $F_1, \dots, F_q$.

REMARQUE. — Le théorème précédent est un cas particulier du théorème général du n° 162, 2°, avec les hypothèses restrictives suivantes : a) $m = 1$; b) toutes les fonctions envisagées sont continûment différentiables.

2° Pratique du calcul des différentielles. — Dans tous les exemples de cet alinéa les fonctions données sont continûment différentiables.

a) Soit g une application de R dans R , et u une application de R^p dans R . On dispose alors d'une application de R^p dans R selon le diagramme suivant :



$$z = g[u(M)] \quad \text{ou} \quad z = g^*(M).$$

D'après le 1°, l'application composée g^* de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ a pour différentielle

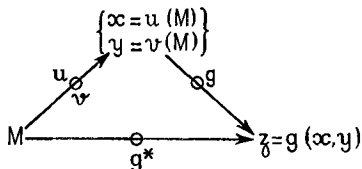
$$dz = g'[u(M)] du.$$

$$d(\sin u) = \cos u \, du; \quad d(\cos u) = -\sin u \, du$$

$$d(\operatorname{Arctg} u) = \frac{du}{1+u^2}; \quad d(u^n) = nu^{n-1} du.$$

b) Soit g une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et soient u et v deux applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

On dispose alors d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ selon le diagramme suivant



$$z = g[u(M), v(M)] \quad \text{ou} \quad z = g^*(M).$$

L'application composée g^* de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ a pour différentielle

$$dz = g'_x[u(M), v(M)] du + g'_y[u(M), v(M)] dv.$$

C'est ainsi que :

$$d(u + v) = du + dv; \quad d(uv) = v du + u dv,$$

et, à condition que $v(M) \neq 0$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}; \quad d\left(\operatorname{Arctg} \frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{u^2 + v^2}.$$

En un point, où $u(M)$ et $v(M)$ ne sont pas simultanément nuls,

$$d(\sqrt{u^2 + v^2}) = \frac{u du + v dv}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

c) *Différentielle logarithmique.* — Par définition, on appelle différentielle logarithmique d'une application u de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, en un point M pour lequel $u(M) \neq 0$, la différentielle de $\operatorname{Log} |u|$, soit $\frac{du}{u}$ (cf. a).

On obtient, à partir de a) et de b) :

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}; \quad \frac{d(u^n)}{u^n} = n \frac{du}{u}; \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{\frac{u}{v}} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$$

*II. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DE R^p DANS R^q

{ L'étude de ce sous-chapitre II suppose l'étude préalable des applications linéaires (chapitres X, XI, XII du tome I) et celle des généralités sur les espaces affines (nos 48, 49, 50 du tome III). }

L'application différentielle sera définie comme une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre. Il pourrait donc paraître normal que notre point de départ soit une application d'un espace vectoriel dans un autre. En vue des applications à la géométrie (chapitre XVII du tome IV) nous avons préféré supposer que l'espace-objet est affine, l'espace-image étant indifféremment affine ou vectoriel. Le choix du point de vue n'a d'ailleurs pas d'importance théorique car tout espace vectoriel peut être pourvu d'une structure (canonique) d'espace affine et (moyennant le choix d'une origine) tout espace affine peut être muni d'une structure d'espace vectoriel (III, 49).

Notations. — Un symbole surligné représentera toujours un vecteur d'un espace vectoriel, sans que la réciproque soit vraie (un nombre réel ne sera pas représenté par un symbole surligné, même s'il intervient au titre de vecteur de l'espace vectoriel $\vec{R}$). Nous désignerons par :

$\vec{R}^p, \vec{R}^q, \vec{R}^m$: des espaces vectoriels de dimensions p, q, m sur le corps des réels,

$\vec{0}, \vec{0}', \vec{0}''$: les vecteurs nuls de $\vec{R}^p, \vec{R}^q, \vec{R}^m$,

$\|, N, N_1$: des normes sur $\vec{R}^p, \vec{R}^q, \vec{R}^m$,

$\mathcal{U} = \{ \vec{u}_i \}, \mathcal{V} = \{ \vec{v}_j \}, \mathcal{W} = \{ \vec{w}_k \}$: des bases de $\vec{R}^p, \vec{R}^q, \vec{R}^m$.

R^p, R^q, R^m : des espaces affines attachés aux espaces vectoriels $\vec{R}^p, \vec{R}^q, \vec{R}^m$

O, O', O'' : des origines dans R^p, R^q, R^m .

Dans ce tome II, où il ne sera pas encore question d'applications géométriques, nous nous limiterons au cas où $\vec{R}^p$ et R^p désignent le même ensemble, celui des p -uplets $(x_1, \dots, x_p)$, R^p s'entendant comme l'espace affine obtenu en munissant l'espace vectoriel $\vec{R}^p$ de sa structure affine canonique. La seule base $\mathcal{U} = \{ \vec{u}_i \}$ de $\vec{R}^p$ qui sera utilisée sera la base canonique. Nous aurons donc

$\vec{0} = (0, \dots, 0); \quad \vec{u}_1 = (1, \dots, 0); \dots; \vec{u}_p = (0, \dots, 1);$

$O = (0, \dots, 0), A = (a_1, \dots, a_p)$ et $M = (x_1, \dots, x_p)$ seront des points de R^p ;

le vecteur $\vec{h}$ de $\vec{R}^p$ représenté par le bipoint (A, M) donnera lieu aux égalités

$$M = A + \vec{h} \quad \text{ou} \quad \vec{h} = (x_1 - a_1, \dots, x_p - a_p).$$

159. Notion de dérivée partielle. — 1° DÉFINITION. Soit f une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ (resp. $\vec{\mathbb{R}}^q$) définie sur une boucle ouverte $\mathcal{D}$; soit A un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{s}$ un vecteur non nul de $\vec{\mathbb{R}}^p$. On dit que l'application f admet au point A une dérivée suivant le vecteur $\vec{s}$ si l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\vec{\mathbb{R}}^q$ déterminée, pour $\rho \neq 0$, par la formule

$$\varphi(\rho) = \frac{f(A + \rho \vec{s}) - f(A)}{\rho} \quad (\rho \in \mathbb{R}, |\rho| \text{ assez petit})$$

admet une limite quand ρ tend vers 0.

Quand elle existe, cette limite est un vecteur de $\vec{\mathbb{R}}^q$ que l'on note $f'_{\vec{s}}(A)$, ou $\frac{\partial f(A)}{\partial \vec{s}}$.

2° Propriétés de la dérivée partielle. — a) L'unicité de la dérivée partielle est une conséquence de l'unicité de la limite.

b) Soit λ un réel non nul; considérons le vecteur $\vec{t} = \lambda \vec{s}$. Il suffit d'écrire

$$\frac{f(A + \rho \vec{t}) - f(A)}{\rho} = \lambda \frac{f(A + \lambda \rho \vec{s}) - f(A)}{\lambda \rho}$$

pour constater que l'existence de $f'_{\vec{s}}(A)$ équivaut à celle de $f'_{\vec{t}}(A)$ et que la seconde dérivée partielle s'obtient en multipliant la première par λ .

c) Dans la mesure où l'espace-image est vectoriel, on peut dire que la dérivée partielle suivant le vecteur donné $\vec{s}$ est linéaire, ce qui signifie que

$$\psi = f + g \implies \psi'_{\vec{s}}(A) = f'_{\vec{s}}(A) + g'_{\vec{s}}(A),$$

$$\text{et} \quad \psi = \lambda f \quad (\lambda \text{ réel, fixe}) \implies \psi'_{\vec{s}}(A) = \lambda f'_{\vec{s}}(A).$$

3° Cas particuliers. — a) Application de $\mathbb{R}$ dans $\vec{\mathbb{R}}^q$. — La définition du 1° dans laquelle f est l'application

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{D} \implies f(u) \in \vec{\mathbb{R}}^q$$

et $\vec{s}$ est le nombre réel 1 est celle de la dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable réelle; nous la retrouverons au n° 3 du tome IV.

b) Application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. — Soit

$$M = (x_1, \dots, x_p) \implies y = f(x_1, \dots, x_p) \quad \text{et} \quad A = (a_1, \dots, a_p).$$

Choisissons pour vecteur $\vec{s}$ le vecteur $\vec{u}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i -ième, qui est 1. Nous avons

$$\frac{f(A + \rho \vec{u}_i) - f(A)}{\rho} = \frac{f(a_1, \dots, a_i + \rho, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{\rho}.$$

Il en résulte que $f'_{\vec{u}_i}(A)$ n'est autre que $f'_{x_i}(a_1, \dots, a_p)$, qui apparaît ici comme un élément de l'espace vectoriel $\vec{\mathbb{R}}$.

160. Notion de fonction différentiable. — 1° DÉFINITION. — On dit que l'application f de R^p dans R^q (resp. $\vec{R}^q$), définie sur la boule ouverte $\mathcal{D}$ de centre A et de rayon r , est différentiable au point A s'il existe une application linéaire, $\mathcal{L}$, de $\vec{R}^p$ dans $\vec{R}^q$ telle que l'application ε de $\vec{R}^p$ dans $\vec{R}^q$ déterminée pour $\vec{h} \neq \vec{0}$, par la formule

$$(1) \quad f(A + \vec{h}) - f(A) = \mathcal{L}(\vec{h}) + \|\vec{h}\| \times \varepsilon(\vec{h})$$

admet la limite $\vec{0}'$ quand $\vec{h}$ tend vers $\vec{0}$.

Dans la définition de ε , on suppose $\vec{h} \in \vec{R}^p$, et $\|\vec{h}\|$ assez petite pour que le point $A + \vec{h}$ appartienne à $\mathcal{D}$.

On dit que $\mathcal{L}$ est l'application différentielle de f au point A (¹).

En cas d'ambiguïté, on peut être amené à écrire soit $\mathcal{L}_A$, soit $\mathcal{L}_A$, au lieu de $\mathcal{L}$.

REMARQUE I. — Soit $\mathcal{B}$ la partie de $\vec{R}^p$ formée des vecteurs dont la norme est inférieure à r (boule de centre $\vec{0}$); ε est définie sur $\mathcal{B} - \{\vec{0}\}$; nous nous affranchirons de la restriction $\vec{h} \neq \vec{0}$ en convenant que $\varepsilon(\vec{0}) = \vec{0}'$; la différentiabilité de f au point A équivaut ainsi à la continuité de ε en $\vec{0}$.

REMARQUE II. — Dans le cas d'une application de R^p (par exemple R^2) dans R , il suffit de faire dans (1)

$$\vec{h} = (h_1, h_2) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\vec{h}) = \alpha h_1 + \beta h_2$$

pour retrouver la définition donnée au n° 142.

2° Propriétés des applications différentiables. — a) THÉORÈME I. —

Si une application f de R^p dans R^q (resp. $\vec{R}^q$) est différentiable au point A , elle est continue en ce point.

Montrons que les applications $\mathcal{L}$ et ε qui interviennent, au 1°, dans la

(1) On dit que les deux applications f et g de la boule ouverte $\mathcal{D} \subset R^p$ dans R^q (resp. $\vec{R}^q$), sont tangentes au point A si l'application ω de $\vec{R}^p$ dans $\vec{R}^q$ déterminée, pour $\vec{h} \neq \vec{0}$, par la formule

$$f(A + \vec{h}) - g(A + \vec{h}) = \|\vec{h}\| \times \omega(\vec{h}).$$

admet la limite $\vec{0}'$ quand $\vec{h}$ tend vers $\vec{0}$.

La relation « g est tangente à f en A » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des applications de $\mathcal{D}$ dans R^q (resp. $\vec{R}^q$).

De ce point de vue, l'application différentiable f considérée dans la définition admet pour application tangente en A l'application affine de $\mathcal{D}$ dans R^q définie par

$$A + \vec{h} \longrightarrow f(A) + \mathcal{L}(\vec{h}).$$

relation (1) sont continues pour $\vec{0}$. La continuité de ε est déjà acquise. En ce qui concerne celle de $\mathcal{L}$, nous utiliserons les coordonnées h_i de $\vec{h}$ dans une base, $\mathcal{U} = \{ \vec{u}_i \}$, de $\mathbb{R}^p$; nous avons

$$(2) \quad \mathcal{L}(\vec{h}) = \sum_{i=1}^p h_i \mathcal{L}(\vec{u}_i)$$

ce qui entraîne, en notant $N(\vec{k})$ la norme du vecteur générique $\vec{k}$ de $\mathbb{R}^q$,

$$N[\mathcal{L}(\vec{h})] \leq v_0 \times \sup |h_i|, \quad \text{avec} \quad v_0 = \sum_{i=1}^p N(\mathcal{L}(\vec{u}_i)).$$

On en déduit que $\mathcal{L}(\vec{h})$ tend vers $\vec{0}'$ quand $\vec{h}$ tend vers $\vec{0}$.

REMARQUE. — Toutes les normes sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes (n° 135). Étant donné que $\sup |h_i|$ est une norme particulière, (2) entraîne que, pour toute norme $\| \cdot \|$ sur $\mathbb{R}^p$

$$N[\mathcal{L}(\vec{h})] \leq v \times \|\vec{h}\| \quad (v : \text{réel positif, fixe}).$$

b) THÉORÈME II. — Si une application f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ (resp. $\mathbb{R}^p$) est différentiable au point A , elle admet en ce point une dérivée partielle suivant tout vecteur non nul $\vec{s}$ de $\mathbb{R}^p$.

Dans la relation (1) du 1°, nous pouvons remplacer $\vec{h}$ par $\rho \vec{s}$ (ρ : réel fixe). Compte tenu de

$$\mathcal{L}(\rho \vec{s}) = \rho \mathcal{L}(\vec{s}) \quad \text{et} \quad \|\rho \vec{s}\| = |\rho| \times \|\vec{s}\|,$$

nous avons, pour $\rho \neq 0$ et $|\rho|$ assez petit,

$$\frac{f(A + \rho \vec{s}) - f(A)}{\rho} = \mathcal{L}(\vec{s}) + \|\vec{s}\| \times \frac{\rho}{|\rho|} \times \varepsilon(\rho \vec{s}).$$

On en déduit . $f'_s(A) = \mathcal{L}(\vec{s})$.

COROLLAIRE. — Si une application est différentiable en un point, l'application différentielle en ce point est unique.

Cela est dû à l'unicité de la dérivée partielle $f'_s(A)$, quand f , A et $\vec{s}$ sont donnés.

c) THÉORÈME III. — Si f et g sont des applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, définies sur une boule ouverte $\mathcal{D}$ de centre A et différentiables au point A , les applications $f + g$ et λf (λ : réel, fixe) sont définies sur $\mathcal{D}$ et différentiables au point A .

On notera qu'ici nous supposons que l'espace-image est vectoriel.

Par hypothèse, si $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont les applications différentielles de f et g ,

$$\begin{aligned} f(A + \vec{h}) - f(A) &= \mathcal{L}_1(\vec{h}) + \|\vec{h}\| \times \varepsilon_1(\vec{h}) \\ g(A + \vec{h}) - g(A) &= \mathcal{L}_2(\vec{h}) + \|\vec{h}\| \times \varepsilon_2(\vec{h}), \end{aligned}$$

les applications ε_1 et ε_2 admettent la limite $\vec{0}$ lorsque $\vec{h}$ tend vers $\vec{0}$.

On en déduit, en posant

$$\begin{aligned} \psi &= f + g, & \Lambda &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, & \eta &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \psi(A + \vec{h}) - \psi(A) &= \Lambda(\vec{h}) + \|\vec{h}\| \times \eta(\vec{h}). \end{aligned}$$

Comme Λ est une application linéaire de $\vec{R}^p$ dans $\vec{R}^q$ et que η admet la limite $\vec{0}$ lorsque $\vec{h}$ tend vers $\vec{0}$, l'égalité précédente montre que ψ est différentiable et admet Λ pour application différentielle.

La démonstration est analogue pour λf .

En résumé avec la notation du 1° :

$$\mathcal{L}_{f+g} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g; \quad \mathcal{L}_{\lambda f} = \lambda \mathcal{L}_f.$$

d) **THÉORÈME IV.** — Soit f une application de R^p dans R , différentiable au point A , et soit $\vec{V}$ un vecteur fixe de $\vec{R}^q$. L'application g de R^p dans $\vec{R}^q$ déterminée par

$$g(M) = \vec{V}f(M)$$

est différentiable au point A .

Dans l'hypothèse faite ici sur f , les deux membres de l'égalité (1) sont des réels; en les multipliant par $\vec{V}$, nous avons une égalité entre vecteurs de $\vec{R}^q$:

$$g(A + \vec{h}) - g(A) = \vec{V}\mathcal{L}(\vec{h}) + \|\vec{h}\| \times \vec{V}\varepsilon(\vec{h}).$$

En désignant par $\mathcal{L}_1$ et ε_1 , les applications de $\vec{R}^p$ dans $\vec{R}^q$ qui associent au vecteur $\vec{h}$ respectivement $\vec{V}\mathcal{L}(\vec{h})$ et $\vec{V}\varepsilon(\vec{h})$, on obtient la proposition énoncée.

e) Si f est une application de la boule ouverte $\mathcal{D} \subset R^p$ dans R^q (resp. $\vec{R}^q$) admettant une application différentiable, $\mathcal{L}_A$, en tout point A de $\mathcal{D}$, on dit que f est différentiable sur $\mathcal{D}$.

La correspondance $A \rightarrow \mathcal{L}_A$ est alors une application f' de $\mathcal{D}$ dans l'ensemble des applications linéaires de $\vec{R}^p$ dans $\vec{R}^q$; on dit que f' est l'application dérivée de f ; de ce fait $\mathcal{L}_A = f'(A)$ est appelée parfois dérivée de f au point A , ce qui s'harmonise avec les résultats obtenus en b).

161. **Notation différentielle. Matrice jacobienne** (1). — 1° Soit f une application de R^p dans R^q (resp. $\vec{R}^q$), définie sur une boule ouverte $\mathcal{D}$ de

(1) Du nom du mathématicien allemand Jacobi (1804-1851.)

centre A et différentiable au point A; soit $\mathcal{L}$ l'application différentielle de f au point A. Nous noterons $P = f(M)$.

Nous désignerons ici le point générique M de $\mathcal{D}$ par $A + \vec{dM}$, au lieu de $A + \vec{h}$; autrement dit $\vec{dM}$ est une variable indépendante qui parcourt, dans $\vec{R}^p$, une boule ouverte de centre $\vec{0}$. D'autre part le vecteur de $\vec{R}^q$, image de $\vec{dM}$ par l'application linéaire $\mathcal{L}$ sera désigné par $\vec{dP}$ et sera appelé la *différentielle* de f au point A.

Rapportons $\vec{R}^p$ et $\vec{R}^q$ à des bases quelconques $\mathcal{U} = \{\vec{u}_i\}$ et $\mathcal{V} = \{\vec{v}_j\}$.

Posons

$$\vec{OA} = \sum_{i=1}^p \vec{u}_i a_i, \quad \vec{OM} = \sum_{i=1}^p \vec{u}_i x_i, \quad \vec{dM} = \sum_{i=1}^p \vec{u}_i dx_i$$

et
$$\vec{OP} = \sum_{j=1}^q \vec{v}_j y_j.$$

La donnée de l'application f équivaut à celle des q applications F_j de $\vec{R}^p$ dans $\vec{R}$:

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto y_j = F_j(x_1, \dots, x_p) \quad \text{ou} \quad F_j(M) \quad (j = 1, 2, \dots, q)$$

On sait (I, 173) que l'application linéaire $\mathcal{L}$ de $\vec{R}^p$ dans $\vec{R}^q$ se représente par une matrice (q, p) dont la i -ième colonne est formée par les coordonnées du vecteur $\mathcal{L}(\vec{u}_i)$ de $\vec{R}^q$, dans la base $\mathcal{V}$, soit

$$\vec{v}_j \left[\overrightarrow{m_{ji}} \right] = \mathcal{L}(\vec{u}_i) \quad \begin{cases} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, q. \end{cases}$$

D'après le n° 160, 2° : $\mathcal{L}(\vec{u}_i) = f'_{\vec{u}_i}(A)$

$\mathcal{L}(\vec{u}_i)$ est donc la limite, quand le réel ρ tend vers 0, de

$$\frac{f(A + \rho \vec{u}_i) - f(A)}{\rho} \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^q \vec{v}_j \frac{F_j(A + \rho \vec{u}_i) - F_j(A)}{\rho},$$

en sorte que

$$\mathcal{L}(\vec{u}_i) = \sum_{j=1}^q \vec{v}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(A) \quad \text{et} \quad m_{ji} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(A).$$

Il résulte de cette étude que la j -ième coordonnée de la différentielle $\vec{dP}$ est

$$\sum_{i=1}^p \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(A) \times dx_i.$$

On reconnaît la différentielle au point A de l'application F_j de R^p dans R ; nous pouvons donc la noter dy_j . Finalement :

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_q \end{bmatrix} = \mathcal{M}_f \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_p \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{M}_f$, dans laquelle les dérivées partielles sont prises au point A, est appelée *matrice jacobienne* de l'application f , relativement aux bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Si l'on effectue un changement de bases, $\mathcal{M}_f$ est remplacée par une matrice équivalente.

Dans le cas particulier où $p = q$ et $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ on peut parler du déterminant de la matrice $\mathcal{M}$ et on sait que ce déterminant est indépendant du choix de $\mathcal{U}$ (I, 228, 5°). On l'appelle *jacobien* de l'application f de R^p dans R^p et on le note

$$\frac{D(y_1, \dots, y_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}.$$

2° a) L'étude du 1° permet d'énoncer :

THÉORÈME. — Si une application $P = f(M)$ de R^p dans R^q est différentiable au point A, les q coordonnées de $P(y_j = F_j(M))$ sont différentiables en A; les coordonnées de la différentielle $\vec{dP}$ de f sont les différentielles des coordonnées de P.

Ce théorème ramène le calcul de la différentielle d'une application de R^p dans R^q à celui des différentielles de q applications de R^p dans R (cf. n° 142).

b) Inversement, supposons que chacune des q coordonnées de $P = f(M)$ soit différentiable au point A; chacune des q applications

$$M \rightarrow \vec{v}_j F_j(M)$$

est différentiable en A (n° 160, 2°, d), et il en est de même de leur somme, qui est l'application

$$M \rightarrow \vec{O'P} = \sum_{j=1}^q \vec{v}_j F_j(M)$$

c'est-à-dire $M \rightarrow P = f(M)$.

Nous énoncerons donc :

THÉORÈME. — Si les q coordonnées de $P = f(M)$, application de R^p dans R^q , sont différentiables au point A, l'application f est différentiable en A.

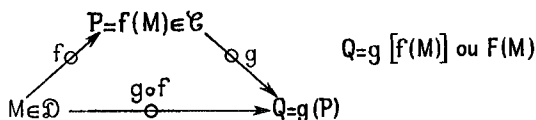
c) On observera que si l'application $P = f(M)$ est différentiable en A, les pq dérivées partielles $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ existent en ce point; mais ces dérivées partielles ne sont pas nécessairement

α) définies au voisinage de A ;

β) continues en A .

En revanche, l'existence des pq dérivées partielles $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ sur un voisinage de A , et leur continuité en A entraîne que les applications F_j sont différentiables au point A ; par suite l'application f est aussi différentiable en A ; on dit alors que l'application f est *continûment différentiable* en A . (Cette notion, indépendante du choix des repères, avait été rencontrée au n° 142, 3° dans le cas particulier où $q = 1$.)

162. Différentielle d'une fonction composée. 1° **Notations.** — Donnons-nous une application f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, définie sur une boule ouverte, $\mathcal{D}$, de centre A , et une application g de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^m$, définie sur une boule ouverte, $\mathcal{C}$, de centre $B = f(A)$, telle que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$. Nous disposons alors d'une application $g \circ f$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^m$, selon le diagramme suivant :



Les notations sont celles qui ont été détaillées au début du présent sous-chapitre.

2° THÉORÈME I. — Si f est continue en A et si g est continue en $B = f(A)$, $g \circ f$ est continue en A .

La démonstration donnée au n° 140, dans le cas particulier où $m = 1$, se généralise sans difficulté.

3° THÉORÈME II. — Si f admet en A l'application différentielle $\mathcal{L}$ et si g admet en $B = f(A)$ l'application différentielle Λ , $g \circ f$ admet en A l'application différentielle $\Lambda \circ \mathcal{L}$.

Au vecteur générique, $\vec{h}$, de $\mathbb{R}^p$ nous associons le vecteur $\vec{k}$ de $\mathbb{R}^q$ et le vecteur $\vec{l}$ de $\mathbb{R}^m$ déterminés par :

$$\vec{k} = f(A + \vec{h}) - f(A); \quad \vec{l} = g(B + \vec{k}) - g(B) \quad \text{ou} \quad F(A + \vec{h}) - F(A).$$

La différentiabilité de f en A et celle de g en B se traduisent par la continuité, respectivement en $\vec{0}$ et $\vec{0}'$, des applications ε et ω déterminées par :

$$\vec{k} = \mathcal{L}(\vec{h}) + \|\vec{h}\| \times \varepsilon(\vec{h}) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(\vec{0}) = \vec{0}' \quad (1)$$

$$\text{et} \quad \vec{l} = \Lambda(\vec{k}) + N(\vec{k}) \times \omega(\vec{k}) \quad \text{avec} \quad \omega(\vec{0}') = \vec{0}'' \quad (1')$$

Pour simplifier les écritures, nous poserons

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon(\vec{h}), \quad \vec{\omega} = \omega[f(A + \vec{h}) - f(A)].$$

D'après (1) et (1'), $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\omega}$ tendent respectivement vers $\vec{0}'$ et $\vec{0}''$ lorsque $\vec{h}$ tend vers $\vec{0}$.

En utilisant la définition d'une application linéaire, on déduit de (1) et de (1') :

$$\Lambda(\vec{k}) = \Lambda[\mathcal{L}(\vec{h})] + \|\vec{h}\| \times \Lambda(\vec{\varepsilon}),$$

et :

$$\vec{l} = \Lambda[\mathcal{L}(\vec{h})] + \|\vec{h}\| \times \Lambda(\vec{\varepsilon}) + N(\vec{k}) \times \vec{\omega}.$$

Pour reconnaître si F est différentiable au point A , supposons $\vec{h} \neq \vec{0}$ et écrivons $\vec{l}$ sous la forme

$$(2) \quad \vec{l} = \Lambda[\mathcal{L}(\vec{h})] + \|\vec{h}\| \times \varphi(\vec{h}) \quad \text{avec} \quad \varphi(\vec{h}) = \Lambda(\vec{\varepsilon}) + \frac{N(\vec{k})}{\|\vec{h}\|} \vec{\omega};$$

demandons-nous si le vecteur

$$\vec{\varphi} = \varphi(\vec{h}) \text{ de } R^m \text{ tend vers } \vec{0}'' \text{ quand } \vec{h} \text{ tend vers } \vec{0}.$$

A cet effet, étudions la limite de $N_1(\vec{\varphi})$.

De (1) nous déduisons :

$$N(\vec{k}) \leq N[\mathcal{L}(\vec{h})] + \|\vec{h}\| \times N(\vec{\varepsilon}).$$

Or nous avons montré au n° 160, 2°

$$N[\mathcal{L}(\vec{h})] \leq v \times \|\vec{h}\| \quad (v : \text{réel positif, fixe})$$

D'où :

$$N(\vec{k}) \leq \|\vec{h}\| \times [v + N(\vec{\varepsilon})].$$

On en déduit :

$$N_1(\vec{\varphi}) \leq N_1[\Lambda(\vec{\varepsilon})] + [v + N(\vec{\varepsilon})] \times N_1(\vec{\omega}).$$

Quand $\vec{h}$ tend vers $\vec{0}$, $\vec{\omega}$ et $\Lambda(\vec{\varepsilon})$ tendent vers $\vec{0}''$ (la continuité de Λ se prouvant de la même façon que celle de $\mathcal{L}$); il en résulte que $N_1(\vec{\varphi})$ tend vers 0.

Ainsi dans la formule (2), $\varphi(\vec{h})$ tend vers $\vec{0}''$ lorsque $\vec{h}$ tend vers $\vec{0}$. D'autre part $\Lambda[\mathcal{L}(\vec{h})]$ est l'image de $\vec{h}$ par l'application $\Lambda \circ \mathcal{L}$, qui, étant la composée de deux applications linéaires, est elle-même une application linéaire. Finalement la formule (2) montre que $F = g \circ f$ est différentiable et admet $\Lambda \circ \mathcal{L}$ pour application différentielle. Le théorème est démontré.

Invariance de la notation différentielle. — La différentielle de l'application $Q = g(P)$ est donnée par

$$(3) \quad d\vec{Q} = \Lambda(d\vec{P}).$$

Le théorème II montre que la différentielle de la fonction composée $Q = g[f(M)]$ est :

$$(4) \quad d\vec{Q} = \Lambda[\mathfrak{L}(d\vec{M})].$$

Mais comme la différentielle de l'application f est

$$d\vec{P} = \mathfrak{L}(d\vec{M})$$

finale, la formule (4) peut s'écrire

$$(4') \quad d\vec{Q} = \Lambda(d\vec{P}).$$

Ainsi la formule (3) est valable :

— si P est « variable indépendante »; $d\vec{P}$ est alors le vecteur générique de R^q ;

— si P est fonction d'une « variable indépendante M , » soit $P = f(M)$; $d\vec{P}$ est alors la différentielle de f au point M .

Cette propriété est dite *invariance de la notation différentielle*.

4° Interprétation matricielle du théorème II. — Les applications différentielles $\mathfrak{L}$ et Λ de f et de g sont respectivement représentées par la matrice $\mathfrak{M}_f$ dans les bases $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ et par la matrice $\mathfrak{M}_g$ dans les bases $(\mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ (n° 161).

La matrice jacobienne de $g \circ f$ est la matrice de l'application différentielle $\Lambda \circ \mathfrak{L}$ dans les bases $(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})$, c'est-à-dire d'après le résultat du n° I, 178, le produit $\mathfrak{M}_g \times \mathfrak{M}_f$; en définitive

$$(5) \quad \mathfrak{M}_{g \circ f} = \mathfrak{M}_g \times \mathfrak{M}_f.$$

Autrement dit :

THÉORÈME. — La matrice jacobienne de $g \circ f$ est le produit de celle de f (à droite) par celle de g (à gauche).

5° Application à la dérivation d'une fonction composée. Nous avons :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^p \vec{u}_i x_i; \quad \overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^q \vec{v}_j y_j; \quad \overrightarrow{OQ} = \sum_{k=1}^m \vec{w}_k z_k.$$

$$\begin{array}{lll} P = f(M) & \text{se traduit par} & y_j = F_j(x_1, \dots, x_p), \\ Q = g(P) & \text{se traduit par} & z_k = G_k(y_1, \dots, y_q). \end{array}$$

Il en résulte que

$$Q = g[f(M)] \quad \text{se traduit par} \quad z_k = \Phi_k(x_1, \dots, x_p)$$

avec $\Phi_k(x_1, \dots, x_p) = G_k[F_1(x_1, \dots, x_p), \dots, F_q(x_1, \dots, x_p)].$

La relation (5) s'explicite sous la forme

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial y_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

ou

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(A) = \sum_{j=1}^q \frac{\partial G_k}{\partial y_j}(B) \times \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

REMARQUE I. — Cette dernière formule, valable sous la seule réserve que f et g soient respectivement différentiables en A et en $B = f(A)$, avait été trouvée au n° 141, 3°, dans le cas particulier de $m = 1$, mais les conditions de validité étaient alors plus restrictives.

REMARQUE II. — La formule (7) montre que si f et g sont continûment différentiables (161, 2°), il en est de même de $g \circ f$.

REMARQUE III. — Si $p = q = m$, la relation (6) entraîne entre les déterminants, ou jacobiens, la relation

$$\frac{D(z_1, \dots, z_p)}{D(x_1, \dots, x_p)} = \frac{D(z_1, \dots, z_p)}{D(y_1, \dots, y_p)} \frac{D(y_1, \dots, y_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}.$$

III. APPLICATIONS DES DIFFÉRENTIELLES.

163. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme différentielle soit l'application dérivée d'une fonction différentiable.

1° Forme différentielle. — Soit R^n un espace affine attaché à l'espace vectoriel $\vec{R}^n$. A tout point M d'une partie $\mathcal{D}$ de R^n associons une forme linéaire sur $\vec{R}^n$, c'est-à-dire une application de $\vec{R}^n$ dans R :

$$\vec{dM} \in \vec{R}^n \xrightarrow{\mathcal{L}_M} \mathcal{L}_M(\vec{dM}) \in R.$$

En d'autres termes :

$$(dx_1, \dots, dx_n) \in \vec{R}^n \xrightarrow{\mathcal{L}_M} \sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n) dx_i.$$

On dit alors qu'on a défini une *forme différentielle* sur $\mathcal{D}$.

C'est ainsi qu'étant donnée une application $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de R^n dans R , différentiable sur une boule ouverte $\mathcal{D}$ de R^n (160, 2°, e), on obtient une forme différentielle en associant à tout point M de $\mathcal{D}$ l'application différentielle de F au point M .

Nous allons étudier, pour $n = 2$ et $n = 3$, à quelles conditions la réciproque est exacte : si une forme différentielle donnée sur $\mathcal{D}$ est l'application dérivée

(au sens du n° 160, 2°, e) d'une fonction différentiable, on dit que cette forme différentielle est une *forme différentielle exacte*.

2° Étude de $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. — On donne deux fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ des variables indépendantes x et y , définies et continues sur un domaine $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2$, sur lequel elles admettent des dérivées partielles continues.

Supposons qu'il existe, différentiable sur le domaine $\mathfrak{D}$, une fonction $F(x, y)$ dont la différentielle soit donnée, en tout point de $\mathfrak{D}$, par

$$dF = P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

x et y étant des variables indépendantes, cela signifie que F est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont l'application différentielle au point (x, y) est

$$(h, k) \longrightarrow \mathfrak{L}(h, k) = P(x, y)h + Q(x, y)k.$$

Cela implique (n° 142) :

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Comme les dérivées partielles de P et Q sont continues, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ est la dérivée partielle de $\frac{\partial F}{\partial x}$ par rapport à y , soit $\frac{\partial P}{\partial y}$, et aussi la dérivée partielle de $\frac{\partial F}{\partial y}$ par rapport à x , soit $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Il résulte de là :

Pour que l'expression $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ soit la différentielle d'une fonction de x et de y , il est nécessaire que dans un certain domaine

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

***RÉCIPROQUE.** — Montrons que, sur le domaine $\mathfrak{D}$ ⁽¹⁾ où les fonctions $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ des deux variables indépendantes x et y sont continues et liées par

$$(1) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

il existe des fonctions F ayant pour différentielle, en tout point de $\mathfrak{D}$, $Pdx + Qdy$, c'est-à-dire des fonctions F vérifiant les deux conditions

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad (3) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

$$(2) \quad \Longleftrightarrow \quad (4) \quad F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y)dt + f(y)$$

f désignant une fonction dérivable quelconque. En dérivant par rapport à y , et en tenant compte du résultat établi au n° 143,

$$(4) \quad \Longrightarrow \quad F'_y(x, y) = \int_{x_0}^x P'_y(t, y)dt + f'(y).$$

(1) Nous nous limitons au cas où $\mathfrak{D}$ est un pavé rectangulaire; la question sera reprise au tome IV, n° 195.

En tenant compte de (3), l'égalité précédente donne

$$(5) \quad f'(y) = Q(x, y) - \int_{x_0}^x P'_y(t, y) dt.$$

Le second membre de (5) est bien une fonction de y seul, puisque sa dérivée partielle par rapport à x est

$$Q'_x(x, y) - P'_y(x, y), \text{ ou } 0 \text{ d'après (1).}$$

La relation (5) fournit ainsi $f(y)$ à une constante additive près, et l'égalité (4) donne alors $F(x, y)$ à une constante additive près.

EXEMPLE. — L'expression $(x + y) dx + (x - y) dy$ peut s'écrire

$$x dx - y dy + (y dx + x dy)$$

ou

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) + d(xy)$$

c'est donc la différentielle de la fonction

$$\frac{x^2 - y^2}{2} + xy + C, \quad C \text{ étant une constante quelconque.}$$

2° EXTENSION A $P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$. Avec des hypothèses de continuité sur un domaine $\mathfrak{D}$ analogues à celles de la question précédente, s'il existe une fonction $F(x, y, z)$ dont l'expression donnée est la différentielle en tout point de $\mathfrak{D}$, elle est telle que

$$P(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

En égalant les deux expressions que ces identités donnent pour chacune des dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ on arrive à la conclusion suivante :

Pour que l'expression $P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ soit la différentielle d'une fonction de x, y, z , il est nécessaire que sur un certain domaine

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Nous démontrerons, au tome IV n° 195, que, sous certaines hypothèses, ces conditions sont suffisantes.

EXEMPLE. — Montrer que $\frac{2yzx - 2zxdy + (x^2 - y^2)dz}{(x + y)^2}$ est la différentielle d'une certaine fonction et trouver cette fonction.

Nous laissons au lecteur le soin de constater que les conditions nécessaires écrites plus haut sont vérifiées. Soit $F(x, y, z)$ une fonction ayant pour différentielle l'expression proposée.

D'après l'égalité

$$F'_x = \frac{2yz}{(x + y)^2}$$

la dérivée de $F(x, y, z)$ calculée comme si y et z étaient des constantes est le second membre de cette égalité. Or, ce second membre est la dérivée par rapport à x de $-\frac{2yz}{x + y}$, cette

fonction et $F(x, y, z)$ ont donc une différence constante *relativement* à x , il en résulte que cette différence se réduit à une fonction de y et de z .

En d'autres termes

$$F(x, y, z) = -\frac{2yz}{x+y} + f(y, z).$$

Cherchons ce que doit être $f(y, z)$ pour que $F'_y = -\frac{2zx}{(x+y)^2}$, c'est-à-dire pour que

$$-2\frac{z(x+y)-yz}{(x+y)^2} + f'_y(y, z) = -\frac{2zx}{(x+y)^2}.$$

Cette égalité se réduit à $f'_y(y, z) = 0$ et montre que $f(y, z)$ est une fonction $g(z)$ de la seule variable z .

Il reste à déterminer $g(z)$ de manière que

$$F(x, y, z) = -\frac{2yz}{x+y} + g(z)$$

ait pour dérivée partielle par rapport à z , $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$, ce qui revient à chercher $g(z)$ de manière que

$$-\frac{2y}{x+y} + g'(z) = \frac{x-y}{x+y}$$

ou

$$g'(z) = 1.$$

On trouve ainsi $g(z) = z + \lambda$, λ étant une constante quelconque. Finalement il existe des fonctions admettant l'expression proposée pour différentielle, elles ont pour expression

$$\frac{(x-y)z}{x+y} + \lambda, \quad \lambda \text{ étant une constante quelconque.}$$

164. Calcul de dérivées et de dérivées partielles de fonctions implicites. — Les différentielles fournissent un moyen mécanique de calculer les dérivées des fonctions implicites *dans la mesure*, cependant, *où l'existence de ces dérivées a été établie au préalable, par d'autres moyens*. On utilise essentiellement l'invariance de la notation différentielle sous la forme :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — Si entre les fonctions $x, y, \dots, u$ d'un certain nombre de variables indépendantes (parmi lesquelles peuvent figurer x , ou y , ..., ou u) existe la relation

$$(1) \quad f(x, y, \dots, u) = 0$$

vérifiée en tous les points d'un domaine $\mathcal{D}$ relatif aux variables indépendantes, et si toutes les fonctions mises en jeu sont différentiables, on a en tout point de $\mathcal{D}$

$$(2) \quad f'_x(x, y, \dots, u) dx + \dots + f'_u(x, y, \dots, u) du = 0.$$

Écrire la relation (2) c'est, par définition, différentier la relation (1).

La proposition ne fait qu'exprimer le fait que la fonction nulle admet pour application différentielle la fonction linéaire nulle.

EXEMPLE I. — L'équation (1) $f(x, y) = 0$ peut, sous certaines conditions (151), déterminer y en fonction de x si $f'_y \neq 0$, ou x en fonction de y si $f'_x \neq 0$. Par application du théorème précédent, on déduit de (1), dans l'un et l'autre cas,

$$(2) \quad f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = 0,$$

sans s'occuper de savoir quelle est la variable indépendante.

Si c'est x , on écrit
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Si c'est y , on écrit
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x}.$$

EXEMPLE II. — L'équation $f(x, y, z) = 0$ détermine, sous certaines conditions (152) z en fonction de x et y si $f'_z \neq 0$; calculons $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$f(x, y, z) = 0 \implies f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0$$

et aussi
$$dz = -\frac{f'_x}{f'_z} dx - \frac{f'_y}{f'_z} dy.$$

Il en résulte que, puisque x et y sont des variables indépendantes,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z}.$$

Dans la mesure où $f(x, y, z)$ admet des dérivées partielles secondes continues, on peut démontrer l'existence des dérivées partielles secondes de la fonction implicite $z(x, y)$. En utilisant les notations de Monge les deux dernières relations s'écrivent

$$f'_x + pf'_z = 0 \quad f'_y + qf'_z = 0.$$

Différentions, en tenant compte de

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy.$$

La différentiation de : $f'_x + pf'_z = 0$ donne :

$$f''_{xx} dx + f''_{xy} dy + f''_{xz}(p dx + q dy) + f'_z(r dx + s dy) + p[f''_{xz} dx + f''_{yz} dy + f''_{zz}(p dx + q dy)] = 0.$$

En écrivant que les coefficients de dx et de dy sont nuls, et en tenant compte des expressions déjà connues de p et q , on obtient les expressions de r et s .

La différentiation de : $f'_y + qf'_z = 0$ fournit s et t .

EXEMPLE III. — On a vu, au n° 153, que, sous certaines conditions, les équations

$$(3) \quad f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

permettent de déterminer y et z en fonction de x (soit $y = \psi(x)$, $z = \theta(x)$) au voisinage d'un point $A(a, b, c)$ où le jacobien n'est pas nul :

$$J = \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

En différentiant les équations (3), on obtient

$$(4) \quad \begin{cases} f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0 \\ g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz = 0. \end{cases}$$

L'hypothèse $J \neq 0$ permet de résoudre les équations (4) par rapport à dy et dz , et d'obtenir ainsi les dérivées des fonctions ψ et θ sous la forme :

$$\psi'(x) = \frac{1}{J}(-f'_x g'_z + g'_x f'_z); \quad \theta'(x) = \frac{1}{J}(f'_x g'_y - g'_x f'_y).$$

165. Problèmes de changement de variables. — 1° Changement de variable dans une fonction d'une seule variable. — a) Dans les problèmes d'intégration d'une équation différentielle (chapitres XVIII et XIX) où interviennent une fonction $y = g(x)$ et ses dérivées $g'(x)$, $g''(x)$, ... on a besoin parfois de remplacer la variable indépendante x par une nouvelle variable u liée à x par une relation telle que

$$x = f(u);$$

y devient ainsi une fonction composée de u :

$$y = g[f(u)] \quad \text{ou} \quad y = G(u).$$

Il convient alors de remplacer $g'(x)$, $g''(x)$, ... par leurs expressions en fonction de u ; il convient aussi de revenir finalement à la fonction g de la variable x , ce qui n'est possible que si f est inversible; on a alors :

$$u = f^{-1}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = G[f^{-1}(x)].$$

La formule de dérivation d'une fonction composée donne

$$G'(u) = g'(x) \times f'(u).$$

Or $f'(u) \neq 0$ puisque f est inversible, d'où, en convenant que les accents désignent exclusivement des dérivées par rapport à u ,

$$g'(x) = \frac{y'}{x'} \quad [y' = G'(u), \quad x' = f'(u)].$$

Au second ordre

$$g''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{x'} \right) = \frac{d}{du} \left(\frac{y'}{x'} \right) : \frac{dx}{du} \quad \text{ou} \quad g''(x) = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}.$$

EXEMPLE I. — Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0.$$

Pour étudier sur le segment $[-1, +1]$ les solutions (n° 230) de l'équation (E), faisons le changement de variable indépendante $x = \cos t$.

Reprenant les calculs faits plus haut, nous trouvons, x étant $\cos t$, y' et y'' désignant des dérivés par rapport à t ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y'}{\sin t} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-y'' \sin t + y' \cos t}{-\sin^3 t}.$$

En remplaçant dans l'équation x par $\cos t$ et $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ par les expressions précédentes nous trouvons

$$(E_1) \quad y'' + a^2 y = 0.$$

Nous verrons au n° 250 que les solutions de (E₁) sont

$$y = \lambda \cos at + \mu \sin at,$$

λ et μ étant deux constantes quelconques. Les solutions de (E) sont donc représentées paramétriquement, sur $[-1, +1]$, par

$$x = \cos t, \quad y = \lambda \cos at + \mu \sin at.$$

Si l'on veut obtenir y en fonction de x , on prendra $t \in [0, \pi]$ de façon que $x = \cos t$ soit inversible, alors $t = \text{Arc cos } x$ et

$$y = \lambda \cos a (\text{Arc cos } x) + \mu \sin a (\text{Arc cos } x).$$

Le changement de variable indépendante $x = \text{cht}$ (resp. $x = -\text{cht}$) permettrait de même d'étudier les solutions de (E) sur la demi-droite $[1, +\infty]$ [(resp.) $-\infty, -1]$ et conduirait à l'équation différentielle

$$(E_2) \quad y'' - a^2 y = 0.$$

EXEMPLE II. — Dans $y = g(x)$, nous posons $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ (1)

La relation : $r \sin \theta = g(r \cos \theta)$ détermine (sous certaines conditions) une fonction $r = \varphi(\theta)$.

Nous nous proposons de calculer les dérivées successives de $y = g(x)$ au moyen des dérivées successives $r', r'', \dots$ de $\varphi(\theta)$.

Le calcul général fait en a) est valable, à cela près que, ici,

$$u \text{ est } \theta; \quad f(u) \text{ est } \varphi(\theta) \cdot \cos \theta; \quad G(u) \text{ est } \varphi(\theta) \cdot \sin \theta$$

On a donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}$$

On peut retrouver le résultat en calculant dx et dy par différentiation de (1), ce qui donne

$$dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta, \quad dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta$$

et en divisant « formellement » par $d\theta$ les deux termes du quotient $\frac{dy}{dx}$.

Au second ordre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{dx} \right) : \frac{d\theta}{dx} \quad \text{conduit à} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r' \cos \theta - r \sin \theta)^2}.$$

EXEMPLE III. — *Echange de la variable et de la fonction.* — Soit $y = f(x)$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à dérivée première strictement positive (resp. négative).

La monotonie de f , conséquence de $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), et la non-nullité de $f'(x)$ assurent l'existence de la fonction réciproque $x = \varphi(y)$ et de sa dérivée $\varphi'(y)$ (n° 70, 10°) :

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Pour simplifier les calculs ultérieurs, nous noterons, sous réserve d'existence :

$$f^{(p)}(x) = y^{(p)} \text{ et } \varphi^{(q)}(y) = x^{(q)}.$$

La non-nullité de y' et l'existence de y'' assurent l'existence de

$$x'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) : \frac{dy}{dx} = -\frac{y''}{y'^3}.$$

Une fois traitée une question relative à g^* , on revient à g par l'intermédiaire de la fonction inverse de f

$$(y_1, \dots, y_p) \xrightarrow{f^{-1}} (x_1, \dots, x_p).$$

On a finalement deux applications composées de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$:

$$g^* = g \circ f \quad g = g^* \circ f^{-1}.$$

Comme f et g sont continûment différentiables, g^* l'est aussi.

c) *Calcul des dérivées partielles du premier ordre.* — On applique la règle de dérivation d'une fonction composée de fonctions continûment différentiables :

$$\frac{\partial g^*}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_p} \frac{\partial F_p}{\partial x_i}.$$

On obtient ainsi un système de p relations donnant les dérivées partielles de g^* (par rapport aux x_i) sous forme de fonctions linéaires des dérivées partielles de g (par rapport aux y_j). Ce système peut s'écrire, sous forme matricielle,

$$(4) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial g^*}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^*}{\partial x_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial y_p} \end{bmatrix} \mathcal{M}_f,$$

$\mathcal{M}_f$ étant la matrice d'élément générique

$$m_{ji} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

Dans la pratique, on a besoin des dérivées partielles de g , en fonction de celles de g^* . Il suffit, pour les obtenir, de résoudre (4), considéré comme un système de p équations linéaires aux inconnues $\frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_p}$; le déterminant de la matrice $\mathcal{M}_f$, formée par les coefficients des inconnues, étant le jacobien J de f , qui, par hypothèse, n'est pas nul, il s'agit d'un système de Cramer. La solution est ainsi de la forme

$$(5) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial y_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^*}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^*}{\partial x_p} \end{bmatrix} (\mathcal{M}_f)^{-1}$$

(Le lecteur du sous-chapitre II reconnaîtra en (4) et (5) les relations matricielles obtenues en utilisant l'étude faite au n° 162, 5°.)

d) *Calcul des dérivées partielles du 2^e ordre.* — Nous supposons ici que les applications g et f ont des dérivées partielles continues, jusqu'au second ordre. La formule (5) a donné

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \mu_{1j} \frac{\partial g^*}{\partial x_1} + \dots + \mu_{pj} \frac{\partial g^*}{\partial x_p}$$

où $\mu_{1j} \dots \mu_{pj}$ sont des fonctions connues de $x_1, \dots, x_p$.

En remplaçant dans (5) g par $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ et g^* par $\mu_{1j} \frac{\partial g^*}{\partial x_1} + \dots + \mu_{pj} \frac{\partial g^*}{\partial x_p}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_j} \dots \frac{\partial^2 g}{\partial y_j^2} \dots \frac{\partial^2 g}{\partial y_p \partial y_j} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu_{1j} \frac{\partial g^*}{\partial x_1} + \dots + \mu_{pj} \frac{\partial g^*}{\partial x_p} \right) \dots \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\mu_{1j} \frac{\partial g^*}{\partial x_1} + \dots + \mu_{pj} \frac{\partial g^*}{\partial x_p} \right) \right] (\mathcal{M}_f)^{-1}. \end{aligned}$$

On calculerait de la même façon les autres dérivées partielles du second ordre de g .

3° Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires dans une fonction de deux variables.

On part d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre :

$$(1) \quad (x, y) \xrightarrow{g} z = g(x, y).$$

et l'on pose

$$(2) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Ces formules définissent une application continûment différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$(r, \theta) \xrightarrow{f} (x, y) = f(r, \theta).$$

Pour l'application f , r et θ sont d'une part un système de coordonnées cartésiennes du point générique de l'espace-objet, et d'autre part, grâce à (2), un système de coordonnées polaires du point générique associé de l'espace-image (on notera que f est surjective, non-injective).

En tenant compte de (2), (1) donne

$$(3) \quad z = g(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \text{ou} \quad z = g^*(r, \theta).$$

On en déduit

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial g^*}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g^*}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \quad \text{et} \quad J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

La nécessité d'inverser f impose qu'on limite l'étude de g à une partie de $\mathbb{R}^2$ qui ne contient pas le point $(x = 0, y = 0)$, de façon à avoir $r \neq 0$.

De (4) on déduit alors :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g^*}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g^*}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g^*}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g^*}{\partial \theta} \end{cases}$$

Pour obtenir $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$, on remplace dans (5) g respectivement par $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$, ainsi que $\frac{\partial g^*}{\partial r}$ et $\frac{\partial g^*}{\partial \theta}$ par les dérivées partielles relatives à r et θ respectivement des expressions de $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ en fonction de r et θ . On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial g^*}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g^*}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial g^*}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g^*}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\partial g^*}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g^*}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g^*}{\partial \theta} \right). \end{cases}$$

A titre d'exercice, le lecteur pourra calculer le laplacien

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g^*}{\partial \theta^2}$$

EXEMPLE. — Soit l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(E) \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = a \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Passons en coordonnées polaires. Avec les notations de l'étude précédente, la formule (5) donne

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = r \frac{\partial g^*}{\partial r}.$$

La nécessité de nous en tenir à une partie de R^2 qui ne contient pas le point $(x = 0, y = 0)$ nous autorise à supposer $r > 0$. Il en résulte que

$$z = g(x, y) \text{ vérifie (E)} \iff z = g^*(r, \theta) \text{ vérifie (E}_1) \quad \frac{\partial z}{\partial r} = a.$$

D'où (n° 147, exemple II) : $g^*(r, \theta) = ar + h(\theta)$,
 h étant une fonction quelconque.

La solution générale de (E) est ainsi :

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2} + k\left(\frac{y}{x}\right)$$

k désignant une fonction quelconque. En effet $\frac{y}{x}$ n'est autre que $\operatorname{tg} \theta$ et on peut considérer une fonction quelconque de θ comme une fonction quelconque de $\operatorname{tg} \theta$.

4° Exemples divers de changements de variables et de fonctions.

EXEMPLE I. — Soit l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$(E) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Prenons comme nouvelles variables x et $x + y = u$, ce qui revient à considérer l'application suivante de R^2 dans R^2 .

$$(u, v) \xrightarrow{f} (x, y) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = v \\ y = u - v \end{cases}$$

$$z = g(x, y) \text{ devient ainsi } z = g(v, u - v) \quad \text{ou} \quad z = g^*(u, v)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g^*}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g^*}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g^*}{\partial u} + \frac{\partial g^*}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g^*}{\partial u} \end{cases}$$

Au second ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g^*}{\partial u} + \frac{\partial g^*}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g^*}{\partial u} + \frac{\partial g^*}{\partial v} \right) & \text{ou} & \frac{\partial^2 g^*}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g^*}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g^*}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g^*}{\partial u} + \frac{\partial g^*}{\partial v} \right) & \text{ou} & \frac{\partial^2 g^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g^*}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g^*}{\partial u} \right) & \text{ou} & \frac{\partial^2 g^*}{\partial u^2} \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$z = g(x, y) \text{ vérifie (E)} \iff z = g^*(u, v) \text{ vérifie (E}_1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

Par application du n° 147 : $g^*(u, v) = vF(u) + G(u)$,

F et G étant des fonctions quelconques.

La solution générale de (E) est ainsi :

$$z = xF(x + y) + G(x + y).$$

En posant : $G(x + y) = (x + y)H(x + y)$ et $F + H = K$,
elle prend la forme, plus symétrique,

$$z = xK(x + y) + yH(x + y).$$

EXEMPLE II. — Soit à intégrer une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(E) \quad \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \dots \right)$$

par le changement de variables et de fonctions

$$(I) \quad X = u(x, y, z) \quad Y = v(x, y, z) \quad Z = w(x, y, z)$$

u, v, w étant des fonctions connues de x, y, z .

Il s'agit d'une part d'inverser effectivement (I), d'autre part d'exprimer p, q, r, s, t
en fonction de P, Q, R, S, T (avec $P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \dots$). Pour cela, dans : $dZ = PdX + QdY$

on remplace dX, dY, dZ par

$$II \quad dX = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz, \dots$$

L'expression obtenue s'écrit : $dz = p dx + q dy$ et fournit ainsi

$$III \quad p = \varphi(x, y, z, P, Q) \quad q = \psi(x, y, z, P, Q).$$

En différenciant la 1^{re} relation (III) on obtient :

$$dp = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z (p dx + q dy) + \varphi'_P (RdX + SdY) + \varphi'_Q (SdX + TdY)$$

ce qui, compte-tenu de II, s'écrit : $dp = r dx + s dy$ et fournit r et s .

En différenciant la 2^e relation (II) on obtient s et t .

EXERCICES

1. — Former les différentielles des fonctions

$$\text{Arc cos}(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \text{Arc tg} \frac{x+y-z+xyz}{1-xy+xz+yz}, \text{Arc cos} \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}},$$

$$\sin x \sin y \sin z + \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z - \cos x \cos y \sin z.$$

2. — Montrer que les expressions

$$\left(\text{Arc tg} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) dx + \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy; \quad (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz;$$

$$\frac{(1-x^2+y^2)y dx + (1+x^2-y^2)x dy}{(1+x^2+y^2)^2}; \quad \frac{[x \text{Log}(x^2+y^2) - x^2y] dx + [y \text{Log}(x^2+y^2) + x^2] dy}{(x^2+y^2)^2}$$

sont les différentielles de fonctions que l'on déterminera.

3*. — On appelle facteur intégrant de $Pdx + Qdy + Rdz$ une fonction f , si elle existe, telle que

$$f \times (Pdx + Qdy + Rdz)$$

soit une différentielle. Peut-on trouver un facteur intégrant

- a) de la forme $f(z)$ pour : $2xzdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz$;
- b) de la forme $f(y - z)$ pour : $(y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$;
- c) homogène d'ordre -3 pour : $y(x^2 + y^2)dx + x(xy - y^2)dy$.

4. — Le système : $x = \operatorname{ch} u \cos v$, $y = \operatorname{sh} u \sin v$ définit deux fonctions implicites u et v des variables x et y . Montrer que l'on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

5. — Que deviennent les expressions

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \quad \Delta' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

par le changement de variables

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta$$

A quoi se ramène la recherche des fonctions de $\frac{y}{x}$, de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, de $\frac{x^2 + y^2}{z^2}$, de $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ telles que $\Delta' = 0$?

6. — En utilisant le changement de variables $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, trouver l'intégrale générale de chacune des équations aux dérivées partielles :

$$\left[x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = z; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z; \quad z \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) + x^2 + y^2 = 0.\right]$$

7*. — En utilisant le changement de variables indiqué entre parenthèses, intégrer chacune des équations aux dérivées partielles :

$$a) \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{nouvelles variables : } x + ay \text{ et } x - ay).$$

$$b) \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{nouvelles variables } x \text{ et } \frac{y}{x}).$$

8. — Former des équations aux dérivées partielles, du premier ordre, qui sont vérifiées, quelle que soit la fonction f d'une variable, respectivement par :

$$z = (x^2 + y^2) f\left(\frac{y}{x}\right); \quad z = xf(xy); \quad z = xf(y).$$

9*. — Déterminer les surfaces (Σ) telles que la normale à (Σ) au point courant $M(x, y, z)$ perce le plan xOy au point $N(\alpha, \beta, 0)$ avec $\alpha = \varphi(x, y)$ et $\beta = \psi(x, y)$, φ et ψ étant des fonctions données (repère orthonormé).

Condition de possibilité; cas de $\alpha = ax + by$, $\beta = cx + dy$.

10*. — Déterminer les surfaces (Σ) telles que, H désignant la projection sur le plan xOy du point courant M de (Σ) et N le point d'intersection de xOy et de la normale en M à (Σ) :

- a) le triangle OHN ait une aire donnée (repère orthonormé).
- b) l'angle MON soit droit.

CHAPITRE XIV

RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES

166. Fonctions primitives. — 1° **Rappel de résultats.** — Étant donnée une fonction réelle f de la variable réelle x , on appelle *fonction primitive* F de f toute fonction admettant f pour dérivée (91-3°) :

$$F'(x) = f(x).$$

Nous préciserons toujours les cas exceptionnels où nous aurions à considérer des fonctions complexes d'une variable réelle.

Nous avons démontré l'important résultat :

Si F est une primitive de la fonction f , toute autre primitive peut s'écrire $F + C$, C désignant une constante quelconque.

NOTATION. — L'ensemble des fonctions primitives de la fonction f de la variable x se représente par le symbole $\int f(x)dx$ (qui s'énonce somme de $f(x)dx$).

Ce symbole s'appelle une *intégrale indéfinie*. Les notations suivantes sont équivalentes :

$$y' = f(x) \iff dy = f(x)dx \iff y = \int f(x)dx$$

si bien que, sous le signe somme $\int$, $f(x)dx$ doit être considéré comme la différentielle d'une fonction primitive quelconque de f ; on dit encore que $f(x)dx$ est l'élément différentiel de l'intégrale indéfinie. La recherche d'une intégrale indéfinie s'appelle une *intégration* (ou une *quadrature*); la constante C qui s'y introduit est dite *constante d'intégration*.

Si $F(x)$ est une primitive particulière de $f(x)$, on a

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

C étant une constante quelconque.

Toute courbe plane dont l'équation est $y = F(x) + C$, C étant arbitraire, est appelée courbe intégrale de la fonction $f(x)$; une telle courbe n'est définie qu'à une translation près, parallèle à l'axe Oy .

Étant donnée une fonction f , combinaison simple de fonctions élémentaires, nous nous proposons de passer en revue les principaux cas où l'on

peut exprimer les primitives de f au moyen de fonctions élémentaires. La méthode consiste, par application de règles générales que l'on indiquera, à amener la question au calcul d'un certain nombre de primitives usuelles, qu'il faut savoir par cœur.

Dans tout ce chapitre, les mots *polynôme*, *fraction rationnelle*, *partie entière*, *élément simple*,... désigneront, non pas les êtres définis formellement aux chapitres VI et VII du tome I, mais les fonctions qui leur sont associées.

2° Tableau des primitives usuelles. — Dans toutes les formules de ce tableau comme dans tous les exemples de ce chapitre, C désigne une constante quelconque.

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

et plus généralement

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{m+1}}{m+1} + C, \quad \text{en supposant } m \neq -1.$$

Si m est quelconque, il faut supposer $ax + b > 0$; si m est une fraction irréductible à dénominateur impair, $ax + b$ peut avoir un signe quelconque; la formule reste vraie quelle que soit la variable réelle x si, m étant un nombre entier, a et b sont des nombres complexes.

$$\int \frac{dx}{x} = \text{Log } |x| + C \quad \text{et plus généralement} \quad \int \frac{dx}{x+a} = \text{Log } |x+a| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \text{ch } x dx = \text{sh } x + C \quad \int \text{sh } x dx = \text{ch } x + C$$

$$\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th } x + C \quad \int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\coth x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\text{Log } a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{Arc tg } x + C \quad \text{ou} \quad -\text{Arc cot } x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \text{Arg th } x + C & \text{si } |x| < 1 \\ \text{Arg coth } x + C & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \text{Log} \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sin } x + C \quad \text{ou} \quad -\text{Arc cos } x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+h}} = \text{Log} |x + \sqrt{x^2+h}| + C, \quad \text{et en particulier,}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{Arg sh } x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \text{Arg ch } x + C & \text{si } x > 1 \\ -\text{Arg ch } (-x) + C & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

OBSERVATIONS DIVERSES SUR LE TABLEAU PRÉCÉDENT. — a) La fonction $\frac{1}{1-x^2}$ est définie sur les intervalles $] -\infty, -1[,] -1, +1[,] +1, +\infty [$; c'est sur les mêmes intervalles que se trouvent définies les primitives de cette fonction.

b) Si h est positif, la fonction $\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}$ est définie pour toute valeur de x ; la primitive $\text{Log}|x + \sqrt{x^2+h}|$ aussi; on peut supprimer sous le logarithme les barres de valeur absolue.

Au contraire, si h est négatif, soit $h = -a^2$, a étant positif, la fonction $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ n'existe que sur les intervalles $] -\infty, -a[$ et $] +a, +\infty [$; la primitive $\text{Log}|x + \sqrt{x^2-a^2}|$ est définie sur $] -\infty, -a[$ et sur $] +a, +\infty [$. La fonction mise entre les barres de valeur absolue est négative sur le premier intervalle, positive sur le second.

Il ne faut pas s'étonner de voir la primitive définie aux bornes $-a$ et $+a$, une fonction définie en un point pouvant ne pas avoir de dérivée en ce point.

c) On peut aussi prendre pour primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ une détermination quelconque $\text{arc tg } x$ de la fonction inverse de la tangente, car

$$\text{arc tg } x = \text{Arc tg } x + k\pi.$$

Mais on ne pourrait prendre pour primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ une détermination quelconque $\text{arc sin } x$ de la fonction inverse du sinus, car

$$\text{arc sin } x = \begin{cases} \text{Arc sin } x + k.2\pi \\ \text{ou} \\ \pi - \text{Arc sin } x + k.2\pi \end{cases}$$

et dans la seconde hypothèse, la dérivée est $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

167. Premières propriétés des intégrales indéfinies. Application au calcul de certaines primitives. — 1° **Multipliation par une constante.** — Si la fonction $F(x)$ a pour différentielle $f(x)dx$, la différentielle du produit $kF(x)$, k étant une constante, est $kf(x)dx$. Cette observation conduit à l'égalité

$$k \int f(x)dx = \int kf(x)dx$$

à une constante près. Remplacer le premier membre par le second, c'est *faire entrer* le facteur constant k sous le signe $\int$, remplacer inversement le second membre par le premier, c'est *faire sortir* le facteur constant k du signe $\int$.

2° Primitives d'une somme algébrique. — Si les fonctions $F(x)$, $G(x)$ ont respectivement pour différentielles $f(x)dx$, $g(x)dx$, la somme $F(x) + G(x)$ a pour différentielle

$$[f(x) + g(x)]dx,$$

c'est dire que

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

à une constante près. Une décomposition analogue s'applique à une somme d'un nombre fini quelconque de termes. Il en résulte :

$$\int \left[\sum_{i=1}^n k_i f_i(x) \right] dx = \sum_{i=1}^n \left[k_i \int f_i(x) dx \right].$$

On se sert de cette propriété pour l'intégration d'un polynôme :

$$\int (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) dx = A_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + A_1 \frac{x^n}{n} + \dots + A_{n-1} \frac{x^2}{2} + A_n x + C.$$

3° Utilisation d'une fonction auxiliaire. — On sait que si la différentielle de $H(u)$ est $h(u) du$ quand u est la variable indépendante, il en est encore de même quand u est fonction d'une variable x , du étant dans ce cas la différentielle de cette fonction u . Il résulte de là que si l'élément différentiel $f(x)dx$ de l'intégrale indéfinie

$$I = \int f(x)dx$$

peut s'écrire $h(u) du$, soit $f(x) dx = h(u) du$, u étant une certaine fonction de x , $\varphi(x)$, et si l'on reconnaît dans $h(u) du$ la différentielle d'une fonction $H(u)$, la fonction $H[\varphi(x)]$ est, à une constante près, l'intégrale cherchée I .

EXEMPLES.

$$\int e^{ax} dx = \int \frac{e^{ax} d(ax)}{a} = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int \cos ax dx = \int \frac{\cos ax d(ax)}{a} = \frac{\sin ax}{a} + C$$

$$\int \sin ax dx = \int \frac{\sin ax d(ax)}{a} = -\frac{\cos ax}{a} + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C = \frac{1}{2} [x + \sin x \cos x] + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C = \frac{1}{2} [x - \sin x \cos x] + C$$

$$\int \operatorname{ch}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} dx = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2} + C = \frac{1}{2} [\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + x] + C$$

$$\int \operatorname{sh}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} dx = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2} + C = \frac{1}{2} [\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x] + C$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \operatorname{Log} |\sin x| + C, \quad \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\operatorname{Log} |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{Log} (\operatorname{ch} x) + C, \quad \int \operatorname{coth} x dx = \int \frac{d(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{Log} |\operatorname{sh} x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{x^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a} \text{Arc tg } \frac{x}{a} + C \quad \left(\text{ou } -\frac{1}{a} \text{Arc cot } \frac{x}{a} + C \right)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{2a} \text{Log} \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{1}{a} \text{Arg th } \frac{x}{a} + C & \text{si } \left| \frac{x}{a} \right| < 1 \\ \frac{1}{a} \text{Arg coth } \frac{x}{a} + C & \text{si } \left| \frac{x}{a} \right| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \text{Arc sin } \frac{x}{a} + C \quad \left(\text{ou } -\text{Arc cos } \frac{x}{a} + C \right), \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}} = \text{Arg sh } \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \begin{cases} \text{Arg ch } \frac{x}{a} + C & \text{si } x > a \\ -\text{Arg ch } \frac{|x|}{a} + C & \text{si } x < -a \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{xdx}{x^2 + h} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + h)}{x^2 + h} = \frac{1}{2} \text{Log} |x^2 + h| + C$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + h}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + h)}{\sqrt{x^2 + h}} = \sqrt{x^2 + h} + C$$

Suivant leur degré d'entraînement, les élèves, ou bien introduiront chaque fois la fonction auxiliaire u qui leur permet de se ramener au tableau du n° 166, dont tous les résultats doivent être connus par cœur, ou bien, pour gagner du temps, pourront écrire directement les résultats du précédent tableau.

Ils seront aidés par les observations suivantes :

1° Pour le calcul de l'intégrale $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$, on remarque que la tangente est sans dimension; cela justifie la présence de $\frac{x}{a}$ sous l'Arc tangente. D'autre part, l'intégrale proposée est homogène, de degré -1 par rapport à x et a , ce qui justifie le facteur $\frac{1}{a}$ placé au résultat devant l'Arc tangente.

2° Pour le calcul de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, le sinus n'a pas de dimension, ce qui justifie encore $\frac{x}{a}$ sous l'Arc sinus. Par contre l'intégrale proposée est homogène, de degré 0, et cela justifie l'absence d'un facteur a ou $\frac{1}{a}$ devant l'Arc sinus.

168. Procédés généraux d'intégration. — Quand on ne reconnaît pas dans l'élément différentiel d'une intégrale indéfinie la différentielle d'une fonction connue, on peut employer l'un des deux procédés suivants. Le premier est suggéré par l'utilisation donnée au paragraphe précédent d'une fonction auxiliaire.

1° Changement de variable. — Nous cherchons une fonction $F(x)$ ayant pour différentielle $f(x)dx$, $f(x)$ étant une fonction donnée, définie sur un intervalle I . Effectuons dans $F(x)$ le changement de variable défini par $x = \varphi(t)$;

on suppose que φ est une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $\varphi(J) = I$. $F[\varphi(t)]$ est ainsi une fonction composée définie sur J , soit $G(t)$.

On a :
$$dG(t) = F'[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad \text{ou} \quad f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Si l'on sait calculer une primitive de $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$, ce sera, à une constante près, la fonction $G(t)$. S'il existe une fonction réciproque $t = \psi(x)$ de $x = \varphi(t)$, la fonction $F(x) = G[\psi(x)]$ répond à la question.

Énonçons la règle à suivre :

RÈGLE. — Pour calculer l'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$, on peut remplacer x par une fonction $\varphi(t)$ et dx par la différentielle $\varphi'(t) dt$ de cette fonction, calculer l'intégrale indéfinie ainsi formée $\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$, et remplacer dans la fonction trouvée $G(t)$, t par $\psi(x)$ fonction réciproque de la fonction $x = \varphi(t)$.

REMARQUE. — Rappelons que l'hypothèse $I = \varphi(J)$ n'est pas suffisante pour assurer l'existence d'une fonction réciproque de $x = \varphi(t)$; il peut être nécessaire de restreindre convenablement l'intervalle sur lequel t peut varier.

Interprétation géométrique. — Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, l'équation

$$(1) \quad y = F(x)$$

dans laquelle on regarde x et y comme les coordonnées cartésiennes d'un point d'un plan représente une courbe intégrale de la fonction $f(x)$. Les équations

$$(2) \quad y = G(t), \quad x = \varphi(t)$$

donnent une représentation paramétrique de la même courbe. Pour construire la courbe intégrale, ou simplement même pour la représenter, il peut être plus commode de conserver les formules (2); c'est ce que l'on fera si on ne sait pas expliciter $\psi(x)$.

EXEMPLE : $\int \sqrt{1-x^2} dx$; pour supprimer le radical nous ferons le changement de variable

$$t = \text{Arc sin } x; \quad \text{d'où} \quad x = \sin t \quad \text{et} \quad dx = \cos t \cdot dt.$$

A tout point x du segment $[-1, +1]$, il faut correspondre un point t et un seul du segment $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$; dans ces conditions $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, et l'intégrale devient

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + C,$$

ou finalement, en revenant à la variable x ,

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \text{Arc sin } x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C,$$

C désignant une constante quelconque.

2° Intégration par parties. — Soit u et v deux fonctions dérivables de x ; on a

$$(uv)' = uv' + vu'$$

d'où

$$uv' = (uv)' - vu'$$

ou encore

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx,$$

à une constante additive près, égalité que nous condenserons sous la forme

(3)

$$\int u dv = uv - \int v du$$

en n'oubliant pas que u et v sont deux fonctions de x .

Si on ne sait pas calculer $\int u dv$, mais si l'on sait calculer $\int v du$ on pourra par la formule (3), dite *formule d'intégration par parties*, intégrer la différentielle $u dv$. Cette méthode s'emploie souvent avec succès lorsque u est une fonction transcendante dont la différentielle est algébrique, comme $\text{Arc tg } f(x)$, $\text{Arc sin } f(x)$, $\text{Log } f(x)$, $f(x)$ étant une fonction algébrique.

EXEMPLES. — 1° $\int \text{Arc tg } x dx$; on pose $u = \text{Arc tg } x$ d'où $du = \frac{dx}{1+x^2}$
et $dv = dx$, on peut prendre $v = x$;

$$\int \text{Arc tg } x dx = x \text{Arc tg } x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \text{Arc tg } x - \frac{1}{2} \text{Log}(1+x^2) + C.$$

2° $\int \text{Arc sin } x dx$; on pose $u = \text{Arc sin } x$ d'où $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
et $dv = dx$, on peut prendre $v = x$;

$$\int \text{Arc sin } x dx = x \text{Arc sin } x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \text{Arc sin } x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

3° $\int \frac{\text{Log } x}{x^n} dx$; on pose $u = \text{Log } x$ d'où $du = \frac{dx}{x}$
et $dv = \frac{dx}{x^n}$, on peut prendre $v = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$ si $n \neq 1$,

$$\text{d'où} \quad \int \text{Log } x \frac{dx}{x^n} = -\frac{\text{Log } x}{(n-1)x^{n-1}} - \int \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} \cdot \frac{dx}{x} \quad (n \neq 1).$$

On est ramené ainsi au calcul de l'intégrale $\int \frac{dx}{(n-1)x^n}$; elle est égale
à $-\frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$. Finalement, n étant différent de 1,

$$\int \frac{\text{Log } x}{x^n} dx = -\frac{\text{Log } x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 x^{n-1}} + C.$$

Dans le cas particulier où $n = 1$,

$$\int \frac{\text{Log } x}{x} dx = \int \text{Log } x \frac{dx}{x} = \int \text{Log } x \cdot d(\text{Log } x) = \frac{(\text{Log } x)^2}{2} + C.$$

REMARQUE. — L'intégration par parties est souvent utilisée pour trouver une formule de récurrence lorsque la fonction à intégrer dépend d'un entier n . On en verra des exemples au n° 169.

169. Primitives d'une fraction rationnelle. — 1° **Utilisation d'une décomposition en éléments simples de première espèce.** — Pour chercher une primitive d'une fraction rationnelle, on commence par la décomposer en éléments simples de première espèce (I, n° 119). Cela suppose qu'on connaisse les pôles de cette fraction rationnelle.

On cherche ensuite, séparément, une primitive de chacun des éléments simples.

La partie entière $E(x)$ étant un polynôme, on sait en trouver une primitive (167).

Si k est différent de 1, un élément simple de première espèce $\frac{A}{(x-a)^k}$ a pour primitive, que a soit réel ou imaginaire, $\frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$ (155-5°).

Si $k = 1$ et si a est réel, $\frac{A}{x-a}$ a pour primitive $A \operatorname{Log}|x-a|$.

Étudions le cas où la fraction rationnelle est à coefficients réels et où, a étant un pôle imaginaire $p + qi$, la décomposition comprend l'élément simple $\frac{M + Ni}{x - (p + qi)}$ et l'élément simple conjugué $\frac{M - Ni}{x - (p - qi)}$. Avant de chercher les primitives de tels éléments simples, on calcule la somme de ces éléments,

$$\frac{M + Ni}{(x - p) - qi} + \frac{M - Ni}{(x - p) + qi} = \frac{2M(x - p) - 2Nq}{(x - p)^2 + q^2},$$

et l'on sépare l'intégrale en deux parties

$$F = \int \frac{2M(x - p) - 2Nq}{(x - p)^2 + q^2} dx = M \int \frac{2(x - p)dx}{(x - p)^2 + q^2} - 2Nq \int \frac{dx}{(x - p)^2 + q^2}.$$

Il suffit de regarder dans la première $2(x - p)dx$ comme la différentielle de $(x - p)^2 + q^2$ et, dans la deuxième, dx comme la différentielle de $x - p$ pour trouver

$$F = M \operatorname{Log}[(x - p)^2 + q^2] - 2N \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x - p}{q} + C.$$

Ces calculs permettent d'obtenir les primitives d'une fraction rationnelle lorsque celle-ci est décomposée en éléments simples de première espèce.

REMARQUE I. — Il résulte de cette étude que l'intégrale d'une fraction rationnelle à coefficients réels peut comprendre : 1° une fraction rationnelle; 2° une partie transcendante formée de logarithmes ou d'arc tangentes provenant des éléments simples de première espèce de la forme $\frac{A}{x-a}$.

La présence d'un pôle simple donne nécessairement une partie transcendante.

REMARQUE II. — Il suffit d'imaginer qu'une fraction rationnelle est décomposée en éléments simples de première espèce pour reconnaître que sa dérivée décomposée de même ne contient aucun élément de la forme $\frac{A}{x-a}$. Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que la primitive d'une fraction rationnelle soit encore une fraction rationnelle est que la décomposition de cette fraction rationnelle en éléments simples de première espèce ne contienne aucun élément de la forme $\frac{A}{x-a}$.

2° EXEMPLES. — EXEMPLE I. — Calculer $F = \int \frac{x^4 + x + 1}{x(x-1)(x-2)} dx$.

Nous avons trouvé (I, 121, 2°)

$$\frac{x^4 + x + 1}{x(x-1)(x-2)} = x + 3 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{x-1} + \frac{19}{2(x-2)},$$

d'où, en intégrant chaque élément de la décomposition

$$F = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2} \text{Log}|x| - 3 \text{Log}|x-1| + \frac{19}{2} \text{Log}|x-2| + C.$$

EXEMPLE II. — Calculer $F = \int \frac{x^4 + 1}{(x^2 - 1)^3} dx$.

Nous avons trouvé (I, 121, 3°)

$$\frac{x^4 + 1}{(x^2 - 1)^3} = \frac{1}{4(x-1)^3} + \frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{3}{8(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)^3} + \frac{1}{8(x+1)^2} - \frac{3}{8(x+1)}$$

d'où en intégrant chaque élément de la décomposition,

$$F = -\frac{1}{8(x-1)^2} - \frac{1}{8(x-1)} + \frac{3}{8} \text{Log}|x-1| + \frac{1}{8(x+1)^2} - \frac{1}{8(x+1)} - \frac{3}{8} \text{Log}|x+1| + C.$$

ou encore, en groupant les termes rationnels et d'autre part les termes transcendants,

$$F = \frac{-x(x^2 + 1)}{4(x^2 - 1)^2} + \frac{3}{8} \text{Log} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

EXEMPLE III. — Calculer $F = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Nous avons trouvé (I, 119, 3°)

$$\frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2} \right] - \frac{2i\sqrt{3}}{9} \left[\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta} \right]$$

en appelant α et β les zéros du trinôme $x^2 + x + 1$:

$$\alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les deux premiers éléments simples s'intègrent immédiatement sous la forme

$$\frac{1}{3} \left[\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} \right] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Avant d'intégrer les deux derniers, faisons-en la somme, ce qui donne

$$\frac{2}{3} \frac{1}{x^2 + x + 1};$$

puis mettons le trinôme sous la forme $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. L'intégrale

$$\frac{2}{3} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc tg} \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{3}} \right] + C,$$

et finalement

$$F = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \text{Arc tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3° Cas particulier. — Si l'on a l'intégrale $\int \varphi(x^n) x^{n-1} dx$, $\varphi(t)$ étant une fraction rationnelle, on prend $x^n = t$ comme nouvelle variable, et l'on est ramené à l'intégrale $\int \varphi(t) \frac{dt}{n}$.

On ramène à ce calcul celui de l'intégrale $\int \frac{\varphi(x^n)}{x} dx$, en multipliant par x^{n-1} les deux termes de la fonction sous le signe somme, ce qui donne $\int \frac{\varphi(x^n)}{x^n} x^{n-1} dx$ ou $\int \frac{\varphi(t)}{t} \frac{dt}{n}$ avec le même changement de variable.

Cette méthode est tout indiquée si la fraction rationnelle considérée est impaire; on peut alors l'écrire $\frac{P(x^2) \cdot x}{Q(x^2)}$, P et Q étant deux polynômes.

Par exemple
$$F = \int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int \frac{(x^2 - 1)x dx}{x^2(x^2 + 1)}.$$

En posant $x^2 = t$, $F = \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{-1}{2t} + \frac{1}{t+1} \right) dt$

et enfin
$$F = \text{Log} \frac{1+x^2}{|x|} + C.$$

De même
$$\int \frac{dx}{x(x^4 + 1)} = \int \frac{x^3 dx}{x^4(x^4 + 1)} = \frac{1}{4} \text{Log} \frac{x^4}{x^4 + 1} + C.$$

4° Primitives des éléments simples de seconde espèce provenant de la décomposition d'une fraction rationnelle. — Pour calculer l'intégrale

$$F = \int \frac{Ax + B}{[(x-p)^2 + q^2]^n} dx,$$

où n est un entier positif, A , B , p , q des constantes réelles, on commence par introduire au numérateur la différentielle $2(x-p) dx$ du trinôme $u = (x-p)^2 + q^2$ qui figure au dénominateur en écrivant

$$Ax + B = \frac{A}{2}(2x - 2p) + B + Ap.$$

$$F = \frac{A}{2} \int \frac{2(x-p) dx}{[(x-p)^2 + q^2]^n} + (B + Ap) \int \frac{dx}{[(x-p)^2 + q^2]^n}.$$

La première intégrale se calcule de suite :

si n est différent de 1,
$$\int \frac{du}{u^n} = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{u^{n-1}} + C,$$

et si n égale 1,
$$\int \frac{du}{u} = \text{Log} u + C.$$

Reste à calculer l'intégrale

$$G = \int \frac{dx}{[(x-p)^2 + q^2]^n}.$$

a) Nous pouvons faire le changement de variable défini par

$$x - p = q \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{q}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad \text{et} \quad u = q^2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \quad \text{ou} \quad \frac{q^2}{\cos^2 \varphi}.$$

et nous trouverons ainsi

$$G = \frac{1}{q^{2n-1}} \int \cos^{2n-2} \varphi \cdot d\varphi;$$

Nous verrons au paragraphe 171 comment on trouve en toute généralité une primitive d'un polynôme en $\sin x$ et $\cos x$, et en particulier d'une puissance paire de $\cos x$. Donnons ici un exemple simple.

EXEMPLE. — Soit à calculer $F = \int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2} dx$.

Posons $u = x^2 + x + 1$; $du = (2x+1)dx$

$$\frac{1-x}{u^2} = \frac{1}{2} \frac{2-2x}{u^2} = \frac{1}{2} \frac{3-(1+2x)}{u^2}$$

$$F = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{u^2} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = G + \frac{1}{2} \frac{1}{u}$$

en posant

$$G = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Écrivons $u = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ et faisons le changement de variable défini par

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \varphi$$

ou, de façon plus précise, par $\varphi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$,

$$u = \frac{3}{4 \cos^2 \varphi}.$$

$$G = \frac{3}{2} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{16 \cos^4 \varphi}{9}}{\frac{3}{4 \cos^2 \varphi}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \int \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$G = \frac{2}{\sqrt{3}} \int (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{2\varphi}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\varphi + C$$

$\sin 2\varphi$ s'exprime rationnellement en fonction de $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$,

$$\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{2(x^2+x+1)}.$$

Finalement

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} + C$$

ou, en groupant les deux fractions rationnelles,

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{x+1}{x^2+x+1} + C.$$

b) Nous pouvons déterminer la fonction G , qui dépend de l'entier n , au moyen d'une formule de récurrence que donne une intégration par parties.

Nous simplifierons les calculs en faisant le changement de variable

$$x - p = qt, \quad \text{d'où} \quad G = \frac{1}{q^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$

Posons

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

$$I_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} - \int t d[(t^2+1)^{-n}]$$

$$I_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^{n+1}}$$

On remplace, au numérateur, sous le signe $\int$, t^2 par $(t^2 + 1) - 1$, d'où

$$I_n = \frac{t}{(t^2 + 1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$

et finalement

$$(1) \quad 2n I_{n+1} = \frac{t}{(t^2 + 1)^n} + (2n - 1) I_n.$$

De proche en proche on se ramène au résultat obtenu pour $n = 1$

$$2 I_2 = \frac{t}{t^2 + 1} + I_1, \quad I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \text{Arc } \text{tgt}.$$

L'emploi de cette formule générale n'est pratique pour le calcul de I_n que si $n \geq 3$.

Pour obtenir I_2 , on peut partir directement de la dérivée de $\frac{t}{t^2 + 1}$.

D'ailleurs la formule (1) peut se retrouver aussi en partant de la dérivée de $f = \frac{t}{(t^2 + 1)^n}$:

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{1}{t} - \frac{2nt}{t^2 + 1} \quad \text{ou} \quad \frac{(1 - 2n)[(t^2 + 1) - 1] + 1}{t(t^2 + 1)} \\ f' &= \frac{1 - 2n}{(t^2 + 1)^n} + \frac{2n}{(t^2 + 1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

En prenant les primitives, on retrouve la formule (1).

5° L'emploi d'une formule de récurrence peut permettre un calcul rapide d'intégrales de la forme plus générale

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + h)^n},$$

que la constante réelle h soit positive ou négative.

Une intégration par parties donne, comme au 4°,

$$I_n = \frac{t}{(t^2 + h)^n} - \int t d[(t^2 + h)^{-n}]$$

on remplace, dans l'expression développée de la dernière intégrale,

$$t^2 \text{ par } t^2 + h - h,$$

et on obtient finalement

$$2nh I_{n+1} = \frac{t}{(t^2 + h)^n} + (2n - 1) I_n.$$

Par exemple, soit à calculer $I_3 = \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^3}$;

$$\begin{array}{ll} \text{pour } n = 2 & -4 I_3 = \frac{t}{(t^2 - 1)^2} + 3 I_2 \\ \text{pour } n = 1 & -2 I_2 = \frac{t}{t^2 - 1} + I_1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -2 \\ +3 \end{array} \right.$$

En faisant la combinaison linéaire indiquée on obtient

$$+8 I_3 = \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} + \frac{3t}{t^2 - 1} + 3 I_1$$

ou

$$I_3 = \frac{-t}{4(t^2 - 1)^2} + \frac{3t}{8(t^2 - 1)} + \frac{3}{16} \text{Log} \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

La même méthode réussit encore pour les intégrales

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^p + h)^n} \quad K_n = \int \frac{t^q dt}{(t^p + h)^n}$$

où p et q sont des entiers naturels ($q < p$).

Par exemple

$$J_n = \frac{t}{(t^p + h)^n} + np \int \frac{t^p dt}{(t^p + h)^{n+1}}$$

$$J_n = \frac{t}{(t^p + h)^n} + np[J_n - hJ_{n+1}].$$

170. Primitives d'un produit de sinus et de cosinus de fonctions linéaires de x . — Pour calculer l'une des intégrales indéfinies

$$\int \sin(ax + b) \cos(a'x + b') \cdot dx, \quad \int \cos(ax + b) \cos(a'x + b') \cdot dx$$

$$\int \sin(ax + b) \sin(a'x + b') \cdot dx$$

où a, b, a', b' sont des constantes, on applique l'une des formules qui permettent de remplacer un produit de sinus ou de cosinus par une somme ou une différence de sinus ou de cosinus. Ce procédé s'applique de proche en proche s'il s'agit d'un produit de sinus ou de cosinus dont le nombre surpasse deux.

Par exemple, soit à calculer $F = \int \cos x \cos 3x \sin 5x \, dx$.

On écrit successivement $\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$

$$\frac{1}{2} \cos 4x \sin 5x = \frac{1}{4}(\sin 9x + \sin x), \quad \frac{1}{2} \cos 2x \sin 5x = \frac{1}{4}(\sin 7x + \sin 3x),$$

et finalement
$$F = -\frac{1}{4} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 9x}{9} \right) + C.$$

[71. Primitives d'un polynôme en $\sin x$ et $\cos x$. — Chercher les primitives d'un polynôme en $\sin x$ et $\cos x$ revient à calculer des intégrales indéfinies de la forme

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx$$

où p et q sont deux entiers naturels.

1° Un seul des deux exposants est impair. — Si p est impair, soit $p = 2p' + 1$, l'élément différentiel peut s'écrire

$$\sin^{2p'} x \cos^q x \cdot \sin x \, dx = -(1 - \cos^2 x)^{p'} \cos^q x \cdot d(\cos x)$$

et s'intégrer en utilisant la fonction auxiliaire $t = \cos x$.

Si q est impair, soit $q = 2q' + 1$, l'élément différentiel peut s'écrire

$$\sin^p x \cos^{2q'} x \cdot \cos x \, dx = \sin^p x (1 - \sin^2 x)^{q'} \cdot d(\sin x)$$

et s'intégrer en utilisant la fonction auxiliaire $t = \sin x$.

2° Les deux exposants sont impairs. — Si p et q sont tous deux impairs, soit $p = 2p' + 1$, $q = 2q' + 1$, l'élément différentiel de l'intégrale proposée prend la forme

$$\sin^{2p'} x \cdot \cos^{2q'} x \cdot \sin x \cos x \, dx \quad \text{ou} \quad \sin^{2p'} x \cdot \cos^{2q'} x \cdot d\left(-\frac{1}{4} \cos 2x\right);$$

en choisissant $\cos 2x = t$ comme variable d'intégration, on est ramené à

$$-\frac{1}{4} \int \left(\frac{1-t}{2}\right)^{p'} \left(\frac{1+t}{2}\right)^{q'} dt.$$

3° Les deux exposants sont pairs. — Supposons p et q pairs, soit $p = 2p'$, $q = 2q'$; pour les petites valeurs de p' et q' , on peut transformer l'expression $(\sin^2 x)^{p'} (\cos^2 x)^{q'}$ en appliquant les formules

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

et en remplaçant un produit de deux cosinus par une somme de deux cosinus.

Par exemple, pour calculer $F = \int \cos^4 x \sin^2 x \, dx$, nous écrirons

$$\cos^4 x \sin^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{8} = \frac{1}{16} \left[1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) \right],$$

d'où

$$F = \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C.$$

On peut aussi, dans tous les cas, utiliser les formules d'Euler pour transformer le monôme $(\sin x)^{2p'} (\cos x)^{2q'}$ en une somme de cosinus de multiples de l'arc x (ces formules seront établies au n° 224).

On trouve ainsi :

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} [\cos 4x + 4 \cos 2x + 3] \quad \text{et} \quad \sin^4 x = \frac{1}{8} [\cos 4x - 4 \cos 2x + 3].$$

On en déduit

$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{8} \left[\frac{\sin 4x}{4} + 2 \sin 2x + 3x \right] + C \quad \text{et} \quad \int \sin^4 x \, dx = \frac{1}{8} \left[\frac{\sin 4x}{4} - 2 \sin 2x + 3x \right] + C.$$

172. Primitives d'une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$. —

1° Méthode générale. — Soit à calculer

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx,$$

R étant une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$. On peut toujours ramener cette intégration à celle d'une fonction rationnelle d'une variable t en prenant pour variable d'intégration $t = \tan \frac{x}{2}$. Le fait que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ admettent la période commune 2π permet de se limiter, dans la recherche des

primitives de $R(\sin x, \cos x)$, à un intervalle d'amplitude 2π . Effectuons le changement de variable

$$x = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} t \iff \begin{cases} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ x \in]-\pi, +\pi[\end{cases}$$

En tenant compte des formules

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

l'intégrale proposée s'écrit

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2};$$

le nouvel élément différentiel est une fonction rationnelle de t .

Nous trouvons ainsi, sur $] -\pi, 0[$ et sur $]0, \pi[$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Log}|t| + C, \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

A cause de la périodicité du sinus, le résultat est valable sur tout intervalle ne contenant pas l'une des valeurs $k\pi$.

Le même changement de variable permet d'écrire successivement

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \operatorname{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C, \quad \text{ou enfin} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

résultat valable sur tout intervalle ne contenant pas l'une des valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

La seconde intégrale peut se déduire de la première en faisant le changement de variable $y = x + \frac{\pi}{2}$ qui donne successivement $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dy}{\sin y} = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg} \frac{y}{2}\right| + C$ ou enfin

$$\operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

2° Cas particuliers. — Le changement de variable $x = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} t$, qui réussit toujours, conduit parfois à des calculs laborieux. On l'évitera dans les exemples suivants (où R désigne une fonction rationnelle d'une variable) :

$$1^\circ \quad \int R(\sin x) \cos x dx = \int R(\sin x) d(\sin x).$$

En posant $u = \sin x$, on est ramené à l'intégration d'une différentielle rationnelle $R(u)du$.

$$2^\circ \quad \int R(\cos x) \sin x dx = - \int R(\cos x) d(\cos x).$$

En posant $u = \cos x$, on est ramené à l'intégration d'une différentielle rationnelle $R(u)du$.

$$3^\circ \quad \int R(\operatorname{tg} x) dx.$$

Avec le changement de variable $x = \text{Arc } \text{tgt}$, l'intégrale précédente se ramène à l'intégrale $\int R(t) \frac{dt}{1+t^2}$, dont l'élément différentiel est rationnel en t .

Si une différentielle rationnelle par rapport à $\sin x$ et $\cos x$, $f(\sin x, \cos x) dx$, n'est pas donnée sous l'une des trois formes précédentes, on peut essayer de l'y mettre. On remarque à cet effet que le changement de x en $\pi - x$ ne modifie pas $\sin x$, change $\cos x$ en $-\cos x$, dx en $-dx$, et finalement conserve la différentielle $R(\sin x) \cos x dx$. Pour qu'une différentielle $f(\sin x, \cos x) dx$ puisse se mettre sous la forme précédente $R(\sin x) \cos x dx$, il est donc nécessaire qu'elle ne soit pas modifiée par le changement de x en $\pi - x$. De même pour que la différentielle $f(\sin x, \cos x) dx$ puisse se mettre sous la forme $R(\cos x) \sin x dx$, il est nécessaire qu'elle ne soit pas changée par le changement de x en $-x$. Enfin, pour que la différentielle $f(\sin x, \cos x) dx$ puisse se mettre sous la forme $R(\text{tgt} x) dx$, il est nécessaire qu'elle ne change pas quand on remplace x par $\pi + x$.

On constatera, dans la pratique, que si l'une de ces invariances est réalisée, on peut effectivement réduire la différentielle donnée $f(\sin x, \cos x) dx$ à la forme simple (1), (2) ou (3) correspondante.

EXEMPLE I. — Pour calculer l'intégrale $F = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$, on observe que l'élément différentiel est invariant par le changement de x en $x + \pi$; on prendra $\text{tg} x$ comme variable auxiliaire; à cet effet on écrira successivement

$$F = \int \frac{\cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 + \text{tg}^2 x}{\text{tg}^2 x} dx = \int \frac{d(\text{tg} x)}{\text{tg}^2 x} = -\frac{1}{\text{tg} x} + C.$$

Pour calculer l'intégrale $G = \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$, on observe que l'élément différentiel est invariant par le changement de x en $-\pi - x$; on prendra $\cos x$ comme variable auxiliaire; on écrira successivement

$$G = - \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} d(\cos x),$$

et, en posant $u = \cos x$,

$$G = \int \left(-\frac{1}{u} + 2u - u^3 \right) du = -\text{Log} |\cos x| + \cos^2 x - \frac{1}{4} \cos^4 x + C.$$

EXEMPLE II. — Soit à calculer, p étant un entier naturel,

$$F = \int \frac{dx}{\cos^{2p} x} \quad \text{et} \quad G = \int \frac{dx}{\sin^{2p} x}.$$

L'élément différentiel ne change pas par le changement de x en $\pi + x$. En posant $\text{tg} x = t$, la première intégrale s'écrit successivement

$$F = \int \frac{1}{\cos^{2p-2} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + t^2)^{p-1} dt;$$

en posant $\text{cotg} x = u$, la seconde intégrale s'écrit successivement

$$G = \int \frac{1}{\sin^{2p-2} x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = - \int (1 + u^2)^{p-1} du.$$

Dans chaque cas on est ramené à l'intégration d'un polynôme.

EXEMPLE III. — Soit à calculer, p étant un entier naturel,

$$F = \int \frac{dx}{\sin^{2p+1} x} \quad \text{et} \quad G = \int \frac{dx}{\cos^{2p+1} x}.$$

En posant $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, l'intégrale F devient $\frac{1}{2^{2p}} \int \frac{(1+t^2)^{2p}}{t^{2p+1}} dt$, et l'on est ramené à intégrer une somme de monômes par rapport à t . L'intégrale G se ramène à la première par le changement de variable $x + \frac{\pi}{2} = y$.

Par exemple $\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{(1+t^2)^4}{2^4 t^5} dt \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2^4} \int \left(t^3 + 4t + \frac{6}{t} + \frac{4}{t^3} + \frac{1}{t^5} \right) dt,$
ce qui donne $\frac{1}{2^4} \left[\frac{1}{4} \left(t^4 - \frac{1}{t^4} \right) + 2 \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) + 6 \operatorname{Log} |t| \right] + C.$

On revient à la variable x en observant que $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} =$

$$t^2 - \frac{1}{t^2} = \frac{-4 \cos x}{\sin^2 x}; \quad t^2 + \frac{1}{t^2} = \frac{4}{\sin^2 x} - 2;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4 \sin^2 x} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{8} \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

EXEMPLE IV. — Lorsque la fonction à intégrer est paire, on peut la mettre sous forme d'une fraction rationnelle en $\cos x$, et la décomposer en éléments simples relativement à cette variable. Par exemple

$$F = \int \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^3}{\cos^4 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{3}{\cos^2 x} + 3 - \cos^2 x \right) dx$$

et finalement $F = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg} x + \frac{5x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

EXEMPLE V. — Pour calculer l'intégrale indéfinie

$$G = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

on peut mettre l'expression $a \sin x + b \cos x$ sous la forme d'un seul cosinus ou d'un seul sinus.

Si $c \neq 0$, on pose $a \sin x + b \cos x = r \cos(x - \alpha)$, r et α étant déterminés par les égalités

$$a = r \sin \alpha, \quad b = r \cos \alpha.$$

G devient alors $\int \frac{dx}{r \cos(x - \alpha) + c}$ et se calcule en posant $t = \operatorname{tg} \frac{x - \alpha}{2}$. On trouve

$$G = \frac{2}{c + r} \int \frac{dt}{1 + \frac{c - r}{c + r} t^2}.$$

Si $\frac{c - r}{c + r}$ est positif, soit k^2 , la dernière intégrale a pour valeur $\frac{1}{k} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} kt + C.$

Si $\frac{c - r}{c + r}$ est négatif, soit $-k^2$, la dernière intégrale a pour valeur

$$\frac{1}{2k} \operatorname{Log} \left| \frac{1 + kt}{1 - kt} \right| + C.$$

Si $c = 0$, on pose $a \sin x + b \cos x = r \sin(x - \alpha)$, avec $a = r \cos \alpha$, $b = -r \sin \alpha$

et alors $G = \int \frac{dx}{r \sin(x - \alpha)} = \frac{1}{r} \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{x - \alpha}{2} \right| + C.$

173. *Primitives des polynômes en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$; primitives des fonctions rationnelles de $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$.* — D'une façon générale, pour intégrer une différentielle où figurent les fonctions hyperboliques de la variable x , on peut imaginer la différentielle obtenue en remplaçant les fonctions hyperboliques par les fonctions circulaires correspondantes, et utiliser pour la différentielle proposée la même méthode que pour la nouvelle différentielle relative aux fonctions circulaires.

Le calcul de l'intégrale $F = \int f(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ où le coefficient de dx est une fonction rationnelle de $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ se ramène à l'intégration d'une différentielle rationnelle d'une variable t en posant $t = \operatorname{th} \frac{x}{2} \iff x = 2 \operatorname{Arctg} t$; en effet

$$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1-t^2}.$$

t variant dans $] -1, +1[$, x prend toute valeur réelle.

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} &= \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Log} |t| + C, & \text{ou} & \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{Log} \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C, \\ \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} &= \int \frac{2 dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} t + C, & \text{ou} & \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

On peut aussi calculer les deux intégrales précédentes en exprimant $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ en fonction de $e^x = u$, et en faisant le changement de variable

$$x = \operatorname{Log} u, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{du}{u}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} &= \int \frac{2 du}{u^2 - 1} = \operatorname{Log} \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C, & \text{ou} & \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{Log} \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C; \\ \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} &= \int \frac{2 du}{u^2 + 1} = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u + C, & \text{ou} & \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (e^x) + C. \end{aligned}$$

En comparant les résultats trouvés par les deux méthodes, on notera que

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{th} \frac{x}{2};$$

la fonction primitive obtenue pour $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ est donc la même. Au contraire e^x n'est pas égal à $\operatorname{th} \frac{x}{2}$ et les primitives particulières obtenues pour $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ ne sont pas identiques, mais on vérifiera que

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right) \quad \text{ou} \quad \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} e^x - \frac{\pi}{4}$$

d'après la formule d'addition relative à la fonction $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$; les deux primitives obtenues ont bien une différence constante.

Pour calculer les intégrales

$$\int R(\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x \, dx, \quad \int R(\operatorname{sh} x) \operatorname{ch} x \, dx, \quad \int R(\operatorname{th} x) \, dx$$

où R désigne une fonction rationnelle d'une variable, on utilisera de préférence respectivement, les fonctions auxiliaires

$$u = \operatorname{ch} x, \quad v = \operatorname{sh} x, \quad w = \operatorname{th} x.$$

Pour reconnaître si F peut se ramener à l'un des trois cas précédents, on imagine l'intégrale $G = \int f(\sin x, \cos x) dx$; suivant que l'élément différentiel de G est invariant par le changement de x en $-x$, en $\pi - x$, en $\pi + x$, on intègre F en prenant respectivement pour nouvelle variable u, v, w .

REMARQUE. — Plus généralement pour calculer une intégrale de la forme

$$\int R(e^{rx}) dx,$$

où r est un nombre réel, et $R(u)$ une fonction rationnelle de la variable u , on fait le changement de variable

$$e^{rx} = t, \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{r} \operatorname{Log} t,$$

et l'on est ramené au calcul de

$$\frac{1}{r} \int \frac{R(t)}{t} dt,$$

EXEMPLE. — Pour calculer l'intégrale

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{sh}^3 x - 1},$$

on observera que

$$\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{sh}^3 x = \frac{(e^x + e^{-x})^3 + (e^x - e^{-x})^3}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{e^{4x} + 3}{4 e^x};$$

en posant $e^x = u$, on obtient

$$I = \int \frac{4 du}{u^4 - 4u + 3} \quad \text{ou} \quad \int \frac{4 du}{(u-1)^2 (u^2 + 2u + 3)}$$

$$I = -\frac{2}{3} \frac{1}{e^x - 1} + \frac{2}{9} \operatorname{Log} \frac{e^{2x} + 2e^x + 3}{(e^x - 1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{9} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{e^x + 1}{\sqrt{2}} + C.$$

174. Utilisation de changements de variables circulaires ou hyperboliques pour l'intégration de certaines fonctions rationnelles. — Nous avons déjà vu que pour calculer $F = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ on peut faire le changement de variable $x = a \operatorname{tg} \varphi$ qui ramène le calcul de F à la recherche des primitives d'un monôme en $\cos \varphi$.

Une méthode analogue peut être utilisée pour calculer

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n} \quad (a > 0)$$

on pourra faire le changement de variable

$$x = a \operatorname{th} \varphi \quad \text{si} \quad |x| < a$$

$$x = a \operatorname{coth} \varphi \quad \text{si} \quad |x| > a$$

Les mêmes changements de variable réussiront plus généralement avec

$$\int \frac{f(x^2)dx}{(x^2 \pm a^2)^n}$$

où f est un polynôme de degré au plus égal à $n - 1$.

EXEMPLE I. — Pour calculer l'intégrale $A = \int \frac{dx}{\sin^5 x}$ (déjà examinée au n° 172-2°), on peut observer que l'élément différentiel reste invariant par le changement de x en $-x$; on peut donc poser $\cos x = u$, ce qui donne

$$A = \int \frac{\sin x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{-du}{(1-u^2)^3}.$$

Le calcul de cette nouvelle intégrale, par le changement de variable $u = \text{th } \varphi$ ($|u|$ reste inférieur à 1), se ramène à celui de

$$A = - \int \text{ch}^4 \varphi d\varphi.$$

$$\text{Or } \text{ch}^4 \varphi = \left(\frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} \right)^4 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{8} (\text{ch } 4\varphi + 4 \text{ch } 2\varphi + 3)$$

$$\text{et } A = -\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \text{sh } 2\varphi \text{ch } 2\varphi + 2 \text{sh } 2\varphi + 3\varphi \right) + C.$$

On revient à x en utilisant les formules

$$\text{sh } 2\varphi = \frac{2u}{1-u^2} = \frac{2 \cos x}{\sin^2 x}; \quad \text{ch } 2\varphi = \frac{1+u^2}{1-u^2} = \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x};$$

$$\text{ch } 2\varphi + \text{sh } 2\varphi = e^{2\varphi} = \frac{1+u}{1-u} = \cot g^2 \frac{x}{2},$$

$$A = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \text{Log} \left| \text{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

L'intégrale $\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^3}$ conduit aux mêmes calculs.

EXEMPLE II. — Le calcul de $\int \frac{dx}{\text{sh}^5 x} = \int \frac{d(\text{ch } x)}{(\text{ch}^2 x - 1)^3}$ peut se faire en posant $\text{ch } x = \text{coth } \varphi$, puisque $\text{ch } x$ reste supérieur à 1, ce qui conduit à l'intégrale

$$- \int \text{sh}^4 \varphi d\varphi,$$

analogue à celle de l'exemple I.

Le calcul de $\int \frac{dx}{\text{ch}^5 x} = \int \frac{d(\text{sh } x)}{(\text{sh}^2 x + 1)^3}$, par le changement de variable $\text{sh } x = \text{tg } \varphi$, se ramène à celui de l'intégrale $\int \cos^4 \varphi d\varphi$ vu au n° 171-3°.

175. Intégrale abélienne attachée à une courbe unicursale. —

1° **Généralités.** — On appelle intégrale abélienne attachée à une courbe unicursale $\Gamma[\varphi(x, y) = 0]$ (1) toute intégrale de la forme $\int R(x, y)dx$, où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle des deux variables x et y , ces deux variables étant liées par la relation $\varphi(x, y) = 0$. Une telle intégrale se calcule en

(1) Les courbes unicursales sont étudiées au tome IV.

exprimant rationnellement, en fonction d'un paramètre t , les coordonnées d'un point courant de cette courbe, soit $x = f(t)$, $y = g(t)$. Dans l'intégrale proposée, on fait le changement de variable $x = f(t)$, et l'on est ramené au calcul de l'intégrale

$$\int R[f(t), g(t)] f'(t) dt$$

dont l'élément différentiel est rationnel par rapport à la variable t .

2° Recherche des primitives de $R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle.

Si l'on pose
$$y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad (1)$$

la relation ainsi écrite entre x et y représente un arc d'une courbe unicursale car x est une fonction rationnelle de y ; cette relation entraîne les suivantes

$$x = \frac{b - dy^m}{cy^m - a}, \quad dx = \frac{ad - bc}{(cy^m - a)^2} my^{m-1} dy.$$

Le changement de variable défini par (1) ramène le calcul de l'intégrale $\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ à celui d'une intégrale indéfinie dont l'élément différentiel est rationnel par rapport à y . Cette méthode s'applique en particulier lorsque dans R figure la racine carrée d'une fonction homographique de x .

EXEMPLE. — Calculer l'intégrale $V = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \frac{dx}{x} \quad (a > 0).$

Effectuons le changement de variable défini par l'égalité

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = y \quad \text{ou} \quad x = a \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}.$$

L'élément différentiel devient $\frac{4y^2 dy}{(y^2 + 1)(y^2 - 1)}$ ou $\frac{2 dy}{y^2 + 1} + \frac{2 dy}{y^2 - 1}$. On trouve finalement $V = 2 \operatorname{Arc} \lg \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \operatorname{Log} \frac{|\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}|}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} + C.$

REMARQUE. — On ramène à une intégrale de la forme précédente les intégrales

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta, \dots\right) dx$$

où $R(x, y, z, \dots)$ est une fonction rationnelle et où $\alpha, \beta, \dots$ sont des exposants rationnels.

A cet effet, on réduit ces exposants au même dénominateur, soit $\alpha = \frac{\alpha'}{m}$, $\beta = \frac{\beta'}{m}$, ... et la fonction sous le signe somme prend la forme

$$R_1\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

$R_1(x, y)$ étant une fonction rationnelle.

EXEMPLE. — Calculer l'intégrale $F = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}}.$

On pose $u = \sqrt[6]{1+x}$, en d'autres termes on effectue le changement de variable $x = u^6 - 1$.

$$F = \int \frac{6 u^5 du}{u^3 + u^2} = 6 \int \frac{u^3 du}{u + 1} = 6 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \text{Log}|1+u| \right] + C.$$

On revient ensuite à la variable x .

REMARQUE. — L'idée qui consiste à prendre pour variable d'intégration un radical portant sur une fonction homographique de x peut s'utiliser dans d'autres cas, combinée avec une intégration par parties.

Soit par exemple
$$F = \int (x+2) \text{Arc tg} \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} dx.$$

Posons
$$t = \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{t^2-3}{1-t^2}.$$

L'élément différentiel contient $\text{Arc tg } t = \omega$, d'où $t = \text{tg } \omega$.

Alors
$$F = \int \omega (x+2) dx = \omega \frac{(x+2)^2}{2} - \int \frac{(x+2)^2}{2} d\omega.$$

L'élément différentiel de la dernière intégrale s'exprime en fonction de ω : $\frac{d\omega}{2 \cos^2 2\omega}$.

Finalement
$$F = \omega \frac{(x+2)^2}{2} - \frac{1}{4} \text{tg } 2\omega + C$$

et en revenant à la variable x

$$F = \frac{(x+2)^2}{2} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} + \frac{1}{4} (x+1) \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} + C.$$

176. Recherche des primitives de $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle. — Avant de donner la méthode générale, nous examinerons un certain nombre de cas particuliers qui se rencontrent fréquemment et qu'on ramène aisément à des primitives déjà connues.

1° Cas particuliers. — I. On calcule.

$$F = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

en faisant sortir $|a|$ du radical, et en mettant le trinôme sous sa forme décomposée en carrés; le changement de variable $z = x + \frac{b}{2a}$, ramène F soit à

$$\int \frac{dz}{\sqrt{h^2 - z^2}} = \text{Arc sin} \frac{z}{h} + C \quad (h > 0)$$

soit à
$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + k}} = \text{Log}|z + \sqrt{z^2 + k}| + C.$$

Le calcul de $G = \int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ se ramène au précédent en faisant

apparaître au numérateur la dérivée du trinôme $u = ax^2 + bx + c$; on peut trouver deux constantes α et β telles que $mx + n = \alpha u' + \beta$;

alors

$$G = 2\alpha \sqrt{u} + \beta F.$$

II. On calcule
$$F = \int \frac{dx}{(x - \alpha) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

au moyen du changement de variable $x - \alpha = \frac{1}{t}$; dans le cas général où α n'est pas zéro du trinôme

$$F = \int \frac{dt}{\varepsilon \sqrt{a't^2 + b't + c'}} \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon = +1 \quad \text{si } t < 0 \\ \varepsilon = -1 \quad \text{si } t > 0 \end{array} \right\}$$

et on est ramené au cas I.

III. Pour calculer
$$F = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx,$$

on fait, comme au cas I, le changement de variable $z = x + \frac{b}{2a}$, après avoir mis le radicande sous forme décomposée en carrés.

Soit alors $G = \int \sqrt{z^2 + k} \, dz$; une intégration par parties donne

$$G = z \sqrt{z^2 + k} - \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{z^2 + k}};$$

on remplace au numérateur z^2 par $(z^2 + k) - k$

$$G = z \sqrt{z^2 + k} - \left[G - k \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + k}} \right].$$

$$G = \frac{1}{2} z \sqrt{z^2 + k} + \frac{k}{2} \text{Log} |z + \sqrt{z^2 + k}| + C.$$

La même méthode donne, avec $H = \int \sqrt{h^2 - z^2} \, dz \quad (h > 0)$

$$H = z \sqrt{h^2 - z^2} - \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{h^2 - z^2}}$$

on remplace au numérateur $-z^2$ par $(h^2 - z^2) - h^2$

$$H = \frac{1}{2} z \sqrt{h^2 - z^2} + \frac{h^2}{2} \text{Arc sin} \frac{z}{h} + C.$$

Ces deux exemples montrent qu'il est plus commode d'avoir le radical au dénominateur qu'au numérateur.

Le calcul de $K = \int (mx + n) \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx$ se ramène au précédent en faisant apparaître, comme au cas I, $mx + n = \alpha u' + \beta$;

alors
$$K = \frac{2}{3} \alpha u \sqrt{u} + \beta F.$$

2° Méthode générale. — La relation $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$ représente par rapport à un repère que nous choisirons orthonormé l'arc Γ de la conique

$$y^2 = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

situé dans la région des $y \geq 0$. Nous utiliserons une représentation paramétrique de cette conique.

a) On peut, dans tous les cas, obtenir une représentation rationnelle de la conique en coupant cette courbe par une droite variable menée par l'un de ses points.

Si Γ a des points sur l'axe Ox , ce sont deux sommets de cette courbe; on peut faire pivoter une sécante variable autour de l'un de ces sommets.

Si Γ n'a pas de point sur l'axe Ox , Γ est une hyperbole; on peut alors couper Γ par une sécante variable parallèle à une direction asymptotique.

b) Si Γ est une ellipse, on peut en obtenir une représentation paramétrique à l'aide des fonctions circulaires.

Si Γ est une hyperbole, on peut en obtenir une représentation paramétrique à l'aide des fonctions hyperboliques.

Nous allons détailler les calculs successivement dans les deux cas.

Il est commode de faire sortir du radical la valeur absolue du coefficient de x^2 , pour réduire ce coefficient à $+1$ ou -1 .

3° Le coefficient de x^2 est négatif; Γ est une ellipse. — Le trinôme $T = ax^2 + bx + c$ a certainement des zéros, sinon T serait constamment négatif; d'autre part, T n'est positif que si x est compris entre les deux zéros. T peut se mettre, soit sous la forme d'une différence de deux carrés, soit sous la forme d'un produit de deux binômes du premier degré. Développons parallèlement les deux calculs possibles.

$$y^2 = (-a) [q^2 - (x-p)^2] \quad \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ q > 0 \end{array} \right.$$

En posant

$$x - p = q \cos \theta$$

$$\text{on a } y^2 = (-a) q^2 \sin^2 \theta.$$

En faisant varier θ de 0 à π , $x - p$ prend toutes les valeurs possibles de $-q$ à $+q$ et comme alors $\sin \theta$ reste positif ou nul, on voit finalement qu'on peut représenter Γ par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} x = p + q \cos \theta \\ y = \sqrt{-a} q \sin \theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

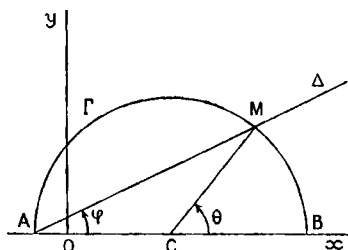


FIG. 59.

$$y^2 = -a(x - \alpha)(\beta - x), \quad a < 0 \\ \alpha \leq x \leq \beta.$$

α et β sont les abscisses des points A et B de Γ situés sur Ox .

Coupons par la droite Δ issue de A

$$y = \sqrt{-a} t(x - \alpha) \quad (t \geq 0).$$

L'équation aux abscisses des points communs à Δ et Γ est

$$-at^2(x - \alpha)^2 = -a(x - \alpha)(\beta - x);$$

après suppression de la racine α il reste

$$t^2(x - \alpha) = \beta - x \\ \text{d'où } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\alpha t^2 + \beta}{t^2 + 1} \\ y = \sqrt{-a} \cdot \frac{(\beta - \alpha)t}{t^2 + 1} \end{array} \right. \quad t \geq 0$$

$$\text{En posant } t = \tan \varphi \quad \left[0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right]$$

les formules précédentes deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \sin^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi \\ y = \sqrt{-a} \cdot (\beta - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi \end{array} \right.$$

La figure 59 faite en supposant $a = -1$, montre, dans le cercle de diamètre AB, de centre C, l'origine géométrique des angles θ (angle au centre, associé au point M de Γ) et φ (angle inscrit associé au point M). Si a est négatif, différent de -1 , le cercle de diamètre AB est déduit de l'ellipse Γ par une affinité orthogonale d'axe Ox.

La représentation paramétrique en θ ramène à l'intégration d'une fonction rationnelle de $\cos \theta$ et $\sin \theta$; si on peut prendre $\sin \theta$, $\cos \theta$, ou $\operatorname{tg} \theta$ comme variable d'intégration on aura des calculs simplifiés. Si on est obligé de prendre $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ comme variable d'intégration, comme $\frac{\theta}{2} = \varphi$, $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ est le paramètre t de la seconde colonne, et on revient aux calculs que donne la représentation paramétrique rationnelle de Γ . En conséquence, on peut chercher d'abord la représentation paramétrique en $\cos \theta$ et $\sin \theta$; on aura souvent des calculs simplifiés, et, en cas de nécessité, on aura sans difficulté la représentation rationnelle en $t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$.

EXEMPLE I. — Soit à calculer
$$F = \int \frac{dx}{(4 + 4x - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons
 puis
$$y = \sqrt{4 + 4x - x^2} = \sqrt{8 - (x-2)^2},$$

$$x - 2 = 2\sqrt{2} \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

$$y = 2\sqrt{2} \sin \theta$$

$$F = \int \frac{-2\sqrt{2} \sin \theta d\theta}{(2\sqrt{2} \sin \theta)^3} = -\frac{1}{8} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{8} \cot \theta + C$$

$$F = \frac{1}{8} \frac{x-2}{\sqrt{4 + 4x - x^2}} + C.$$

EXEMPLE II. — La représentation paramétrique en φ , très pratique lorsque les racines du trinôme sont mises en évidence, peut s'obtenir directement en projetant sur les axes l'égalité $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$, et en observant que AM mesure $(\beta - \alpha) \cos \varphi$, dans la direction orientée par l'angle polaire φ , $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ devient immédiatement $\int -2 d\varphi = -2\varphi + C$; cette intégrale a pour valeur $-2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}} + C$.

Le même changement de variable convient aux différentielles rationnelles par rapport à x et $\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$, ce radical devenant $\operatorname{tg} \varphi$. C'est ainsi que les courbes

$$y = \int \sqrt{\frac{x+a}{a-x}} dx \quad (a > 0),$$

au moyen du changement de variable

$$x = a(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \quad \text{ou} \quad x = -a \cos 2\varphi$$

peuvent se définir paramétriquement sous la forme

$$x = -a \cos 2\varphi \quad y = a(2\varphi - \sin 2\varphi) + C \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

de telles courbes appartiennent à des cycloïdes engendrées par un cercle dont le centre reste sur Oy.

4° Le coefficient de x^2 est positif; Γ est une hyperbole. — Deux cas sont à envisager suivant que le trinôme $T = ax^2 + bx + c$ est une somme ou une différence de carrés.

$$a) \text{ Supposons } y^2 = a[(x - p)^2 + q^2] \quad \begin{cases} a > 0 \\ q > 0. \end{cases}$$

Le point C tel que $\overline{OC} = p$ est le centre de Γ .

En posant

$$\begin{aligned} x - p &= q \operatorname{sh} \theta \\ \text{on obtient } y^2 &= aq^2 \operatorname{ch}^2 \theta; \end{aligned}$$

comme $\operatorname{ch} \theta$ est positif, une représentation paramétrique de l'arc Γ est

$$\begin{cases} x = p + q \operatorname{sh} \theta \\ y = \sqrt{a} q \operatorname{ch} \theta \end{cases}$$

θ variant de $-\infty$ à $+\infty$.

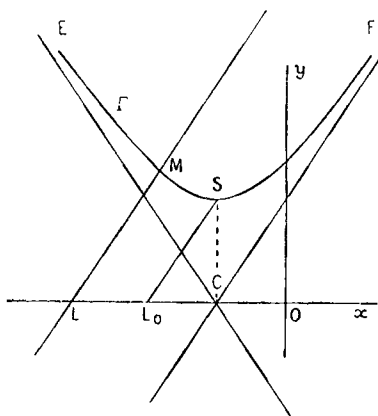


FIG. 60.

$$b) \text{ Supposons } y^2 = a[(x - p)^2 - q^2] \quad \begin{cases} a > 0 \\ q > 0. \end{cases}$$

Le point C tel que $\overline{OC} = p$ est le centre de Γ .

Les points A($x = p - q$) et B($x = p + q$) sont les sommets de Γ ; Γ comprend l'arc AE ($x - p < -q$) et l'arc BF ($x - p > q$).

En posant

$$\begin{aligned} x - p &= \varepsilon q \operatorname{ch} \theta \\ \text{on obtient } y^2 &= aq^2 \operatorname{sh}^2 \theta. \end{aligned}$$

on prend $\varepsilon = +1$ pour $x - p > q$

$\varepsilon = -1$ pour $x - p < -q$.

Coupons Γ par une parallèle Δ à la direction asymptotique de coefficient directeur positif;

Γ étant le point d'intersection avec Ox, posons $\lambda = \overline{LC}$ ($\lambda > 0$) :

$$y = \sqrt{a}(x - p + \lambda)$$

L'équation aux abscisses des points communs est

$$a[(x - p) + \lambda]^2 = a[(x - p)^2 + q^2]$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x - p = \frac{q^2 - \lambda^2}{2\lambda} \\ y = \sqrt{a} \cdot \frac{q^2 + \lambda^2}{2\lambda}. \end{cases}$$

En écrivant

$$x - p = \frac{q}{2} \cdot \left[\frac{q}{\lambda} - \frac{\lambda}{q} \right],$$

on constate que $\frac{\lambda}{q} = e^{\theta}$.

La figure 60 montre que si $\theta < 0$ et par suite $\lambda > q$, le point correspondant de Γ se trouve sur l'arc ES limité au sommet S; si $\theta > 0$ et par suite $\lambda < q$, le point M est sur l'arc SF.

Coupons Γ par une parallèle Δ à la direction asymptotique de coefficient directeur positif;

L étant le point d'intersection avec Ox, posons $\lambda = \overline{CL}$:

$$y = \sqrt{a}(x - p - \lambda).$$

Finalement

$$F = \text{Log}(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1) + \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + C,$$

en absorbant dans la constante les deux nombres $\text{Log } 2$ et -1 qui figurent dans les deux parties de l'intégrale.

EXEMPLE II. — Calculons l'intégrale $F = \int (x^2 + 6x + 5)^{\frac{3}{2}} dx$. Le trinôme $T = x^2 + 6x + 5$ se met sous la forme $T = (x + 3)^2 - 4$; nous poserons $x + 3 = 2\varepsilon \text{ch } \theta$, $\varepsilon = +1$ si $x > -1$, $\varepsilon = -1$ si $x < -5$, et alors $\sqrt{T} = 2 \text{sh } \theta$, en supposant $\theta > 0$. L'élément différentiel devient $16\varepsilon \text{sh } \theta d\theta$ ou $2\varepsilon(\text{ch } 4\theta - 4 \text{ch } 2\theta + 3)d\theta$, et par suite, C étant une constante quelconque,

$$F = \varepsilon \text{sh } 2\theta (\text{ch } 2\theta - 4) + 6\varepsilon \theta + C.$$

Pour revenir à x nous écrirons successivement $\varepsilon \text{sh } 2\theta = \frac{1}{2}(x + 3)\sqrt{T}$;

$$\begin{aligned} \text{ch } 2\theta - 4 &= \frac{1}{2}(x^2 + 6x - 1); & e^{\theta} &= \text{ch } \theta + \text{sh } \theta = \frac{1}{2}[\varepsilon(x + 3) + \sqrt{T}]; \\ \varepsilon \theta &= \varepsilon \text{Log}[\varepsilon(x + 3) + \sqrt{T}] - \varepsilon \text{Log } 2; \end{aligned}$$

— $\varepsilon \text{Log } 2$ peut s'absorber dans la constante d'intégration; on constatera d'autre part que les fonctions $\text{Log}|x + 3 + \sqrt{T}|$ et $-\text{Log}|x + 3 - \sqrt{T}|$ ont une différence constante, de sorte qu'en définitive on pourra prendre, C_1 désignant une nouvelle constante quelconque

$$F = \frac{1}{4}(x + 3)(x^2 + 6x - 1)\sqrt{x^2 + 6x + 5} + 6 \text{Log}|x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 5}| + C_1.$$

5° EMPLOI D'UNE FORMULE DE RÉCURRENCE. — Pour intégrer $\int \frac{R(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, où $R(x)$ est une fraction rationnelle n'ayant que des pôles réels, on peut commencer par décomposer $R(x)$ en éléments simples. On est ainsi ramené aux deux types d'intégrales

$$F = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad G = \int \frac{dx}{(x - \alpha)^p \sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

n et p étant des entiers naturels.

Les intégrales G se ramènent aux intégrales F par le changement de variable

$$\begin{aligned} x - \alpha &= \frac{1}{t}; & ax^2 + bx + c &= \frac{a't^2 + b't + c'}{t^2}, \\ G &= \int \frac{t^{p-1} dt}{\varepsilon \sqrt{a't^2 + b't + c'}} & \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{si } t > 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{si } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour calculer F , on met le radicande sous forme décomposée en carrés, et le changement de variable

$$x + \frac{b}{2a} = z$$

ramène ce calcul au calcul d'intégrales de la forme

$$I_n = \int \frac{z^n dz}{\sqrt{z^2 + k}} \quad \text{ou} \quad J_n = \int \frac{z^n dz}{\sqrt{h^2 - z^2}} \quad (h > 0)$$

suivant que a est positif ou négatif.

L'élément différentiel de I_n s'écrit

$$\begin{aligned} z^{n-1} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 + k}} &= z^{n-1} d(\sqrt{z^2 + k}) \\ I_n &= z^{n-1} \sqrt{z^2 + k} - \int \sqrt{z^2 + k} (n-1) z^{n-2} dz. \end{aligned}$$

Comme il a été déjà dit, on fait apparaître le radical au dénominateur, en remplaçant $\sqrt{z^2 + k}$ par $\frac{z^2 + k}{\sqrt{z^2 + k}}$;

$$I_n = z^{n-1} \sqrt{z^2 + k} - (n-1) \{I_n + k I_{n-2}\}$$

ou enfin

$$n I_n = z^{n-1} \sqrt{z^2 + k} - (n-1) k I_{n-2}.$$

Suivant la parité de n , on est ramené à

$$I_1 = \sqrt{z^2 + k} + C \quad \text{ou} \quad I_0 = \text{Log} |z + \sqrt{z^2 + k}| + C.$$

De même on obtient

$$n J_n = -z^{n-1} \sqrt{h^2 - z^2} + (n-1) h^2 J_{n-2}.$$

Suivant la parité de n , on est ramené à

$$J_1 = -\sqrt{h^2 - z^2} + C \quad \text{ou} \quad J_0 = \text{Arc sin } \frac{z}{h} + C.$$

177. Primitives de fonctions $e^{ax} f(x)$. — Nous nous bornerons à divers types de fonctions $f(x)$ telles qu'on sait trouver une primitive de $e^{ax} f(x)$, où a est une constante (réelle, éventuellement complexe).

1° $f(x)$ est un polynôme. — Intégrons par parties $F = \int e^{ax} f(x) dx$.

$$F = \frac{e^{ax}}{a} f(x) - \int \frac{e^{ax}}{a} f'(x) dx$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$F = \frac{e^{ax}}{a} f(x) - \left[\frac{e^{ax}}{a^2} f'(x) - \int \frac{e^{ax}}{a^2} f''(x) dx \right].$$

Finalement

$$F = e^{ax} \left[\frac{f(x)}{a} - \frac{f'(x)}{a^2} + \frac{f''(x)}{a^3} - \dots \right].$$

Pratiquement, on retient que F est de la forme

$$F = e^{ax} \cdot g(x),$$

g étant un polynôme de même degré que f , qu'on détermine par identification, en exprimant que

$$F' = e^{ax} [g'(x) + ag(x)] \quad \text{est aussi} \quad e^{ax} f(x)$$

$$\text{d'où} \quad g'(x) + ag(x) = f(x) \quad \forall x.$$

EXEMPLE. $F = \int (x^2 + x + 1)e^{-x} dx$

Posons $F = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

$$F' = e^{-x} [(2ax + b) - (ax^2 + bx + c)] = e^{-x} (x^2 + x + 1)$$

$$-a = 1, \quad 2a - b = 1, \quad -c = 1;$$

$$F = -(x^2 + 3x + 4)e^{-x} + C.$$

2° $f(x) = \cos bx$ ou $\sin bx$. — Soit à calculer

$$C = \int e^{ax} \cos bx dx \quad S = \int e^{ax} \sin bx dx$$

où a et b sont deux constantes différentes de 0.

Intégrons par parties :

$$C = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} S + \lambda_1 \qquad S = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} C + \mu_1,$$

λ_1 et μ_1 étant deux constantes quelconques.

On en déduit, λ et μ désignant deux nouvelles constantes, quelconques,

$$C = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + \lambda \qquad S = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + \mu.$$

3° Généralisation. — Pour calculer $\int P(x, e^{mx}, \dots, \cos px, \sin px, \dots) dx$, où P est un polynôme par rapport à $x, e^{mx}, \dots, \cos px, \sin px, \dots$, on peut remplacer les fonctions circulaires par des exponentielles au moyen des formules d'Euler (224) et être ramené ainsi à chercher des primitives de fonctions de la forme $e^{ax} f(x)$, où a est une constante réelle ou complexe, et $f(x)$ un polynôme à coefficients réels ou complexes, c'est-à-dire à l'étude du 1^o.

EXEMPLE I. — Calculer $F = \int (x^2 - x + 1) \cos 2x \, dx$.

$$\cos 2x = \frac{e^{2ix}}{2} + \frac{e^{-2ix}}{2}.$$

Posons
$$F_1 = \int \frac{x^2 - x + 1}{2} e^{2ix} dx = (ax^2 + bx + c) e^{2ix}.$$

En dérivant, on obtient

$$\frac{x^2 - x + 1}{2} = 2i(ax^2 + bx + c) + 2ax + b \quad \forall x$$

d'où
$$F_1 = \left(-\frac{i}{4} x^2 + \frac{1+i}{4} x - \frac{1+i}{8} \right) e^{2ix}$$

d'où
$$F = F_1 + \overline{F_1} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) \cos 2x + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \sin 2x + C.$$

Plus généralement une primitive de la fonction $f(x) [a \cos px + b \sin px]$ où $f(x)$ est un polynôme, a, b, p des constantes est de la forme $P(x) \cos px + Q(x) \sin px$, P et Q étant des polynômes de degré au plus égal à celui de f .

EXEMPLE II. — On peut calculer les intégrales C et S du 2^o en formant la combinaison

$$C + iS = \int e^{(a+bi)x} dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + \lambda + i\mu, \quad \lambda \text{ et } \mu \text{ désignant deux constantes quelconques, réelles, et en séparant la partie réelle et le coefficient de } i.$$

EXERCICES

1. — Calculer les primitives des fonctions

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x(x-1)^3}; \quad \frac{1}{(x^4+1)^2}; \quad \frac{x^2}{x^6+x^3+1}; \quad \frac{1}{x^3+x^2+1}; \quad \frac{x^2+x+1}{x^3(x^2+1)^2}; \\ & \frac{1}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1}; \quad \frac{1}{(x+1)^2-x^2-1}; \quad \frac{1}{(x^2+x+1)^2+1}; \\ & \frac{1}{x^{20}-1}; \quad \frac{x^2}{x^4-2x^2\cos\alpha+1}; \quad \frac{1}{(x-a)^n(x-b)}; \quad \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{2n}}. \end{aligned}$$

2. — Conditions pour que les primitives des fonctions suivantes soient des fractions rationnelles :

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^3}; \quad \frac{ax+b}{(x-c)^2(x-d)^3}; \quad \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \right)^2.$$

3. — On suppose que F et G sont des polynômes premiers entre eux et que G n'a que des zéros simples. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la fraction rationnelle $\frac{F}{G^2}$ soit la dérivée d'une fraction rationnelle est que le polynôme $F'G - FG'$ soit divisible par le polynôme G .

4. — Calculer les primitives des fonctions :

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 2x}{\sin^2 x + \sin 3x}; \quad \frac{1}{\cos x - \cos 5x}; \quad \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 3}; \quad \frac{-\cos \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{2}}; \\ & \frac{1}{\cos x \sin 3x}; \quad \frac{\cos x}{1 + \sin 2x}; \quad \frac{\sin 5x}{\cos 3x}; \quad \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \sin 3x}; \quad \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x}; \quad \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}; \\ & \frac{\operatorname{ch} 3x}{1 + \operatorname{sh} x}; \quad \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh} 5x}; \quad \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}; \quad \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}; \quad \frac{1}{(\sin x + \cos x + 1)^2}; \\ & \frac{1}{f(x) - f(a)}, \quad f \text{ étant l'une des fonctions } \sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}, \operatorname{th}; \quad \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}. \end{aligned}$$

5. — Calculer $I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx$ (n naturel); on pourra chercher une relation entre I_n et I_{n-2} .

6. — Démontrer qu'une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$ étant donnée, on peut la mettre, si elle est impaire, sous la forme $R(\cos x) \sin x$, $R(y)$ étant une fonction rationnelle. (On observera que toute fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$ peut se mettre sous la forme $P(\cos x) \sin x + Q(\cos x)$, P et Q étant des fonctions rationnelles).

Démontrer de même que si une fonction rationnelle donnée de $\sin x$ et de $\cos x$ est une fonction $F(x)$ telle que $F(\pi - x) = -F(x)$ on peut la mettre sous la forme $R(\sin x) \cos x$ et si elle est telle que $F(x + \pi) = F(x)$ on peut la mettre sous la forme $R(\operatorname{tg} x)$, $R(y)$ étant dans les deux cas une fonction rationnelle.

7. — Montrer qu'il est possible de ramener l'intégration de la différentielle

$$x^m (ax^n + b)^p dx, \quad m, n, p \text{ étant rationnels}$$

à celle d'une différentielle rationnelle 1° si p est entier, 2° si $\frac{m+1}{n}$ est entier; 3° si $\frac{m+1}{n} + p$ est entier.

8. — Si f est un polynôme de degré n , il est possible de trouver un polynôme φ et une constante k tels que

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \varphi(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + k \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Application. — Calculer $\int \frac{x^3 + 7x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x^2 + 5x + 4}} dx.$

9*. — Déterminer a de façon que l'équation $y^2 = x^4 - 4ax + a^2 + 4$ représente une courbe ayant un point double à distance finie et calculer ensuite

$$\int \sqrt{x^4 - 4ax + a^2 + 4} dx.$$

10. — Calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x+2}; \quad \frac{1}{x + \sqrt{x-1}}; \quad \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}; \quad \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{4a^2 - x^2}};$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}; \quad \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}; \quad \frac{x}{\sqrt{9+4x^4}}; \quad \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}; \\
& \frac{x-1}{x+1} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}; \quad \frac{x^2}{x^2+h+\sqrt{1-x^2}} (h=1, -1, 5); \quad \frac{1}{x\sqrt{x^{10}+x^5+1}}; \\
& \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3-x}-2}; \quad \sqrt[3]{x^2(x-6)}; \quad \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(4-x)}}; \quad \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}}; \\
& \frac{1}{\sin x \sqrt{1-\sin x}}; \quad \frac{1}{\cos x \sqrt{1-\sin x}}; \quad \frac{1+\cos 2x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}; \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 2x+a\cos x+b}}; \\
& \frac{\sin x \sin 2x \sin 4x}{\sqrt{\cos 2x}}; \quad \frac{1}{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{ch} 2x}}; \quad \sqrt{1+\operatorname{th} x+\operatorname{th}^2 x}; \quad \frac{1}{\sqrt{4-(e^x+1)^2}}
\end{aligned}$$

11. — Calculer les primitives des fonctions :

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{\cos^2 x}; \quad \frac{x(2+\cos x)}{\sin^2 x}; \quad \frac{x^4}{x^3+1} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{Arc} \sin \sqrt[4]{x-1}; \quad \operatorname{Log} \left(\sqrt[4]{x-1} \right); \\
& \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arc} \sin x; \quad \frac{x^2}{(\cos x+x \sin x)^2}; \quad \frac{x^3 \operatorname{Log} x}{(x^4+3)\sqrt{x^4-3}-(x^4-3)\sqrt{x^4+3}}; \quad x e^x \sin x; \\
& \frac{1+x+x^2}{1+x^2} e^{\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x}; \quad \frac{\sin ax + \cos bx}{e^{2x}}; \quad \operatorname{ch}^2 x \cos^2 x; \quad x(\operatorname{Arc} \sin x)^2; \quad x^2 \sin x \cos^2 x.
\end{aligned}$$

CHAPITRE XV

CALCUL PRATIQUE DES INTÉGRALES SIMPLES

I. MÉTHODES DE CALCUL

178. Formule fondamentale. — 1° **Rappel.** — Nous avons montré, au n° 92, que si F est une primitive quelconque de la fonction f , continue sur le segment $[a, b]$,

$$(1) \quad \boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).}$$

Cette formule capitale ramène le calcul des intégrales simples à celui des fonctions primitives, ou des intégrales indéfinies. On convient d'écrire

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

ce qu'on énonce : $F(x)$ pris entre a et b ; avec cette convention, la formule précédente prend la forme

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

REMARQUE. — La formule (1) rapproche le théorème de la moyenne du théorème des accroissements finis; en effet $\int_a^b f(x) dx$ est aussi $(b - a)f(c)$, $c \in]a, b[$, et la formule $F(b) - F(a) = (b - a)f(c)$ ne diffère pas de la formule des accroissements finis pour la fonction F .

2° Observations diverses sur le calcul des intégrales simples. — 1° La formule fondamentale n'est valable que si F est définie et continue sur $[a, b]$, car sa démonstration repose sur une conséquence de la formule des accroissements finis : si deux fonctions continues ont même dérivée sur un segment, elles ne diffèrent que d'une constante sur ce segment. Il faut donc s'assurer dans les applications que la primitive utilisée F de la fonction f est bien définie et continue sur $[a, b]$. S'il n'en est pas ainsi, ce qui peut arriver en particulier si F est une fonction circulaire réciproque, on partage le segment d'intégration en segments partiels sur lesquels F est continue.

Par exemple, soit à calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}$. Une primitive de $\frac{1}{1 + 2 \sin^2 x}$ est $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tg}(\sqrt{3} \text{tg} x)$; on ne peut appliquer directement la formule fondamentale à cette primitive $F(x)$ qui est discontinue pour $x = \frac{\pi}{2}$ et pour $x = \frac{3\pi}{2}$.

On écrit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}$$

Or $\Phi(X) = \int_0^X \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}$ est une fonction continue de X .

Si $X \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\Phi(X) = F(X) - F(0)$

et
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x} = \lim_{X \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \Phi(X) = F\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - F(0).$$

En raisonnant de même pour les autres intervalles,

$$I = \left[F\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - F(0) \right] + \left[F\left(\frac{3\pi}{2}-0\right) - F\left(\frac{\pi}{2}+0\right) \right] + \left[F(2\pi) - F\left(\frac{3\pi}{2}+0\right) \right]$$

$$I = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} - 0 \right] + \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} \right) \right] + \left[0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Finalement
$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

3° Changement de variable. — La fonction f étant donnée, nous savons que, sur tout intervalle I où cette fonction est continue, elle admet une primitive F . Soient a et b deux points d'un tel intervalle. Nous savons que

$$\int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Soit φ une fonction continue ayant une dérivée elle-même continue sur le segment $[\alpha, \beta]$ tel que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$. Si dans $F(x)$ on remplace x par $\varphi(t)$ on forme une fonction $G(t) = F[\varphi(t)]$. Cette fonction $G(t)$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ sous la réserve que $t \in [\alpha, \beta]$ entraîne $x = \varphi(t) \in I$ (cf. fig. 62) en sorte que

$$G'(t) = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t).$$

On en déduit :

$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Or $G(\beta) - G(\alpha) = F(b) - F(a),$
par suite
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

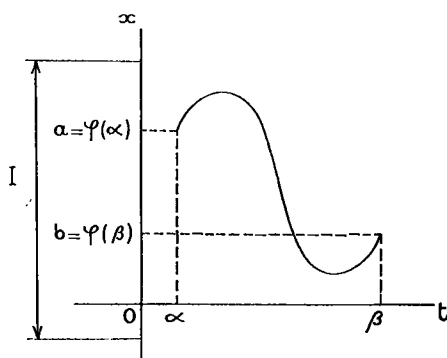


FIG. 62.

Cette formule permet de calculer l'intégrale simple qui est au premier membre sans qu'il soit même nécessaire de former effectivement $F(x)$. Ceci suppose seulement que sur le segment $[\alpha, \beta]$ la fonction $\varphi(l)$ admet une dérivée continue et que pour les valeurs correspondantes de x , $f(x)$ reste continue.

EXEMPLE. — Soit à calculer $I = \int_{-1}^{+1} x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

Faisons le changement de variable $x = \sin \varphi$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$); nous pouvons écrire

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{8} \left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

4° **Intégration par parties.** u et v étant deux fonctions de x admettant sur le segment $[a, b]$ des dérivées continues, nous avons déjà écrit :

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Intégrons entre a et b ,

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx;$$

nous condenserons ce résultat sous la forme

$$\int_a^b u dv = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b v du.$$

EXEMPLES. — Soit à calculer

$$I = \int_0^\pi t \cos pt dt \quad (p \text{ entier}).$$

L'élément différentiel s'écrit $t \cdot d\left(\frac{\sin pt}{p}\right)$

$$\text{d'où} \quad I = \left[t \cdot \frac{\sin pt}{p} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin pt}{p} dt = \left[\frac{\cos pt}{p^2} \right]_0^\pi = \frac{1}{p^2} \cdot [(-1)^p - 1]$$

si p est pair, soit $p = 2q$, $I = 0$

si p est impair, soit $p = 2q + 1$, $I = \frac{-2}{(2q+1)^2}$.

On trouverait de même, p étant entier,

$$J = \int_0^\pi t \sin pt dt = (-1)^{p+1} \frac{\pi}{p}.$$

179. **Exemples de calcul d'une valeur moyenne.** — 1° Les nombres a et b étant positifs, soit à chercher la limite de la suite de terme général

$$\sigma_n = \frac{1}{na+b} + \frac{1}{na+2b} + \dots + \frac{1}{na+nb}.$$

$$\text{On écrit} \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1}{a + \frac{b}{n}} + \frac{1}{a + b\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{a + b\frac{n}{n}} \right]$$

$\frac{1}{a + b\frac{i}{n}}$ est la valeur prise par la fonction $f(x) = \frac{1}{a + bx}$, au point $x = \frac{i}{n}$,

i -ième point de partage du segment $[0, 1]$ en n parties égales. σ_n est une somme σ étudiée dans la théorie de l'intégrale simple, où l'on a pris comme valeurs de la fonction celles qui sont obtenues aux bornes supérieures des sous-segments envisagés; donc σ_n tend vers l'intégrale simple

$$\int_0^1 \frac{dx}{a + bx} = \left[\frac{1}{b} \text{Log}(a + bx) \right]_0^1 = \frac{1}{b} \text{Log} \frac{a + b}{a}.$$

En particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \text{Log } 2.$$

2° Rechercher la valeur moyenne d'une fonction d'origine géométrique, comme l'ordonnée ou le rayon vecteur d'un point d'une courbe, est un problème qui n'a de sens que si on indique la variable dont est fonction la quantité étudiée, la notion de fonction impliquant une correspondance entre deux variables. Prenons comme exemple la valeur moyenne de l'ordonnée d'un point M du quart du cercle (O, R) situé dans le premier quadrant des axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy. Si l'on suppose que cette ordonnée est fonction de l'abscisse x de M, on doit chercher la valeur moyenne de la fonction $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ sur $[0, R]$, ce qui donne $\frac{1}{R} \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ et, en remarquant que l'intégrale mesure l'aire du quart de cercle, $\frac{\pi R}{4}$. Si l'on suppose que l'ordonnée de M est fonction de l'angle polaire θ de ce point on doit chercher la valeur moyenne de la fonction $y = R \sin \theta$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui donne $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} R$, nombre différent du premier.

180. Emploi d'une formule de récurrence pour le calcul d'une intégrale simple. — Lorsqu'une intégrale simple dépend d'un entier n , son calcul peut être facilité par l'emploi d'une formule de récurrence; une telle formule peut être établie au moyen d'une intégration par parties.

EXEMPLE I. — Soit à calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

L'élément différentiel peut s'écrire

$$\cos^{n-1} x \cdot d(\sin x)$$

et une intégration par parties donne

$$I_n = \left[\cos^{n-1} x \cdot \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x \cdot dx.$$

La première partie du second membre est nulle. En remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ dans l'intégrale placée au second membre, on reconnaît qu'elle est égale à $I_{n-2} - I_n$. Nous obtenons ainsi la formule de récurrence

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

Si n est pair, soit $n = 2k$, nous écrivons successivement

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} \\ I_{2k-2} &= \frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} \\ &\dots \\ I_2 &= \frac{1}{2} I_0 \end{aligned}$$

Or $I_0 = \int_0^{\pi} dx = \frac{\pi}{2}$; donc

$$I_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} \frac{\pi}{2}.$$

Si n est impair, soit $n = 2k+1$, nous écrivons successivement

$$\begin{aligned} I_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} \\ I_{2k-1} &= \frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} \\ &\dots \\ I_3 &= \frac{2}{3} I_1 \end{aligned}$$

Or $I_1 = \int_0^{\pi} \cos x dx = 1$; donc

$$I_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \dots 2k}{1 \cdot 3 \dots (2k+1)}.$$

L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ est égale à la précédente, comme on le reconnaît soit en faisant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - y$, soit en se reportant à l'interprétation géométrique des intégrales.

REMARQUE. — Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin^2 k x > \sin^{2k+1} x > \sin^{2k+2} x$,

et par suite

$$I_{2k} > I_{2k+1} > I_{2k+2}$$

et

$$1 > \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} > \frac{I_{2k+2}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Il en résulte que si $p \rightarrow +\infty$, $\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} \rightarrow 1$,

d'où l'on déduit la formule de Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(2 \cdot 4 \dots 2k)^2}{[1 \cdot 3 \dots (2k-1)]^2 (2k+1)}$$

EXEMPLE II. — Soit à calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$.

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \frac{\sin x \cdot \cos 2nx}{\sin x} dx = 2 \left[\frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$I_n = I_{n-1} = \dots = I_1 = I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Le même procédé appliqué à $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$

$$\text{donne } J_n - J_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \frac{\sin x \cdot \cos(2n-1)x}{\sin x} dx = 2 \left[\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-1)^{n-1} \frac{2}{2n-1}.$$

En ajoutant membre à membre les égalités ainsi obtenues jusqu'à

$$J_1 - J_0 = -\frac{2}{3} + J_1 \quad \text{avec} \quad J_1 = 2,$$

on obtient finalement

$$J_n = 2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right].$$

181. Encadrement d'une intégrale simple. — On demande de trouver, si elle existe, la limite, pour n infini, de l'intégrale

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sqrt[n]{\sin x} dx.$$

$\sin x$ étant au plus égal à 1,

$$\sqrt[n+1]{\sin x} > \sqrt[n]{\sin x} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

et par suite $K_{n+1} > K_n$.

D'autre part $\sqrt[n]{\sin x} < 1$

et par suite $K_n < \frac{\pi}{2}$.

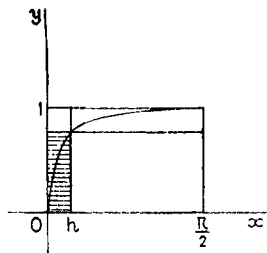


FIG. 63.

La suite $\{K_n\}$ étant croissante et majorée admet une limite.

La forme de la courbe représentative (fig. 63) amène à fractionner le segment d'intégration par une valeur h assez voisine de zéro.

$$\text{Posons } A = \int_0^h \sqrt[n]{\sin x} dx \quad \text{et} \quad B = \int_h^{\frac{\pi}{2n}} \sqrt[n]{\sin x} dx; \quad K_n = A + B.$$

En utilisant les valeurs de $\sqrt[n]{\sin x}$ aux bornes des segments d'intégration

$$A < h \sqrt[n]{\sin h} \quad \left(\frac{\pi}{2} - h\right) \sqrt[n]{\sin h} < B < \frac{\pi}{2} - h.$$

Peut-on choisir h fonction de n , tendant vers zéro pour n infini, de façon que $(\sin h)^{\frac{1}{n}}$ tende vers 1?

$$\text{Log}(\sin h)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \text{Log} \sin h \sim \frac{\text{Log} h}{n};$$

Il suffit de choisir $h = \frac{1}{n}$ pour que $\text{Log} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ tende vers zéro. Dans ces conditions $A \rightarrow 0$, $B \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et K_n a pour limite $\frac{\pi}{2}$.

II. EXTENSIONS DE LA NOTION D'INTÉGRALE SIMPLE

Dans l'étude de l'intégrale simple $\int_a^b f(x) dx$ nous avons supposé jusqu'ici que les limites du segment d'intégration $[a, b]$ sont finies, et que la fonction f est continue sur ce segment. Nous allons étendre ces conditions.

182. Intégrale d'une fonction dans un intervalle dont une borne est infinie. — 1^o DÉFINITION. f étant une fonction continue sur $[a, +\infty[$, si $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie I quand $x \rightarrow +\infty$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ existe, sa valeur étant I . On dit aussi que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

Si $F(x)$ n'admet pas de limite finie on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

REMARQUE I. — Sous réserve de continuité, la nature de l'intégrale ne dépend pas de a . En effet $\int_{a'}^x - \int_a^{a'} = \int_{a'}^a f(t) dt$ est une constante.

REMARQUE II. k étant une constante autre que 0, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} kf(t) dt$ sont de même nature.

EXEMPLE. — Soit à étudier la convergence de $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ ($\alpha > 0$; $a > 0$)⁽¹⁾.

Si $\alpha \neq 1$, $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \left[\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right] = \frac{1}{1 - \alpha} [x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}]$.

Si $\alpha > 1$, la première expression montre que $F(x) \rightarrow \frac{1}{(\alpha - 1)a^{\alpha-1}}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Si $\alpha < 1$, la seconde expression montre que $F(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Enfin, si $\alpha = 1$, $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t} = \text{Log} \frac{x}{a} \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

En résumé, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ n'est convergente que si $\alpha > 1$, et l'on écrit, pour $\alpha > 1$, $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)a^{\alpha-1}}$.

Le résultat précédent peut s'interpréter géométriquement. Le graphe de la

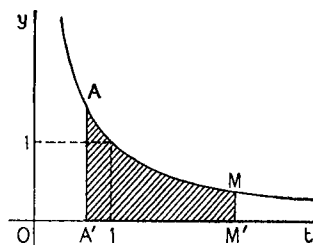


FIG. 64.

fonction $y = \frac{1}{t^\alpha}$ étant tracé (fig. 64), l'intégrale $\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}$ est l'aire comprise entre cette courbe et l'axe Ox d'une part, entre les ordonnées A'A et M'M des points qui ont pour abscisses respectives a et x d'autre part. Lorsque M s'éloigne indéfiniment, cette aire a une limite finie dans le cas où α est plus grand que 1; cette aire devient infinie lorsque α est inférieur ou égal à 1.

On voit ainsi qu'un domaine dont une dimension est infinie peut néanmoins avoir une aire finie.

2° Critère de convergence dans le cas d'une fonction f positive ou nulle sur $[a, +\infty[$. — a) Par $[a, +\infty[$, il faut entendre (remarque I du 1°) pour des valeurs assez grandes de la variable. Par ailleurs l'étude sera valable dans le cas d'une fonction négative ou nulle (remarque II du 1°).

Si $f(t)$ est positive sur $[a, +\infty[$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est croissante, donc (58, 3°) a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ si et seulement si $F(x)$ est majorée. Par ailleurs, en cas de divergence, $F(x) \rightarrow +\infty$. Énonçons :

THÉORÈME. — Si $f(t) > 0$, une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente est que la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ soit majorée.

(1) On voit immédiatement que l'intégrale n'existe pas si $\alpha \leq 0$

b) Nous allons appliquer ce résultat à la comparaison des intégrales généralisées, lorsqu'elles concernent des fonctions positives ou nulles.

THÉORÈME. Si, pour $t \geq a$, on a $0 \leq f(t) \leq g(t)$,

[α] la convergence de $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ entraîne celle de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$

[β] la divergence de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ entraîne celle de $\int_a^{+\infty} g(t) dt$.

En effet, pour tout $x > a$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est au plus égal à

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt :$$

$$F(x) \leq G(x).$$

[α] $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge $\implies G(x)$ borné

ce qui entraîne $F(x)$ borné $\implies \int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge,

[β] $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge $\implies F(x) \rightarrow +\infty$

ce qui entraîne $G(x) \rightarrow +\infty \implies \int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

c) **COROLLAIRE I.** — Supposons que $f(t) \rightarrow L > 0$ quant $t \rightarrow +\infty$; c'est donc qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre c tel que

$$t \geq c \implies L - \varepsilon < f(t) < L + \varepsilon.$$

En choisissant $\varepsilon < L$,

$$\int_c^x (L - \varepsilon) dt = (L - \varepsilon)(x - c) < \int_c^x f(t) dt,$$

et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

Le résultat est analogue si $f(t) \rightarrow L < 0$ quant $t \rightarrow +\infty$. En définitive, si $f(t)$ tend vers une limite quand $t \rightarrow +\infty$, il est nécessaire que cette limite soit nulle pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente.

d) **COROLLAIRE II.** — Supposons que $f(t)$ et $g(t)$ soient deux fonctions positives, et équivalentes pour $t \rightarrow +\infty$.

Par hypothèse $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$.

Il existe par suite un nombre fixe a tel que

$$t \geq a \implies \frac{1}{2} < \frac{f(t)}{g(t)} < \frac{3}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}g(t) < f(t) < \frac{3}{2}g(t).$$

Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, il en est de même pour $\int_a^{+\infty} \frac{3}{2}g(t) dt$,

donc pour $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge, il en est de même pour $\int_a^{+\infty} \frac{1}{2} g(t) dt$,
donc pour $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.

On arriverait à un résultat analogue si les fonctions équivalentes $f(t)$ et $g(t)$ étaient toutes deux négatives.

En résumé, nous énonçons :

Si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions de signe fixe, équivalentes pour $t \rightarrow +\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ sont de même nature.

3^e Application. — En tenant compte du résultat précédent et de la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, étudiée précédemment, on énonce :

THÉORÈME. — Si $f(t) \sim \frac{A}{t^\alpha}$, A étant une constante, quand $t \rightarrow +\infty$, l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \left\{ \begin{array}{l} \text{converge si } \alpha > 1 \\ \text{diverge si } \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

4^e COMPLÉMENT. — Nous avons vu que, si $f(t) \rightarrow l$ quand $t \rightarrow +\infty$, l'intégrale ne peut converger que si $l = 0$. Il peut cependant arriver que l'intégrale converge alors que $f(t)$ n'admet pas de limite, et même n'est pas borné, quand $t \rightarrow +\infty$.

EXEMPLE : (fig. 65). Voir aussi l'exercice 13, p. 373.

A_n et B_n sont les points de Ot d'abscisses $n - \frac{1}{2^n}$ et $n + \frac{1}{2^n}$; C_n est le point d'abscisse n et d'ordonnée 1. Une fonction f est représentée par la ligne brisée $OA_1C_1B_1A_2C_2B_2 \dots B_{n-1}A_nC_nB_n \dots$. Cette fonction est visiblement continue. Elle est bornée car $0 \leq f(t) \leq 1$, mais $f(t)$ n'admet pas de limite quand $t \rightarrow +\infty$. Pourtant $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. En effet,

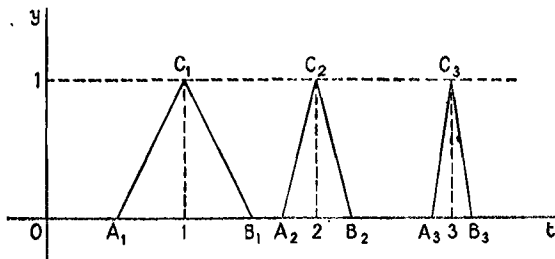


FIG. 65.

$\mathfrak{J}_n$ désignant $\left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right]$ on a $u_n = \int_{\mathfrak{J}_n} f(t) dt = \frac{1}{2^n}$, puis, f prenant la valeur 0 à l'extérieur des $\mathfrak{J}_n$:

$$\int_0^{n + \frac{1}{2^n}} f(t) dt = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Cette quantité tend vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$. On a donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.

5° REMARQUE. — Si l'on est amené à décomposer une intégrale convergente en une somme d'intégrales, il y a lieu de s'assurer que chacune d'elles converge.

Par exemple $I = \int_2^{+\infty} \frac{2 dt}{t^2 - 1}$ converge car $\frac{2}{t^2 - 1} \sim \frac{2}{t^2}$.

On écrira $I = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[\text{Log} \frac{t-1}{t+1} \right]_2^{+\infty} = \text{Log} 3$, mais on n'écrira pas

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t-1} - \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t+1},$$

les deux dernières intégrales étant divergentes.

6° Intégrales absolument convergentes. — THÉORÈME ET DÉFINITION.

— Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ est convergente, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ l'est aussi; on dit alors que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente.

Nous utiliserons les fonctions positives f^+ et f^- définies par

$$f^+(t) = \sup [f(t), 0] \quad \text{et} \quad f^-(t) = \sup [-f(t), 0].$$

On a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

Les fonctions positives f^+ et f^- étant majorées par $|f|$ dont l'intégrale converge par hypothèse, leurs intégrales convergent. En se rapportant à la définition de la convergence par une limite on constate qu'il en est de même de l'intégrale de leur différence f .

EXEMPLE : $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$ ($\alpha > 0$) est absolument convergente pour $\alpha > 1$, car

$$\left| \frac{\sin t}{t^{\alpha}} \right| \leq \frac{1}{t^{\alpha}}.$$

7° Cas de l'intervalle $] -\infty, a]$. — Si la fonction f est continue sur $] -\infty, a]$ et si $\Phi(x) = \int_x^a f(t) dt$ admet une limite quand $x \rightarrow -\infty$ on désigne cette limite par le symbole $\int_{-\infty}^a f(t) dt$. On dit que l'intégrale converge.

En posant $t = -T$ on est ramené au cas précédent.

Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ convergent séparément, et dans ce cas seulement, nous introduirons le symbole $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ pour désigner leur somme.

Par exemple $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$; $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$.

Notons qu'il ne suffit pas que $\int_{-x}^{+x} f(t) dt$ admette une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ pour que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existe. On s'en assurera en prenant par exem-

ple $f(t) = t$. En revanche si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existe on peut la calculer comme limite de $\int_{-x}^{+x} f(t) dt$ quand $x \rightarrow +\infty$.

183. Intégrale d'une fonction qui devient infinie pour une des bornes de l'intervalle d'intégration. — 1^o DÉFINITION. — Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$; si $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ admet une limite I quand x tend vers b sur $[a, b[$, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ existe, sa valeur étant I . On dit aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

Si $F(x)$ n'admet pas de limite finie, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

EXEMPLE. — Soit à étudier la convergence de $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ ($\alpha > 0$; $a < b$).

Si $\alpha \neq 1$, $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \left[\frac{(b-t)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \right]_a^x$.

Si $\alpha > 1$, $F(x) = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \left[\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right] \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow b-0$.

Si $\alpha < 1$, $F(x) = \frac{1}{\alpha-1} \cdot [(b-x)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}] \rightarrow \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ quand $x \rightarrow b-0$.

Enfin si $\alpha = 1$, $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-t} = \text{Log} \frac{b-a}{b-x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow b-0$.

En résumé, l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ n'est convergente que si $\alpha < 1$, et l'on écrit,

$$\text{pour } \alpha < 1, \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Ce résultat peut s'interpréter géométriquement. Traçons le graphe de la fonction $\frac{1}{(b-t)^\alpha}$; il est asymptote à la droite $\Delta (t = b)$ (fig. 66).

L'intégrale $\int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ est l'aire comprise entre cette courbe et l'axe Ot d'une part, entre les ordonnées $A'A$ et $M'M$ des points d'abscisses a et x d'autre part. Lorsque x tend vers b , cette aire a une limite finie si $\alpha < 1$;

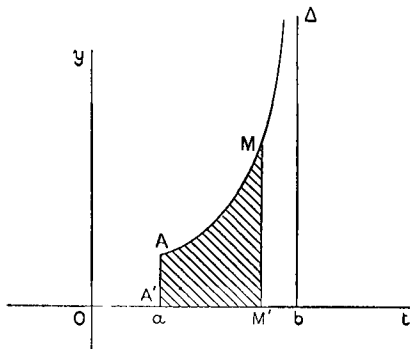


FIG. 66.

elle devient infinie dans le cas contraire.

2^o Critère de convergence dans le cas d'une fonction $f(t)$ tendant vers $+\infty$ lorsque t tend vers $b-0$. — Il existe alors un point c de $[a, b[$ tel que

$$t \geq c \implies f(t) > 0.$$

On peut appliquer à l'étude de la convergence de $\int_c^b f(t)dt$ les mêmes raisonnements que précédemment (182). Nous nous bornerons à énoncer les résultats, en supposant la fonction positive sur l'intervalle étudié.

THÉORÈME I. — Si $f(t) > 0$, une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente est que la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{soit majorée} \quad (a \leq x < b).$$

THÉORÈME II. — Si, sur $[a, b[$, on a $0 \leq f(t) \leq g(t)$

α) la convergence de $\int_a^b g(t)dt$ entraîne celle de $\int_a^b f(t)dt$,

β) la divergence de $\int_a^b f(t)dt$ entraîne celle de $\int_a^b g(t)dt$.

COROLLAIRE. — Les intégrales de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, de signes fixes, et équivalentes quand $t \rightarrow b - 0$, sont de même nature.

APPLICATION. — En tenant compte du résultat précédent et de la convergence de l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$, on peut énoncer :

THÉORÈME. — Si $f(t) \sim \frac{A}{(b-t)^\alpha}$ quand $t \rightarrow b - 0$, A étant une constante,

$$\text{l'intégrale } \int_a^b f(t)dt \begin{cases} \text{converge si} & \alpha < 1 \\ \text{diverge si} & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

3° Convergence absolue. — La convergence de $\int_a^b |f(t)|dt$ entraîne celle de $\int_a^b f(t)dt$. La démonstration donnée ci-dessus (182, 6°) s'applique.

4° Généralisation. — Le cas où le point de discontinuité de la fonction f est l'extrémité inférieure de l'intervalle d'intégration se ramène au précédent par $\int_u^v = - \int_v^u$

Enfin, en cas de discontinuité aux deux bornes, si, c étant un point quelconque de $]a, b[$, $\int_c^b f(t)dt$ et $\int_a^c f(t)dt$ convergent séparément, et dans ce cas seulement, nous introduirons le symbole $\int_a^b f(t)dt$ pour désigner leur somme.

EXEMPLE. — L'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ a un sens, car

$$\begin{array}{ll} \text{si} & t \rightarrow 1 - 0, \quad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} \\ \text{et si} & t \rightarrow -1 + 0, \quad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}}. \end{array}$$

D'ailleurs
$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\text{Arc sin } t \right]_{-1}^{+1} = \pi.$$

L'intégrale $\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(b-z)}}$ a la même valeur π , comme le montre le changement de variable $z = \frac{b+a}{2} + t \cdot \frac{b-a}{2}$.

184. Changement de variable et intégration par parties dans les intégrales généralisées. — 1° Un changement de variable permet de transformer une intégrale étendue à une demi-droite en une intégrale relative à un segment; mais ce changement de variable doit être fait avec prudence, c'est-à-dire qu'il conviendra de le faire dans une intégrale simple relative à un segment fini, et d'étudier seulement ensuite ce qui se passe lorsqu'une borne de ce segment devient infinie.

EXEMPLE I. — L'intégrale $\int_0^1 \sin \frac{1}{t} \cdot dt$ est-elle convergente?

Posons $F(x) = \int_x^1 \sin \frac{1}{t} dt$ ($0 < x < 1$) et faisons le changement de variable $t = \frac{1}{u}$;

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^1 \sin u \cdot \frac{du}{u^2} \quad \text{ou} \quad \int_1^x \frac{\sin u}{u^2} du \quad \left(X = \frac{1}{x} \right).$$

Or $\left| \frac{\sin u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$; l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$ est convergente, donc aussi l'intégrale proposée.

EXEMPLE II. — Désignons par φ une fonction continue sur $[a, b]$ et strictement positive.

L'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{b-t} \varphi(t)}$ est-elle convergente? ($a < b$).

Dans $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{b-t} \varphi(t)}$, où $x \in [a, b]$, posons $u = \sqrt{b-t}$.

On a
$$t = b - u^2, \quad dt = -2u du \quad \text{et}$$

$$F(x) = 2 \int_{\sqrt{b-x}}^{\sqrt{b-a}} \frac{du}{\varphi(b-u^2)}.$$

Quand $x \rightarrow b-0$, $\sqrt{b-x} \rightarrow 0$, $F(x) \rightarrow 1 = 2 \int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{du}{\varphi(b-u^2)}$. L'intégrale étudiée converge et sa valeur est 1.

La convergence de l'intégrale résulte aussi d'un critère général, $\frac{1}{\sqrt{b-t} \varphi(t)}$ étant un infiniment grand d'ordre $\frac{1}{2}$ lorsque t vers b .

2° L'intégration par parties doit être faite avec prudence dans les intégrales généralisées; on n'appliquera pas la formule d'intégration par parties directement sur l'intégrale proposée mais, conformément à la définition, sur l'intégrale simple dont la limite est égale à l'intégrale généralisée.

EXEMPLE I. — Nous savons que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ est absolument convergente.

Posons
$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_0^x \sin^2 t d\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$F(x) = \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{\sin 2t}{t} dt$$

ou, avec le changement de variable $u = 2t$,

$$F(x) = -\frac{\sin^2 x}{x} + \int_0^{2x} \frac{\sin u}{u} du.$$

$$G(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin u}{u} du = F(x) + \frac{\sin^2 x}{x} \rightarrow I \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

Il en résulte que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ est convergente.

Nous verrons plus loin (205) qu'elle n'est pas absolument convergente.

EXEMPLE II. — L'intégrale $I = \int_0^a \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ ($a > 0$) est absolument convergente car

$$|\sin t| < t \Rightarrow \left| \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \right| < \frac{1}{\sqrt{t}}; \quad t \in]0, a].$$

Ppous
$$F(x) = \int_x^a \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt = -2 \int_x^a \sin t d\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = -2 \left[\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right]_x^a + 2 \int_x^a \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Il en résulte

$$I = -2 \frac{\sin a}{\sqrt{a}} + 2 \int_0^a \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Mais en écrivant

$$F(x) = \int_x^a \frac{d(\cos t)}{t^{\frac{3}{2}}} = - \left[\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}} \right]_x^a - \frac{3}{2} \int_x^a \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt,$$

on ne peut pas faire tendre x vers zéro, les deux parties du second membre devenant infinies.

REMARQUE. — La même prudence est à observer quand des intégrales généralisées apparaissent en cours de calcul.

EXEMPLE. — Soit à calculer $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1-t^2}}$ (Intégrale dont l'existence ne fait aucun doute).

Comme $\frac{1}{\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}}{2t^2}$ on serait tenté d'écrire

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{2t^2} dt - \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2t^2} dt$$

ce qui est incorrect car nous introduisons deux intégrales généralisées qui divergent. Nous reviendrons à la définition et calculerons donc :

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{2t^2} dt - \int_x^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2t^2} dt, \quad x \in]0, 1],$$

et nous utiliserons

$$I = \lim_{x \rightarrow +0} F(x).$$

On a, par intégrations par parties,

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2t} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2t} \sqrt{1-t^2} \right]_x^1 + \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$F(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \text{Log}(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \text{Log}(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{Arc sin } x$$

ou en déduit

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \text{Log}(1+\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}.$$

EXERCICES

1. — Calculer les intégrales simples :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+\sin^2 x)^2}; \quad \int_0^{\pi} \frac{\text{sha} + \text{cha} \cos x}{(\text{cha} + \text{sha} \cos x)^2}; \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{2 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}};$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{x + \text{ch } t} \text{ (vérifier que l'intégrale est une fonction de } x \text{ continue pour } x=1);$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1-x^2 \sin^2 t}; \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)(b+\cos x)}; \quad \int_0^1 e^{\text{Arc sin } x} dx; \quad \int_{-1}^{+2} \text{Arc tg } \frac{x+1}{x-2} \cdot dx.$$

2. — Existence et calcul des intégrales simples :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)^n}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^n};$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \text{Log } x}{(x^2+1)^2} dx; \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+10)\sqrt{x^2+16}}.$$

3. — Existence et calcul des intégrales simples :

$$\int_a^b \frac{x^p dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b; p \text{ entier naturel})$$

$$\int_{-1}^{+1} x^p \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad (p \text{ entier naturel}); \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}; \quad \int_{-1}^{+1} \frac{x^4 dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{-x^4+3x^2-2}}; \quad \int_{-1}^{+1} \text{Log} \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x \cdot \text{Log } \text{tg } x \cdot dx.$$

4. — Étudier si les intégrales suivantes ont un sens :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+e^x)}}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{tg } x} dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x} dx \quad (a > 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l).$$

5. — Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} d\varphi$ et $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi$.

6. — Donner une méthode pour calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x R(\sin x, \cos x) dx$$

$R(u, v)$ étant une fonction symétrique rationnelle. (On se servira du changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$). Appliquer la méthode au calcul des intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\operatorname{tg}^2 x + \cot^2 x} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

7. — Existence et calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log}(\sin x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log}(\cos x) dx.$$

(On observera que $I = J = \frac{I+J}{2}$).

8*. — Calcul de $I = \int_0^{\pi} \operatorname{Log}(1 - 2a \cos x + a^2) dx$.

On utilisera $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \operatorname{Log} \prod_{k=1}^n (1 - 2a \cos \frac{k\pi}{n} + a^2)$.

9. — Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2} \operatorname{Log}(1 - x^2) dx$

(on explicitera $F(X) = \int_0^X \frac{1}{x^2} \operatorname{Log}(1 - x^2) dx$).

10*. — Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\operatorname{Log} x} dx$.

11. — Trouver la limite de la suite dont le terme général est :

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots 2n}; \quad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sin \frac{k\pi}{n};$$

$$\sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}; \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{k^2 n^2 + n^4}}; \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}};$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} E(\sqrt{k}), \quad E(x) \text{ désignant l'entier naturel le plus voisin de } x.$$

12. — Trouver si les expressions suivantes ont une limite :

$$(\operatorname{Log} a) \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t} \operatorname{Log} t} \quad (a \rightarrow +0)$$

$$\int_1^a \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(a-t)}} \quad (a \rightarrow 1+0); \quad \int_0^a \sqrt{\frac{x^2+1}{x(a-x)}} dx \quad (a \rightarrow +0)$$

$$\int_{a^2+2a}^a \operatorname{Log}(1+t) dt \quad (a \rightarrow -1+0);$$

$$\alpha x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t) dt}{t^{\alpha+1}} \quad (\alpha > 0; \quad f(t) \text{ continue sur } [0, 1]; \quad x \rightarrow +0).$$

13. — On adopte les notations de l'exemple du n° 182, 4° en remplaçant le point C_n par le point $D_n(n, n)$, la fonction f par la fonction g représentée par la ligne brisée $OA_1 D_1 B_1 A_2 D_2 B_2 \dots$ et u_n par $v_n = \frac{n}{2^n}$; $g(t)$ n'est pas bornée quand t devient infini. Montrer que pourtant l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et a pour valeur la somme de la série $\{u_n\}$.

CHAPITRE XVI

SÉRIES NUMÉRIQUES

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES

185. *Problème fondamental de la théorie des séries.*

1° DÉFINITION. — Étant donnée une suite à termes réels ou complexes,

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n, \dots$$

étudier la série

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

c'est chercher si la somme

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

tend vers une limite quand n devient infini, autrement dit c'est étudier la suite $\{S_n\}$.

Le terme u_n de rang n , quelconque, est appelé *terme général* de la série; la série (1), de terme général u_n , sera désignée, dans la pratique, sous le nom de « série (u_n) ».

Convergence et divergence. — DÉFINITIONS. — a) On dit que la série (u_n) est convergente si la somme S_n de ses n premiers termes tend vers une limite S quand n devient infini. En outre, on dit dans cette hypothèse que cette limite S est la somme de la série (u_n) et on convient d'écrire

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

b) On dit que la série (u_n) est divergente si S_n ne tend vers aucune limite quand n devient infini.

Avec les définitions précédentes, nous pouvons énoncer : *étudier une série, c'est reconnaître si elle est convergente ou divergente.*

2° **Les deux sortes de divergence.** — Une série peut être divergente

a) soit quand S_n devient infini avec n , c'est le cas de la série

$$a + a + \dots + a + \dots \quad (a \neq 0)$$

pour laquelle $S_n = na$;

b) soit quand S_n , tout en restant fini quand n devient infini, ne tend vers aucune limite, ce qui est le cas de la série

$$a - a + a - a + \dots + a - a + \dots$$

pour laquelle la somme S_n est égale à zéro ou à a suivant que n est pair ou impair.

3° L'étude d'une série à termes complexes se ramène à celle de deux séries à termes réels. — Supposons que le terme général de la série soit complexe, soit

$$u_n = a_n + ib_n,$$

a_n et b_n étant réels. La somme S_n des n premiers termes se met sous la forme

$$S_n = A_n + iB_n \quad \begin{cases} A_n = a_1 + \dots + a_n \\ B_n = b_1 + \dots + b_n \end{cases}$$

Pour que S_n tende vers une limite $A + iB$ (155), il faut et il suffit que A_n admette une limite A et que B_n admette une limite B ; en d'autres termes, une série (u_n) à termes complexes est convergente si, et seulement si, les séries qui ont pour termes généraux a_n et b_n , respectivement partie réelle et coefficient de i dans u_n , sont séparément convergentes.

L'étude d'une série à termes complexes $u_n = a_n + ib_n$ se ramène donc à celle des deux séries à termes réels a_n et b_n .

4° Suppression d'un nombre fini de termes. — Soit une série

$$(1) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

et soit

$$(2) \quad u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{p+n} + \dots$$

la série formée en supprimant les p premiers termes de la première. Si S_n désigne la somme des n premiers termes de la série (1) et S'_n la somme des n premiers termes de la série (2)

$$(3) \quad S_{n+p} = S_p + S'_n.$$

a) Si la série (1) est convergente et a pour somme S , S_{n+p} tend vers S quand, p restant fixe, n devient infini et S'_n tend vers $S - S_p$, la série (2) est donc convergente et a pour somme

$$R_p = S - S_p.$$

b) Si la série (2) est convergente et a pour somme R_p , la somme $S_p + S'_n$ ou S_{n+p} tend vers $S_p + R_p$ quand, p restant fixe, n devient infini, la série (1) est convergente.

Il résulte de là que si l'une des séries (1), (2) est divergente, l'autre ne peut être convergente, elle est nécessairement divergente.

En résumé, pour étudier si une série est convergente ou divergente, on peut faire abstraction d'un certain nombre fini et fixe de termes au début de la série

Plus généralement, si l'on supprime dans une série (Σ) un certain nombre, k , de termes, de somme σ , non forcément consécutifs, la série résiduelle (Σ') est de même nature que la série initiale (Σ), car entre les sommes S_n et S'_n des n premiers termes des deux séries existe la relation

$$S_{n+k} = \sigma + S'_n,$$

dès que $n + k$ est supérieur à q , rang du dernier terme supprimé dans (Σ); le raisonnement s'achève comme précédemment.

5° Reste relatif à un terme u_p dans une série convergente. — Soit u_n) une série convergente. D'après le 4°, la série dont les termes sont

$$v_1 = u_{p+1}, \quad v_2 = u_{p+2}, \quad \dots, \quad v_k = u_{p+k}, \quad \dots$$

est convergente.

DÉFINITION. — La somme

$$R_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{p+k} + \dots$$

de la série convergente (u_{p+k}) est appelée le reste de la série (u_n) relatif au terme u_p .

La somme

$$S_p = u_1 + u_2 + \dots + u_p$$

est celle des p premiers termes de la série (u_n); la somme de la série (u_n) est

$$S = S_p + R_p.$$

R_p est l'erreur que l'on commet en substituant à la somme S de la série (u_n) a somme S_p de ses p premiers termes.

186. Condition nécessaire de convergence d'une série. — 1° Soit (u_n) une série convergente, de somme S ; si S_n désigne la somme des n premiers termes

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Or si $n \rightarrow +\infty$, S_n et $S_{n-1} \rightarrow S$, donc $u_n \rightarrow 0$.

Nous énonçons :

THÉORÈME. — Si une série est convergente, son terme général u_n tend vers zéro lorsque n devient infini.

La réciproque de la propriété précédente est inexacte : nous verrons (190) des exemples de séries divergentes pour lesquelles u_n tend vers zéro.

En résumé :

Une condition nécessaire (mais non suffisante) de convergence d'une série est que son terme général tende vers zéro lorsque n devient infini.

APPLICATION PRATIQUE. — Dès que l'on a constaté que le terme général d'une série ne tend pas vers zéro pour n infini, on peut, par l'absurde, affirmer la divergence de la série.

2° Généralisation. — De façon précise, dire que (u_n) est convergente et admet pour somme S c'est dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \quad \text{tel que} \quad n > N \implies |S - S_n| < \varepsilon.$$

Si p et n sont deux entiers supérieurs à N ($p > n$), l'inégalité triangulaire entraîne

$$|S_p - S_n| \leq |S - S_n| + |S - S_p|.$$

En d'autres termes

$$p > n > N \implies |S_p - S_n| < 2\varepsilon$$

c'est-à-dire que $S_p - S_n$ tend vers zéro lorsque p et n deviennent infinis.

Or
$$S_p - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_p$$

est la somme de la tranche des termes de la série (u_n) au-delà du n^e , jusqu'au p^e , et nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — Si une série est convergente, la somme des termes de toute tranche prise à partir du n^e terme tend vers zéro lorsque n devient infini.

3° Condition nécessaire et suffisante de convergence. — Par application à la suite $\{S_n\}$ de la condition de Cauchy signalée au n° 24, 2° on peut énoncer la réciproque de la propriété précédente :

Si une série (u_n) est telle que la somme des termes de toute tranche prise à partir du n^e terme :

$$S_p - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_p$$

tende vers zéro lorsque n devient infini, la série est convergente.

En résumé, une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série est que la somme des termes de toute tranche prise à partir du n -ième terme tende vers zéro pour n devenant infini.

Ce théorème peut être utilisé parfois pour démontrer qu'une série est divergente : par exemple, considérons la série

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

dite « série harmonique » parce qu'un terme quelconque u_n est moyenne harmonique des deux termes qui l'encadrent

$$\frac{2}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n+1}} \iff 2n = (n-1) + (n+1)$$

Posons

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}.$$

$S_{2n} - S_n$ ne tendant pas vers zéro pour n devenant infini, la série harmonique est divergente.

Mais ce théorème n'est pas utilisé dans la pratique pour démontrer la convergence d'une série, car on serait amené à étudier $S_p - S_n$, quels que soient p et n . On préfère utiliser des règles limitées, ne s'appliquant qu'à certaines familles de séries, mais d'un emploi plus commode.

187. Opérations élémentaires sur les séries. — 1° Multiplication par une constante. — Soit a une constante non nulle; les séries (u_n) et (au_n) sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes car S_n étant la somme des n premiers termes de la première, aS_n est la somme des n premiers termes de la seconde; si l'une de ces sommes tend vers une limite il en est de même de l'autre. En outre, si la première série est convergente et a pour somme S , aS est la somme de la seconde.

2° Addition. — Soit deux séries (u_n) et (v_n) , et posons $w_n = u_n + v_n$.

La série (w_n) est dite somme des séries (u_n) et (v_n) . Cherchons sa nature.

Appelant respectivement U_n, V_n, W_n les sommes des n premiers termes des séries $(u_n), (v_n), (w_n)$, on a immédiatement

$$W_n = U_n + V_n.$$

a) Si les séries (u_n) et (v_n) sont convergentes, U_n et V_n tendent respectivement vers des limites U et V , W_n tend vers $U + V$; c'est donc que la série (w_n) est convergente, et sa somme W est telle que

$$W = U + V.$$

b) Si la série (u_n) est convergente et la série (v_n) divergente, la série (w_n) est divergente, sinon en écrivant $v_n = w_n - u_n$ on pourrait conclure à la convergence de (v_n) , en utilisant les résultats de *a)*.

c) Si les séries (u_n) et (v_n) sont divergentes, on ne peut rien en conclure pour la série (w_n) .

3° Généralisation. — Les résultats du 2° peuvent s'appliquer, en tenant compte du 1°, à toute combinaison linéaire à coefficients non nuls

$$w_n = \lambda u_n + \mu v_n$$

des termes généraux de deux séries.

En particulier, l'ensemble des séries convergentes forme un espace vectoriel sur le corps des complexes.

188. Premiers exemples de séries. — 1° Série géométrique. —

DÉFINITION. — On appelle série géométrique la série

$$a + ax + ax^2 + \dots + ax^n + \dots \quad (a \neq 0)$$

dans laquelle chaque terme est le produit du précédent par un nombre fixe x , appelé raison de la série géométrique.

$$S_n = a + ax + \dots + ax^{n-1} \quad \text{ou} \quad S_n = a \frac{1 - x^n}{1 - x} \quad (x \neq 1).$$

Distinguons plusieurs cas :

a) $|x| < 1$. — On sait que $|x^n| = |x|^n$; donc lorsque n devient infini, x^n tend vers zéro, et S_n tend vers

$$S = \frac{a}{1 - x}.$$

La série géométrique est alors convergente, sa somme est $\frac{a}{1-x}$, et nous écrirons

$$\frac{a}{1-x} = a + ax + \dots + ax^n + \dots \quad (|x| < 1).$$

b) $|x| > 1$. On sait que $|x|^n$ devient infini avec n , S_n devient infini, et la série géométrique est divergente.

c) $|x| = 1$. — Appelons α l'argument du nombre complexe x ; soit

$$x = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

si $\alpha = 0, (\text{mod. } 2\pi)$, on a la série $a + a + \dots + a + \dots$, elle est divergente; si $\alpha = \pi, (\text{mod. } 2\pi)$, on a la série $a - a + \dots + a - a + \dots$, elle est divergente; si α est différent de $k\pi$, les images des nombres $x, x^2, \dots, x^n, \dots$ coïncident successivement dans le plan complexe avec les sommets d'une ligne brisée régulière inscrite dans le cercle $(O, 1)$, ligne brisée fermée lorsque α est commensurable avec π ; x^n n'a pas de limite, S_n non plus, la série est divergente.

En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME. — La série géométrique est convergente si, et seulement si, le module de la raison est inférieur à l'unité.

2° Suites et séries. — **THÉORÈME.** — La suite $\{a_n\}$ est convergente si et seulement si la série de terme général

$$u_n = a_n - a_{n+1}$$

est convergente

En effet la somme des n premiers de la série (u_n) est

$$S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

S_n admet, pour n infini, une limite S si, et seulement si, a_{n+1} admet une limite A .

En cas de convergence, la somme S de la série (u_n) est liée à la limite A de la suite $\{a_n\}$ par $S = a_1 - A$.

Première application. — Le théorème précédent peut être utilisé pour ramener l'étude d'une série à celle d'une suite.

EXEMPLES. — a) Si $a_n = \frac{1}{n}$, $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. La série (u_n) est donc convergente et a pour somme 1. On écrira :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1$$

b) Si

$$a_n = \text{Arc tg} \frac{1}{n},$$

$$u_n = \text{Arc tg} \frac{1}{n} - \text{Arc tg} \frac{1}{n+1} = \text{Arc tg} \frac{1}{n^2 + n + 1} \quad (65).$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. La série (u_n) est donc convergente et a pour somme $\text{Arc tg} 1 = \frac{\pi}{4}$. On écrira :

$$\text{Arc tg} \frac{1}{3} + \text{Arc tg} \frac{1}{7} + \dots + \text{Arc tg} \frac{1}{n^2 + n + 1} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Deuxième application. — Quand le lecteur aura à sa disposition des règles d'étude de séries, il pourra utiliser le théorème précédent pour déduire la nature d'une suite de celle d'une série.

II. SÉRIES A TERMES POSITIFS : GÉNÉRALITÉS

189. Condition nécessaire et suffisante de convergence pour une série à termes positifs. — On donne la série

$$(1) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad u_n > 0, \quad \forall n.$$

$$\text{Posons } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n; \\ S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \quad \text{d'où} \quad S_{n+1} > S_n, \quad \forall n.$$

La suite infinie S_n est donc croissante.

1° Ou bien l'ensemble E des S_n est majoré : et alors on sait (n° 31) que S_n a une limite, atteinte par valeurs inférieures; la série (u_n) est convergente.

2° Ou bien l'ensemble E des S_n n'est pas majoré, et on sait qu'alors S_n devient infini (n° 31) la série (u_n) est divergente.

En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME. — Pour qu'une série (u_n) à termes positifs soit convergente, il faut et il suffit que la somme des n premiers termes soit inférieure à un nombre fixe, quel que soit n .

On retiendra aussi qu'il n'existe qu'une sorte de divergence pour une série à termes positifs : la somme S_n des n premiers termes devient nécessairement infinie avec n .

190. Comparaison d'une série à termes positifs et d'une intégrale simple. — 1° **Étude générale.** — Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qu'on suppose être, sur cet intervalle, continue, positive, et décroissante. Soit $u_n = f(n)$ et étudions la série à termes positifs.

$$(1) \quad f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

La décroissance de la fonction f entraîne

$$(2) \quad f(n-1) > f(x) > f(n) \quad \text{pour} \quad n-1 < x < n.$$

Par suite, dans la définition de l'intégrale définie

$$F(n) = \int_1^n f(x) dx,$$

les sommes

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \quad \text{et} \quad f(2) + f(3) + \dots + f(n)$$

sont respectivement des sommes supérieure et inférieure relatives à la subdivision $(1, 2, \dots, n)$ du segment $[1, n]$. D'où, en posant

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

les inégalités

$$(3) \quad S_n - f(1) < \int_1^n f(x) dx < S_{n-1}.$$

L'interprétation géométrique (fig. 67) redonne immédiatement ces résultats en construisant les rectangles qui ont pour hauteurs les ordonnées $M'_1M_1, \dots, M'_nM_n$ des points d'abscisses $1, \dots, n$ de la ligne qui représente

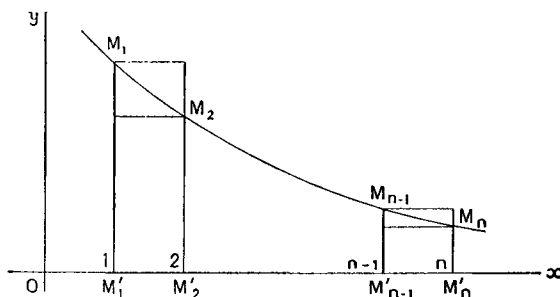


FIG. 67.

$f(x)$, et pour bases des segments égaux à l'unité de longueur, soit à gauche, soit à droite de ces ordonnées.

a) Supposons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ existe — ou encore (182) soit convergente. Alors la fonction $F(X) = \int_1^X f(t) dt$ a une limite H lorsque $X \rightarrow +\infty$; or $F(X)$ est une fonction croissante de X ; elle est donc inférieure à H , en particulier $F(n) < H$, et on peut écrire, d'après (3) :

$$S_n < f(1) + F(n) < f(1) + H.$$

La série (u_n) est à termes positifs; la somme S_n est bornée; il en résulte (189) que la série est convergente; sa somme S est inférieure à $f(1) + H$:

$$(4) \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ convergente} \Rightarrow (u_n) \text{ convergente.}$$

b) Supposons que la série (u_n) soit convergente. S_n tend vers une limite S , et $S_n < S$.

$$\text{D'après (3),} \quad \int_1^n f(x) dx < S, \quad \forall n.$$

Si n est la partie entière de X ,

$$\int_1^X f(x) dx < \int_1^{n+1} f(x) dx < S.$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente, et par suite

$$(5) \quad (u_n) \text{ convergente} \implies \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ convergente.}$$

En résumé, on a une équivalence logique

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ convergente} \iff (u_n = f(n)) \text{ convergente.}$$

Il en résulte, par l'absurde, l'équivalence logique

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ divergente} \iff (u_n = f(n)) \text{ divergente.}$$

En résumé nous énoncerons :

THÉORÈME DE CAUCHY. — Si f est une fonction définie, continue, positive, décroissante sur $]0, +\infty[$, la série

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) +$$

et l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

sont de même nature.

REMARQUE. — Le théorème de Cauchy continue à s'appliquer si la fonction f ne jouit des propriétés de continuité, de signe, de décroissance que sur l'intervalle $[a, +\infty[$; il suffit de négliger les termes de la série obtenus pour les valeurs de l'entier n extérieures à l'intervalle précédent.

2° Exemple fondamental : Série de Riemann. — On appelle série de Riemann la série $(u_n = \frac{1}{n^\alpha})$ où α est un nombre positif donné. La fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive, décroissante sur $]0, +\infty[$. La série de Riemann est donc de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, et par suite (182) :

THÉORÈME. — La série $(\frac{1}{n^\alpha})$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{convergente pour } \alpha > 1, \\ \text{divergente pour } 0 < \alpha \leq 1. \end{array} \right.$

La divergence de la série $(\frac{1}{n^\alpha})$ pour $\alpha \leq 0$ résulte de ce que le terme général ne tend pas vers zéro.

3° Autre exemple : Soit $u_n = \frac{1}{n (\text{Log } n)^\alpha}$, α étant un nombre positif donné.

Posons $f(x) = \frac{1}{x (\text{Log } x)^\alpha}$.

Les conditions d'application du théorème de Cauchy sont vérifiées sur $[2, +\infty[$.

Soit $F(X) = \int_2^X \frac{dx}{x (\text{Log } x)^\alpha}$; en posant $u = \text{Log } x$,

$$F(X) = \int_{1, \log 2}^{\log X} \frac{du}{u^\alpha}; \text{ si } X \text{ devient infini, } F(X) \text{ n'a de limite que si } \alpha > 1.$$

En définitive, la série $(\frac{1}{n (\text{Log } n)^\alpha})$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{convergente pour } \alpha > 1 \\ \text{divergente pour } 0 < \alpha \leq 1. \end{array} \right.$

4° **Encadrement du reste relatif au terme u_n pour une série convergente comparée à une intégrale.** — Reprenons les notations générales de l'étude précédente (1°); la série $(f(n))$ étant supposée convergente, le reste relatif au n° terme est

$$R_n = f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(n+p) + \dots$$

La double inégalité

$$\int_{n+1}^{n+p+1} f(x) dx < f(n+1) + \dots + f(n+p) < \int_n^{n+p} f(x) dx,$$

résulte, comme au 1°, de ce que la somme $f(n+1) + \dots + f(n+p)$ est une somme inférieure pour l'intégrale de droite, et une somme supérieure pour l'intégrale de gauche, ce que l'interprétation géométrique redonne

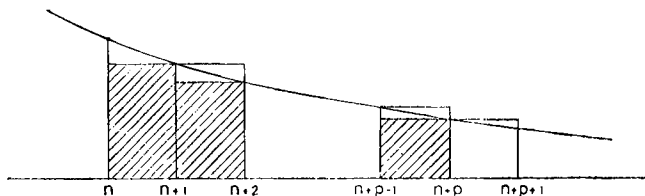


FIG. 68.

immédiatement (fig. 68), l'inégalité de droite étant obtenue avec les rectangles hachurés, à gauche des ordonnées, l'inégalité de gauche étant obtenue avec les rectangles à droite des ordonnées.

Lorsque p devient infini, on peut écrire, à la limite

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < \int_n^{+\infty} f(x) dx$$

les inégalités restant strictes.

C'est ainsi que, si $\alpha > 1$,

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} < \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(n+p)^\alpha} + \dots < \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Ces inégalités serviront ultérieurement dans le calcul approché de la somme d'une série $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ (n° 269).

5° **ENCADREMENT DE LA SOMME DES n PREMIERS TERMES D'UNE SÉRIE DIVERGENTE COMPARÉE A UNE INTÉGRALE.** — La série $(f(n))$ étant supposée divergente, $F(n) = \int_1^n f(x) dx$ devient infini avec n .

Les inégalités (3) du 1° permettent d'écrire

$$F(n+1) < S_n < f(1) + F(n).$$

Or $F(n+1)$ et $F(n)$ sont deux infiniment grands équivalents car leur différence $F(n+1) - F(n)$, c'est-à-dire $\int_n^{n+1} f(x) dx$, est inférieure à $f(n)$, donc reste finie pour n

infini [$f(x)$ étant décroissante et positive a une limite $l \geq 0$ pour x infini positif]. S_n est donc un infiniment grand équivalent à $F(n)$.

De façon plus précise, étudions le comportement de la différence $v_n = S_n - F(n)$.

$$a) \quad v_{n+1} - v_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx < 0$$

donc v_n est le terme général d'une suite décroissante.

$$b) \quad F(n+1) < S_n \implies \int_n^{n+1} f(x) dx < S_n - F(n) = v_n$$

donc v_n est positive.

v_n tend vers une limite C , positive ou nulle, et l'on peut écrire

$$S_n = F(n) + C + \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Par exemple :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \text{Log } n + C + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

dans ce cas particulier la constante C est dite constante d'Euler; $C = 0,5772\dots$

$$\text{Si} \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_1 + \varepsilon_n \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

191. Comparaison des séries à termes positifs. — Dans tout ce paragraphe nous appellerons (u_n) et (v_n) les deux séries étudiées; nous supposons $u_n > 0$; $v_n > 0$. Si l'on a

$$u_n \leq v_n$$

quel que soit n , au moins à partir d'un certain rang p , on dit que la série (v_n) est une série majorante pour la série (u_n) , et que la série (u_n) est minorante pour la série (v_n) .

THÉORÈME I. — Étant données deux séries (u_n) et (v_n) à termes positifs, supposons que, pour tout n , $u_n \leq v_n$.

1° Si la série (v_n) est convergente, la série (u_n) l'est aussi;

2° Si la série (u_n) est divergente, la série (v_n) l'est aussi.

Posons

$$U_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$u_i \leq v_i (i = 1, 2, \dots, n) \implies U_n \leq V_n.$$

1° Soit V la somme de la série convergente (v_n) ; on a $V_n < V$. Par suite $U_n < V$, et la série (u_n) est convergente (189); si U est sa somme, $U \leq V$.

2° Puisque la série (u_n) est divergente, U_n devient infini avec n , *a fortiori* aussi V_n , et la série (v_n) est divergente.

GÉNÉRALISATION. — D'après la remarque du n° 185, 4° il suffit que l'inégalité $u_n \leq v_n$ soit vérifiée, à partir d'un certain rang, pour que le théorème précédent soit encore vrai.

REMARQUE. — Si les deux séries ne sont pas identiques, c'est-à-dire s'il existe au moins un entier h tel que $u_h < v_h$, posons $v_h = u_h + \alpha_h$ ($\alpha_h > 0$).

$$\text{Pour } n \geq h, \quad U_n + \alpha_h \leq V_n,$$

et par suite, si les séries sont convergentes,

$$U + \alpha_h \leq V \implies U < V.$$

C'est la relation d'inégalité stricte qui existe entre les sommes des deux séries.

EXEMPLES. — I. — Soit $u_n = \frac{a^n}{n}$ le terme général d'une série. Si a est compris entre zéro et 1, tout terme de cette série à termes positifs est inférieur ou égal au terme de même rang de la série géométrique dont le terme général est a^n ; cette dernière série étant convergente, il en est de même de la série proposée.

Si a est un nombre plus grand que 1, u_n devient infini avec n , la série est divergente.

$$\text{II. — La série} \quad 1 + a + a^2 + \dots + a^{p_n} + \dots$$

dans laquelle a est un nombre positif inférieur à 1 et p_n le n° nombre premier à ses termes respectivement inférieurs ou égaux aux termes de même rang de la série géométrique

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$$

on en conclut qu'elle est convergente.

III. — La divergence de la série harmonique ($u_n = \frac{1}{n}$) ayant été établie directement au n° 186, 3°, on en déduit la divergence de ($u_n = \frac{1}{n^\alpha}$) pour $\alpha < 1$,

$$\text{car} \quad \alpha < 1 \implies \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}.$$

THÉORÈME II. — Étant donné deux séries (u_n) et (v_n) à termes positifs, s'il existe deux nombres positifs fixes a et b tels que, quel que soit n (au moins à partir d'un certain rang)

$$b \leq \frac{u_n}{v_n} \leq a$$

les deux séries sont de même nature.

Si la série (v_n) converge, la série (av_n) converge, et puisque $u_n \leq av_n$, il en est de même pour la série (u_n) (théorème I).

Si la série (v_n) diverge, la série (bv_n) diverge, et puisque $u_n \geq bv_n$, il en est de même pour la série (u_n) (théorème I).

Si l'on connaît la nature de la série (u_n), on en déduit de même la nature de la série (v_n).

THÉORÈME III. — Étant donné deux séries (u_n) et (v_n) à termes positifs, si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers une limite k , non nulle, pour n infini, les deux séries sont de même nature.

En effet, à tout nombre ε positif, inférieur à k , on sait faire correspondre un entier N tel que

$$\forall n \geq N, \quad 0 < k - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < k + \varepsilon.$$

Il suffit alors, pour conclure, d'appliquer le théorème II avec $a = k + \varepsilon$, $b = k - \varepsilon$.

En observant que les seules séries qui posent vraiment un problème sont celles dont le terme général tend vers zéro quand n devient infini, on peut donner au théorème III la forme pratique suivante :

Si les termes généraux de deux séries à termes positifs sont des infiniment petits de même ordre, pour n infini, les deux séries sont de même nature. On peut donc noter

$$\left. \begin{array}{l} u_n > 0, v_n > 0 \\ u_n \sim v_n \end{array} \right\} \implies (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont de même nature.}$$

EXEMPLES. I. — La série $v_n = \frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}$ ($\beta > 0$ donné) est convergente (n° 188, 2°). Or, en écrivant $v_n = \frac{1}{n^\beta} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} \right]$ on montre que $v_n \sim \frac{\beta}{n^{\beta+1}}$. On en déduit la convergence de $\left(u_n = \frac{1}{n^{\beta+1}} \right)$ pour $\beta > 0$, c'est-à-dire la convergence de la série de Riemann pour $\alpha > 1$, indépendamment du théorème de Cauchy.

II. — Soit $u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \text{Log } n + 5^n}$; quand $n \rightarrow \infty$, le numérateur et le dénominateur sont équivalents à 3^n et à 5^n . Soit $v_n = \frac{3^n}{5^n}$ ou $\left(\frac{3}{5}\right)^n$; $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$, (u_n) et (v_n) sont de même nature; or (v_n) est une série géométrique convergente; la série (u_n) est aussi convergente.

Cas particulier I. — Supposons que $\frac{u_n}{v_n}$ tende vers zéro pour n infini. A tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier N tel que

$$n \geq N \text{ entraîne } \frac{u_n}{v_n} < \varepsilon \quad \text{ou} \quad u_n < \varepsilon v_n.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } (v_n) \text{ converge,} & (u_n) \text{ converge.} \\ \text{Si } (u_n) \text{ diverge,} & (v_n) \text{ diverge.} \end{array}$$

Cas particulier II. — Supposons que $\frac{u_n}{v_n}$ devienne infini avec n . A tout nombre positif A on peut faire correspondre un entier N tel que

$$n \geq N \text{ entraîne } \frac{u_n}{v_n} > A \quad \text{ou} \quad u_n > A v_n.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } (v_n) \text{ diverge,} & (u_n) \text{ diverge.} \\ \text{Si } (u_n) \text{ converge,} & (v_n) \text{ converge.} \end{array}$$

THÉORÈME IV. — Etant donné deux séries (u_n) et (v_n) à termes positifs, telles que, quel que soit n (au moins à partir d'un certain rang p)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } (v_n) \text{ converge,} & (u_n) \text{ converge} \\ \text{si } (u_n) \text{ diverge,} & (v_n) \text{ diverge} \end{array} \right.$$

L'hypothèse entraîne

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{u_p}{v_p},$$

ou, en posant $\frac{u_p}{v_p} = k$, $u_n \leq kv_n$ ($n \geq p$),

et l'on est ramené au théorème 1.

III. SÉRIES A TERMES POSITIFS : ÉTUDE PRATIQUE

192. Principe de l'étude d'une série à termes positifs. — Pour reconnaître la nature d'une série à termes positifs, (u_n) , on cherche à former, soit une série majorante dont on sait qu'elle est convergente, soit une série minorante dont on sait qu'elle est divergente, soit une série (v_n) dont le terme général, positif, plus simple que u_n , est une quantité équivalente, — ou de même ordre — pour n infini.

Les séries de comparaison sont celles dont nous avons pu directement faire l'étude, c'est-à-dire la série géométrique et la série $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Réservant aux paragraphes suivants les règles spéciales de comparaison avec la série géométrique, examinons d'abord les règles de comparaison avec la série $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

193. Comparaison d'une série à termes positifs avec la série $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

1° Méthode directe. — Si u_n est un infiniment petit d'ordre déterminé α par rapport à l'infiniment petit $\frac{1}{n}$, et a pour partie principale $\frac{k}{n^\alpha}$, on peut écrire

$$u_n \sim \frac{k}{n^\alpha},$$

et d'après le n° 191 (théorème III), (u_n) est de même nature que la série $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$:

$$\begin{array}{ll} \text{si } \alpha > 1, & (u_n) \text{ converge} \\ \text{si } 0 < \alpha \leq 1, & (u_n) \text{ diverge.} \end{array}$$

2° Méthode indirecte. — Si on ne peut trouver directement pour u_n un ordre infinitésimal par rapport à $\frac{1}{n}$ on forme le rapport $\frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}}$ qu'on écrit sous la

forme $n^\alpha u_n$.

Si, pour une certaine valeur de α , $n^\alpha u_n$ a une limite k finie et non nulle, $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$ et on est ramené au cas précédent. Sinon, en général, on est dans l'un ou l'autre des cas suivants :

a) $n^\alpha u_n \rightarrow 0$; alors, au moins à partir d'un certain rang $n^\alpha u_n < \varepsilon$ ou $u_n < \frac{\varepsilon}{n^\alpha}$; on ne peut conclure que si $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ pour des valeurs de α supérieures à 1. Alors la série (u_n) est convergente.

b) $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$; alors, au moins à partir d'un certain rang, $n^\alpha u_n > A$ ou $u_n > \frac{A}{n^\alpha}$; on ne peut conclure que si $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$ pour $\alpha \leq 1$. Alors la série (u_n) est divergente.

3^e EXEMPLES. — I. — Soit $u_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$; $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$, donc (u_n) converge.

II. — D'après le théorème du n° 188, 2^e, la suite de terme général

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \text{Log } n$$

a la même nature que la série de terme général

$$u_n = a_n - a_{n+1} = \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1}$$

Deux développements limités (à l'ordre 2) donnent

$$u_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{\varepsilon}{n^2}; \quad u_n \sim \frac{1}{2n^2}$$

(u_n) converge, donc $\{a_n\}$ converge. Cette suite a été étudiée par un autre procédé au n° 190-5.

III. — Soit $u_n = \frac{1}{n^{2-\cos \frac{1}{n}}}$; quand n devient infini, l'exposant qui figure au dénominateur tend vers 1; pour examiner si u_n est équivalent à $v_n = \frac{1}{n}$, formons le rapport

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n^{1-\cos \frac{1}{n}}};$$

pour trouver la limite du second membre, nous en prenons le logarithme :

$$\text{Log} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = - \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \text{Log } n \sim \frac{1}{2n^2} \text{Log } n,$$

qui admet la limite 0; $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$, et par suite (u_n) est divergente.

IV. — Étudions les diverses séries auxquelles peut donner lieu l'expression

$$u_n = \frac{(\text{Log } n)^k}{n^p}; \quad p > 0, \quad k \text{ de signe quelconque.}$$

Nous poserons $k = q$ et nous distinguerons deux cas : $k = q$ et $k = -q$.

$$a) \quad p > 1; \quad (\text{I}) \quad u_n = \frac{1}{n^p (\text{Log } n)^q} < \frac{1}{n^p}; \quad (u_n) \text{ converge.}$$

$$(\text{II}) \quad u_n = \frac{(\text{Log } n)^q}{n^p}$$

choisissons α entre 1 et p : $1 < \alpha < p$.

$$n^\alpha u_n = \frac{(\text{Log } n)^q}{n^{p-\alpha}} \rightarrow 0;$$

pour n assez grand, $n^\alpha u_n < \varepsilon$, $u_n < \frac{\varepsilon}{n^\alpha}$; (u_n) converge.

$$b) \quad p < 1; \quad (\text{III}) \quad u_n = \frac{(\text{Log } n)^q}{n^p} > \frac{1}{n^p}; \quad (u_n) \text{ diverge.}$$

$$(\text{IV}) \quad u_n = \frac{1}{n^p (\text{Log } n)^q}$$

choisissons α entre p et 1 : $p < \alpha < 1$;

$$n^\alpha u_n = \frac{n^{\alpha-p}}{(\text{Log } n)^q} \rightarrow \infty;$$

pour n assez grand, $n^\alpha u_n > A$; $u_n > \frac{A}{n^\alpha}$; (u_n) diverge.

$$c) \quad p = 1; \quad (\text{V}) \quad u_n = \frac{(\text{Log } n)^q}{n} > \frac{1}{n}; (u_n) \text{ diverge.}$$

$$(\text{VI}) \quad u_n = \frac{1}{n (\text{Log } n)^q};$$

nous avons étudié cette série au n° 190, 2°.

194. Comparaison d'une série à termes positifs avec la série géométrique : méthode de Cauchy. — 1° THÉORÈME. u_n étant le terme de rang n d'une série à termes positifs :

1° Si à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n}$ reste inférieur ou égal à un nombre fixe k plus petit que 1, la série est convergente.

2° Si à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n}$ reste supérieur ou égal à 1, la série est divergente.

1° Si à partir d'un certain rang on a $\sqrt[n]{u_n} \leq k < 1$, on a aussi $u_n \leq k^n$. Or, k^n est le terme général d'une série géométrique à termes positifs qui est convergente, la série proposée est aussi convergente.

2° Si à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n}$ est supérieur ou égal à 1, il en est de même de u_n , qui restant supérieur ou égal à 1, ne peut tendre vers zéro quand n devient infini, la série est divergente.

Pour appliquer pratiquement ce théorème on cherche si $\sqrt[n]{u_n}$ a une limite pour n infini; s'il en est ainsi, énonçons et justifions la règle de Cauchy.

2° Règle de Cauchy. u_n étant le terme de rang n d'une série à termes positifs, lorsque $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite l quand n devient infini :

1° Si l est plus petit que 1, la série est convergente.

2° Si l est plus grand que 1, la série est divergente.

D'après l'hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } n \geq N \implies l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon.$$

Si $l < 1$, prenons ε assez petit pour que $\sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon < 1$; (u_n) converge.
Si $l > 1$, prenons ε assez petit pour que $1 < l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n}$; (u_n) diverge.

CAS DOUTEUX. — Si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers 1 pour n infini, on ne peut rien en conclure. Toutefois si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers 1 par valeurs supérieures à 1, c'est que, tout au moins à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, et la série (u_n) est divergente.

3° EXEMPLE. — $u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} \cdot x^n \quad (x > 0).$

Formons $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^2 x;$

$$\sqrt[n]{u_n} \rightarrow 4x; \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 4x > 1, & \text{ou } x > \frac{1}{4}; (u_n) \text{ diverge} \\ 4x < 1, & \text{ou } x < \frac{1}{4}; (u_n) \text{ converge} \end{cases}$$

si $x = \frac{1}{4}$, $u_n = \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{2n}$; $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2$ tend vers 1 par valeurs inférieures à 1, ce qui ne permet pas de conclure. Cherchons ce que devient u_n pour n infini :

$$\text{Log } u_n = 2n \text{Log} \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} \sim 2n \cdot \left(-\frac{3}{2n}\right)$$

$u_n \rightarrow e^{-3}$, et la série (u_n) est divergente puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

195. Comparaison d'une série à termes positifs avec la série géométrique : méthode de d'Alembert. — 1° THÉORÈME. u_n étant le terme de rang n d'une série à termes positifs :

1° Si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste inférieur ou égal à un nombre fixe k plus petit que 1, la série est convergente.

2° Si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou égal à 1, la série est divergente.

1° Supposons qu'à partir d'un certain rang on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$$

et comparons la série (u_n) à la série qui a pour terme général $v_n = k^n$, en observant que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = k$.

k étant plus petit que 1, la série géométrique qui a pour terme général v_n est convergente et puisque le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est, à partir d'un certain rang, inférieur au rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, il en résulte, les deux séries étant à termes positifs (191, théorème IV), que la série proposée est convergente.

2° Supposons qu'à partir d'un certain rang p , $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit supérieur ou égal à 1 : cela revient à dire que chaque terme est au moins égal au précédent à partir de u_p ; tous les termes qui suivent u_p étant supérieurs ou égaux à u_p , le terme général ne peut tendre vers zéro, la série est divergente.

Pour appliquer pratiquement ce théorème on cherche si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite pour n infini; s'il en est ainsi, énonçons et justifions la règle de d'Alembert.

2° Règle de d'Alembert. u_n étant le terme de rang n d'une série à termes positifs, lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite l quand n devient infini :

1° Si l est plus petit que 1, la série est convergente.

2° Si l est plus grand que 1, la série est divergente.

D'après l'hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } n \geq N \implies l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Si $l < 1$, choisissons ε assez petit pour que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon < 1$; (u_n) converge.

Si $l > 1$, choisissons ε assez petit pour que $1 < l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n}$; (u_n) diverge.

CAS DOUTEUX. — Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 pour n infini, on ne peut rien en conclure. Toutefois si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 par valeurs supérieures à 1, c'est que, tout au moins à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et la série (u_n) est divergente.

Remarque. — La série de Riemann $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$ ($\alpha > 0$) conduit toujours au cas douteux des règles de Cauchy et d'Alembert puisque

$$\text{Log} \sqrt[n]{u_n} = -\alpha \frac{\text{Log } n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \rightarrow 1 - 0.$$

La règle de d'Alembert (resp. Cauchy) ne doit pas être utilisée lorsque le terme général d'une série a un ordre infinitésimal déterminé par rapport à l'infiniment petit $\frac{1}{n}$.

3° EXEMPLES. — La règle de d'Alembert est utilisée lorsque l'expression du terme général comporte des factorielles, c'est-à-dire des produits de nombres en progression arithmétique.

a) x étant un nombre positif étudier la série

$$1 + x + 2x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + \dots$$

La série est manifestement divergente si x est supérieur ou égal à 1. Si x est plus petit que 1 formons le rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = nx,$$

il devient infini avec n . La série est divergente quel que soit le nombre positif x .

b) x étant un nombre positif, étudier la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Formons le rapport d'un terme au précédent

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n},$$

il tend vers zéro quand n devient infini. La série est convergente quel que soit le nombre positif x . En particulier la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

est convergente; il s'agit là d'un résultat déjà rencontré (n° 32, 3°).

Remarque. — Si $x > 1$, $\frac{x^n}{n!}$ se présente sous forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ pour n infini; or nous venons de constater que la série $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ est convergente, c'est donc que $\frac{x^n}{n!}$ tend vers zéro pour n infini.

On en déduit que l'expression $n!x^n$, où $0 < x < 1$, devient infinie avec n ; il suffit de poser $x = \frac{1}{y}$ pour être ramené au cas précédent.

c) x étant un nombre positif, étudier la série

$$u_n = \frac{1.4.7. \dots (3n+1)}{(n+1)!} x^n;$$

Formons
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+4}{n+2} \cdot x; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 3x;$$

si $3x < 1$, ou $x < \frac{1}{3}$, (u_n) converge;

si $3x > 1$, ou $x > \frac{1}{3}$, (u_n) diverge;

si $x = \frac{1}{3}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+4}{3n+6}$ tend vers 1 par valeurs inférieures à 1, ce qui ne permet pas de conclure.

La série harmonique $v_n = \frac{1}{n}$ est une de celles pour laquelle le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1}$ tend aussi vers 1 par valeurs inférieures, et l'on sait qu'elle est divergente.

Or
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+4}{3(n+1)(n+2)}.$$

L'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ entraîne, d'après le théorème IV du n° 191, la divergence de la série (u_n) dans le cas particulier où $x = \frac{1}{3}$.

d) La formation du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne donnera des simplifications notables que si l'expression de u_n ne comporte que des produits ou des quotients. Il sera utile lorsque des sommes figureront dans l'expression de u_n , de commencer par chercher une expression v_n , équivalente à u_n , plus simple que u_n . Par exemple, soit à étudier la série

$$u_n = \frac{\text{Log } n + 1}{\sqrt{n} + \text{Log } n + 2} x^n \quad (x > 0).$$

$u_n \sim v_n = \frac{\text{Log } n}{\sqrt{n}} x^n$; c'est à la série (v_n) que nous appliquerons la règle de d'Alembert :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\text{Log}(n+1)}{\text{Log } n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot x \rightarrow x.$$

Si $x < 1$, (v_n) converge, donc aussi (u_n) .
Si $x > 1$, (v_n) diverge, donc aussi (u_n) .

196. Comparaison des règles de Cauchy et de d'Alembert. —

1° Les caractères de convergence tirés de l'étude de $\sqrt[n]{u_n}$ et de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, s'ils présentent des analogies dues à leur caractère commun de comparaison avec une série géométrique, ne sont cependant pas totalement comparables.

a) S'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, la série (u_n) est divergente.

En effet, quel que soit N , il existe alors au moins un entier $n > N$ tel que $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ ou $u_n \geq 1$; u_n ne peut donc tendre vers zéro pour n infini, puisque cela exigerait $u_n \leq \varepsilon < 1$, pour tout n à partir d'un certain rang.

b) Mais s'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, on ne peut en conclure la divergence de (u_n) .

Nous allons le montrer sur l'exemple suivant :

$$(1) \quad a + ab + a^2b + a^3b^2 + \dots + a^pb^p + a^{p+1}b^p + \dots$$

les nombres a et b étant positifs.

On passe d'un terme de cette série au suivant en le multipliant alternativement par a et par b ; autrement dit, le rapport d'un terme au précédent est alternativement a et b .

Si a et b sont tous deux inférieurs à 1, le théorème préliminaire à la règle de d'Alembert montre la convergence de la série (1).

Si a et b sont tous deux supérieurs à 1, le terme général va en augmentant, et la série (1) est divergente.

Mais si les deux nombres a et b sont, l'un supérieur à 1, l'autre inférieur à 1, on ne peut conclure.

Essayons la règle de Cauchy :

$$\begin{aligned} u_{2p} &= a^p b^p & \text{d'où} & \quad \sqrt[2p]{u_{2p}} = (ab)^{\frac{1}{2}} \\ u_{2p+1} &= a^{p+1} b^p & \text{d'où} & \quad \sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} b^{\frac{p}{2p+1}}. \end{aligned}$$

Si p devient infini, $\frac{p+1}{2p+1}$ et $\frac{p}{2p+1}$ tendent vers $\frac{1}{2}$; $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}}$ tend vers $(ab)^{\frac{1}{2}}$; comme $\sqrt[2p]{u_{2p}} = (ab)^{\frac{1}{2}}$, on peut affirmer que $|\sqrt[n]{u_n} - \sqrt{ab}|$ peut être rendu aussi petit qu'on veut, pour n assez grand; $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\sqrt{ab}$;

si $ab < 1$, la série (1) converge

si $ab > 1$, la série (1) diverge.

Par exemple pour $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, la série (1) converge et pourtant, le rapport $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = 2$ est plus grand que 1, quel que soit p .

Si $ab = 1$, $u_{2p} = 1$, et la série (1) diverge.

2° THÉORÈME. — $\{u_n\}$ étant une suite à termes positifs, si, lorsque n devient infini, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ tendent vers des limites l et l' non nulles, ces limites sont égales.

Soit a un nombre positif. Appliquons les règles de Cauchy et de d'Alembert à la série qui a pour terme général

$$v_n = u_n a^n.$$

Formons $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} a$ et $\sqrt[n]{v_n} = \sqrt[n]{u_n} a$,

ces expressions tendent respectivement vers la et vers $l'a$ quand n devient infini. Si l était différent de l' , en prenant pour a un nombre compris entre $\frac{1}{l}$

et $\frac{1}{l'}$, l'une des limites la , $l'a$ serait plus grande et l'autre plus petite que 1, la série dont le terme général est v_n serait convergente d'après l'une des règles et divergente d'après l'autre, ce qui est absurde. Il est ainsi démontré que $l = l'$.

*3° — On peut démontrer d'une façon plus précise le théorème suivant :

THÉORÈME. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite l positive, $\sqrt[n]{u_n}$ admet aussi cette limite.

En effet, d'après l'hypothèse, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier p tel que l'inégalité

$$n \geq p \quad \text{entraîne la double inégalité} \quad l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

En remplaçant dans cette double inégalité successivement n par $p, p+1, \dots, p+q$, et multipliant membre à membre les inégalités de même sens obtenues on trouve

$$(l - \varepsilon)^q < \frac{u_{p+q}}{u_p} < (l + \varepsilon)^q$$

d'où

$$u_p^{\frac{1}{p+q}} (l - \varepsilon)^{\frac{q}{p+q}} < \sqrt[p+q]{u_{p+q}} < u_p^{\frac{1}{p+q}} (l + \varepsilon)^{\frac{q}{p+q}}.$$

Si, p restant fixe, q devient infini, $u_p^{\frac{1}{p+q}}$ tend vers 1 d'après une propriété de l'exponentielle; $\frac{q}{p+q}$ tend vers 1, $(l - \varepsilon)^{\frac{q}{p+q}}$ et $(l + \varepsilon)^{\frac{q}{p+q}}$ tendent respectivement vers $l - \varepsilon$ et

$l + \varepsilon$, il en est de même de leurs produits par $u_p^{\frac{1}{p+q}}$. Il est donc possible de déterminer un entier q' tel que, q étant supérieur à q' , on ait

$$u_p^{\frac{1}{p+q}} (l - \varepsilon)^{\frac{q}{p+q}} > l - 2\varepsilon \quad \text{et} \quad u_p^{\frac{1}{p+q}} (l + \varepsilon)^{\frac{q}{p+q}} < l + 2\varepsilon.$$

En posant $p' = p + q'$ on reconnaît ainsi que l'inégalité

$$n > p' \quad \text{entraîne la double inégalité} \quad l - 2\varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + 2\varepsilon,$$

$\sqrt[n]{u_n}$ tend donc vers l quand n devient infini.

La réciproque n'est pas vraie. $\sqrt[n]{u_n}$ peut tendre vers une limite sans qu'il en soit de même de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Cette circonstance se présente par exemple pour la suite

$$a, \quad ab, \quad a^2b, \quad a^2b^2, \quad \dots, \quad a^pb^p, \quad a^{p+1}b^p, \quad \dots$$

pour laquelle $\sqrt[n]{u_n}$ tend, comme nous l'avons trouvé, vers $\sqrt{ab}$ tandis que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, égal alternativement à a et à b , ne tend vers aucune limite.

Application. — Soit $f(n)$ une fonction de l'entier n que nous supposons positive pour les valeurs de n supérieures à un certain nombre p . Nous venons de démontrer que si $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ tend vers une limite l quand n devient infini, il en est de même de $\sqrt[n]{f(n)}$. Cette observation permet dans certains cas de trouver la limite de $\sqrt[n]{f(n)}$.

Par exemple, soit à étudier la suite de terme général $\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$; nous posons

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \rightarrow \frac{1}{4};$$

donc $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \frac{1}{4}$.

REMARQUE. — De ce que la règle de Cauchy puisse s'appliquer dans certains cas où la règle de d'Alembert ne s'applique pas, on peut conclure que la règle de Cauchy est plus générale que la règle de d'Alembert.

*4° COMPLÉMENT RELATIF A LA RÈGLE DE CAUCHY. — Soit u_n le terme général d'une série à termes positifs, et appelons E l'ensemble des nombres $\sqrt[n]{u_n}$.

a) ou bien E n'est pas majoré; quel que soit A, il existe au moins une valeur n telle que $\sqrt[n]{u_n} > A$ ou $u_n > A^n$; u_n ne peut tendre vers zéro; la série (u_n) est divergente.

b) ou bien E est majoré; la suite $\{\sqrt[n]{u_n}\}$ admet alors (24) une limite supérieure (point d'adhérence le plus à droite) désignée par $\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n}$, que nous noterons ici L.

Si $L < 1$, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de E qui soient supérieurs à $L + \varepsilon$, ε étant choisi assez petit pour que $L + \varepsilon < 1$. C'est donc qu'à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{u_n} < L + \varepsilon < 1$, et la série est convergente.

Si $L > 1$, il existe une infinité d'éléments de E qui sont supérieurs à $L - \varepsilon$, ε étant choisi assez petit pour que $1 < L - \varepsilon$; c'est donc qu'il existe une infinité de valeurs de n telles que $1 < L - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n}$; u_n ne peut tendre vers zéro, et la série (u_n) est divergente.

En convenant que, dans le cas a), $\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n}$ désigne $+\infty$, on a :

CRITÈRE DE CAUCHY. — Étant donné une série (u_n) à termes positifs,

$$\text{si } \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} < 1, \quad (u_n) \text{ converge}$$

$$\text{si } \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} > 1, \quad (u_n) \text{ diverge.}$$

5° REMARQUE SUR LES SÉRIES A TERMES POSITIFS. — Si $k < 1$, $\alpha > 1$, à partir d'un certain rang, $k^n < \frac{1}{n^\alpha}$.

Si, pour montrer la convergence de (u_n) , la règle $n^\alpha u_n$ a échoué, c'est que

$$u_n > \frac{1}{n^\alpha}$$

a fortiori $u_n > k^n$, et il sera inutile, après cet échec de recourir aux règles de Cauchy et de d'Alembert : elles ne donneront rien.

Au contraire, après l'échec des règles de Cauchy et de d'Alembert, on pourra essayer la règle $n^\alpha u_n$ car il peut se faire que l'on ait

$$k^n < u_n < \frac{1}{n^\alpha}.$$

IV. SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES

197. *Séries à termes réels absolument convergentes.* —

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — Soit (u_n) une série à termes réels de signes quelconques. Si la série des valeurs absolues

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| +$$

est convergente, la série proposée

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

est aussi convergente. On dit que la série (u_n) est absolument convergente.

Il existe dans la série (u_n) des termes positifs, et des termes négatifs, de rang aussi grand qu'on veut.

Soit
$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Dans cette somme figurent des termes positifs, de somme P_n , et des termes négatifs, dont Q_n est la somme des valeurs absolues;

$$(1) \quad S_n = P_n - Q_n.$$

$$\text{Posons } p_n = |u_n|; \quad \Sigma_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n = P_n + Q_n. \quad (2)$$

Par hypothèse, Σ_n tend vers une limite Σ , et comme il s'agit d'une série à termes positifs, $\Sigma_n < \Sigma$.

$$P_n + Q_n < \Sigma \implies \begin{cases} P_n < \Sigma \\ Q_n < \Sigma. \end{cases}$$

$$\text{Or si } u_{n+1} > 0, \quad P_{n+1} > P_n \quad \text{et} \quad Q_{n+1} = Q_n$$

$$\text{si } u_{n+1} < 0, \quad P_{n+1} = P_n \quad \text{et} \quad Q_{n+1} > Q_n.$$

Les suites monotones (au sens large) P_n et Q_n étant majorées par Σ , ont des limites, P et Q .

$$\text{Par suite} \quad S_n = P_n - Q_n \rightarrow P - Q,$$

et la série (u_n) est convergente; sa somme est

$$S = P - Q,$$

P et Q étant respectivement les sommes des séries formées à partir de la série initiale par les termes positifs, et par les valeurs absolues des termes négatifs.

L'adverbe « absolument » placé devant l'épithète « convergente » rappelle que la série (u_n) converge parce que la série des valeurs absolues est convergente.

2° Série majorante. — DÉFINITION. — Étant donné la série (u_n) dont les termes ont un signe quelconque, la série v_n , à termes positifs, est dite majorante pour la série (u_n) si, au moins à partir d'un certain rang,

$$|u_n| \leq v_n.$$

Si la série majorante (v_n) est convergente, la série $(|u_n|)$ à termes positifs est aussi convergente, et par suite la série (u_n) elle-même est absolument convergente, et nous énoncerons :

Si la série (u_n) admet une majorante convergente, elle est absolument convergente.

Par exemple, (u_n) et (v_n) étant deux séries absolument convergentes, à termes réels, et λ, μ étant deux réels quelconques, la série de terme général

$$w_n = \lambda u_n + \mu v_n$$

$$\text{est telle que} \quad |w_n| \leq |\lambda| |u_n| + |\mu| |v_n|;$$

elle admet une majorante convergente, et par suite, la série (w_n) est absolument convergente. Toute série dont le terme général est une combinaison

linéaire des termes généraux de séries absolument convergentes est aussi absolument convergente.

3^e Règles d'absolue convergence de Cauchy et de d'Alembert. — Pour étudier la nature d'une série à termes réels, de signes quelconques, on commence par étudier la série des valeurs absolues; la convergence de celle-ci entraîne la convergence de la série initiale.

Mais la divergence de la série des valeurs absolues n'entraîne pas la divergence de la série initiale, sauf cependant si l'on a appliqué les règles de Cauchy et de d'Alembert.

Supposons en effet que $\sqrt[n]{|u_n|}$ tende vers une limite $l > 1$; c'est que, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$; $|u_n| > 1$ et u_n ne peut pas tendre vers zéro; la série (u_n) diverge.

Supposons maintenant que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ tende vers une limite $l > 1$; c'est que, à partir d'un certain rang, $|u_{n+1}| > |u_n|$; $|u_n|$ ne peut pas tendre vers zéro, u_n non plus, et la série (u_n) diverge.

En résumé, on peut donner les énoncés suivants qui complètent ceux des nos 194 et 195.

RÈGLE DE CAUCHY. — Soit (u_n) une série à termes réels, et supposons que $\sqrt[n]{|u_n|}$ tende vers une limite l pour n infini.

Si $l < 1$, la série (u_n) est absolument convergente.

Si $l > 1$, la série (u_n) est divergente.

RÈGLE DE D'ALEMBERT. — Soit (u_n) une série à termes réels, et supposons que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ tende vers une limite l pour n infini.

Si $l < 1$, la série (u_n) est absolument convergente.

Si $l > 1$, la série (u_n) est divergente.

EXEMPLES. — 1^o Soit $u_n = \frac{x^n}{n!}$ où x est réel.

$$\rho_n = |u_n| = \frac{|x|^n}{n!}.$$

Or la série (ρ_n) est convergente quel que soit $|x|$; donc la série (u_n) est absolument convergente quel que soit x .

2^o Soit $u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} x^n$ où x est réel.

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^2 |x| \rightarrow 4|x|.$$

Si $|x| < \frac{1}{4}$, (u_n) est absolument convergente;

si $|x| > \frac{1}{4}$, (u_n) diverge.

Nous avons vu au n^o 194 que si $|x| = \frac{1}{4}$, $|u_n|$ ne tend pas vers zéro; la série proposée est divergente pour $x = \pm \frac{1}{4}$.

198. Séries à termes complexes absolument convergentes. —

1^o THÉORÈME ET DÉFINITION. — Soit (u_n) une série à termes complexes; si la série des modules est convergente, la série proposée est aussi convergente. On dit que la série (u_n) est absolument convergente.

Soit $u_n = a_n + ib_n$, a_n et b_n étant réels.

$$\rho_n = |u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Or $|a_n| \leq \rho_n$ et $|b_n| \leq \rho_n$.

Les séries à termes réels (a_n) et (b_n) étant majorées par la série ρ_n sont absolument convergentes, et par suite la série (u_n) est convergente. On ajoute l'adverbe « absolument » pour rappeler l'origine de la convergence.

Par exemple la série de terme général $u_n = \frac{z^n}{n!}$, où z est complexe, est absolument convergente quel que soit z car si $|z| = r$, $|u_n| = \frac{r^n}{n!}$, et cette série à termes positifs est convergente quel que soit r .

2^o Série majorante. — Par extension de la notion de série majorante, déjà rencontrée aux nos 191 et 197, on dit que la série à termes réels positifs (v_n) est majorante pour la série à termes complexes (u_n) si elle est majorante pour la série des modules, c'est-à-dire si, à partir d'un certain rang,

$$|u_n| \leq v_n.$$

Si une série à termes complexes admet une série majorante convergente, elle est absolument convergente.

3^o REMARQUE. — L'inégalité $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq |a_n| + |b_n|$ entre nombres réels montre que si les séries (a_n) et (b_n) sont absolument convergentes, la série $(|a_n| + |b_n|)$ est une série convergente, donc aussi la série de terme général

$$\sqrt{a^2 + b_n^2} :$$

Si les séries (a_n) et (b_n) sont absolument convergentes, la série $(a_n + ib_n)$ est absolument convergente.

4^o Si (u_n) et (v_n) sont absolument convergentes, $(w_n = \lambda u_n + \mu v_n)$ l'est aussi ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$). En effet

$$|w_n| \leq |\lambda| |u_n| + |\mu| |v_n| = l_n$$

et (l_n) est une série majorante convergente.

L'ensemble des séries à termes complexes absolument convergentes forme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

199. Propriétés des séries absolument convergentes. — **1^o Valeur absolue de la somme.** — On sait que, quels que soient les nombres, réels ou complexes, $u_1, u_2, \dots, u_n$,

$$|u_1 + u_2 + \dots + u_n| \leq |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|.$$

Si u_n est le terme général d'une série absolument convergente, le second membre de l'inégalité précédente tend vers la somme de la série ($|u_n|$); le premier membre tend vers la valeur absolue de la somme de la série (u_n), et, en passant à la limite

$$|u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots| \leq |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

On énoncera :

THÉORÈME. — La valeur absolue de la somme d'une série absolument convergente est inférieure ou égale à la somme de la série des valeurs absolues de ses termes.

Ce résultat est utilisé, dans la pratique du calcul numérique, pour majorer le reste, relatif au terme u_n , d'une série absolument convergente, par le reste, relatif au terme $|u_n|$, de la série des valeurs absolues :

$$|u_{n+1} + \dots + u_{n+k} + \dots| \leq |u_{n+1}| + \dots + |u_{n+k}| + \dots$$

2° Changement de l'ordre des termes. — **DÉFINITION.** — On dit que les deux séries (u_n) et (v_n) ne diffèrent que par l'ordre des termes si à toute valeur de l'un des entiers p et p' correspond une valeur déterminée de l'autre telle que

$$u_p = v_{p'}.$$

a) Supposons d'abord les deux séries à termes positifs.

Soit
$$U_p = u_1 + u_2 + \dots + u_p.$$

Soit q le plus grand indice avec lequel les termes de la somme précédente figurent dans la seconde série, et soit

$$\begin{aligned} V_q &= v_1 + v_2 + \dots + v_q; \\ U_p &\leq V_q. \end{aligned}$$

Soit de même r le plus grand indice avec lequel les termes $v_1, \dots, v_r$ figurent dans la première série; on a $V_q \leq U_r$.

Finalement
$$U_p \leq V_q \leq U_r.$$

I. — Supposons la série (u_n) convergente, de somme U .

$$U_r < U \implies V_q < U,$$

et par suite la série (v_n) est convergente, sa somme V étant telle que $V \leq U$.

Mais $U_p \leq V_q$ donne, lorsque p (et par suite q) devient infini, $U \leq V$.

Nécessairement
$$U = V.$$

II. — Supposons la série (u_n) divergente; si p devient infini, U_p devient infini, et *a fortiori* V_q devient infini; la série (v_n) est divergente.

En résumé : **THÉORÈME.** — Les deux séries (u_n) et (v_n) à termes positifs qui ne diffèrent que par l'ordre des termes sont de même nature, et elles ont même somme en cas de convergence.

b) Supposons maintenant que les séries (u_n) et (v_n) soient à termes réels de signes quelconques. Si la série (u_n) est absolument convergente, la série (v_n) l'est aussi, puisque les séries $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ ne diffèrent que par l'ordre des termes et que la série $(|u_n|)$ est convergente. Soit S la somme de la série (u_n) : $S = P - Q$, P et Q étant les sommes des séries formées par les termes positifs d'une part, et par les valeurs absolues des termes négatifs d'autre part. Changer l'ordre des termes dans la série (u_n) , c'est changer l'ordre des termes dans les deux séries précédentes à termes positifs, ce qui ne change pas leurs sommes P et Q .

En résumé : **THÉORÈME.** — Si on change l'ordre des termes dans une série à termes réels absolument convergente, la série reste absolument convergente, et conserve la même somme.

c) Soit maintenant une série $(u_n = a_n + ib_n)$ à termes complexes, absolument convergente; y changer l'ordre des termes, c'est changer l'ordre des termes des séries absolument convergentes, à termes réels, (a_n) et (b_n) ; ces séries restent absolument convergentes, et leur somme ne change pas. Il en résulte, d'après le n° 198, 3° que la série (u_n) reste absolument convergente; d'autre part sa somme ne change pas.

En résumé, soit E l'ensemble des termes d'une série absolument convergente; quelle que soit la façon de ranger les éléments de E pour en faire une série, cette série est absolument convergente, et sa somme ne change pas.

200. Multiplication de deux séries absolument convergentes. — **THÉORÈME.** — Si deux séries à termes réels ou complexes

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \\ v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots \end{aligned}$$

sont absolument convergentes et ont respectivement pour sommes U et V , la série

$$w_0 + w_1 + \dots + w_n + \dots$$

dans laquelle $w_0 = u_0 v_0$ et, d'une façon générale,

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0$$

est absolument convergente et a pour somme le produit UV .

Nous poserons

$$\begin{aligned} U_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ V_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ W_n &= w_0 + w_1 + \dots + w_n. \end{aligned}$$

1° Cas de deux séries convergentes à termes positifs. — Démontrons d'abord la propriété lorsque (u_n) et (v_n) sont deux séries à termes positifs convergentes.

Formons le produit $U_n V_n$; les termes qui le constituent figurent dans le tableau de la figure 69.

On trouve dans la seconde diagonale de ce tableau carré, et dans les parallèles situées au-dessus de cette diagonale, les termes $w_0, w_1, \dots, w_n$. Par suite

$$W_n < U_n V_n.$$

	w_0	w_1	w_2		w_n
$u_0 v_0$	$u_0 v_1$	$u_0 v_2$		$\dots$	$u_0 v_n$
$u_1 v_0$	$u_1 v_1$	$u_1 v_2$	$\dots$	$\dots$	$u_1 v_n$
$u_2 v_0$	$u_2 v_1$	$u_2 v_2$	$\dots$	$\dots$	$u_2 v_n$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$u_n v_0$	$u_n v_1$	$u_n v_2$	$\dots$	$u_n v_n$

FIG. 69.

Si l'on avait écrit le tableau précédent jusqu'à l'ordre $2n$ (le produit partiel $u_n v_n$ figure dans w_{2n}), on aurait constaté

$$U_n V_n < W_{2n} \\ W_n < U_n V_n < UV \implies (w_n) \text{ est convergente.}$$

Si W est la somme de la série (w_n) , on a dès maintenant $W \leq UV$.

Mais $U_n V_n < W_{2n} \implies UV \leq W.$

Donc nécessairement $W = UV.$

Le théorème est établi lorsque les deux séries données sont à termes positifs.

2° Cas de deux séries absolument convergentes, à termes réels ou complexes. — Étendons le résultat obtenu au 1° au cas où les séries (u_n) et (v_n) sont à termes quelconques, réels ou complexes, absolument convergentes.

Posons $\rho_n = |u_n|$; $\Sigma_n = \rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_n$ a une limite Σ
 $\rho'_n = |v_n|$; $\Sigma'_n = \rho'_0 + \rho'_1 + \dots + \rho'_n$ a une limite $\Sigma'.$

Soit $t_n = \rho_0 \rho'_n + \rho_1 \rho'_{n-1} + \dots + \rho_n \rho'_0.$

La série (t_n) est convergente, d'après le 1°, et

$$T_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n \text{ tend vers } T = \Sigma \Sigma',$$

$$|w_n| \leq \rho_0 \rho'_n + \rho_1 \rho'_{n-1} + \dots + \rho_n \rho'_0 = t_n.$$

La série (w_n) , admettant une majorante convergente (t_n) , est absolument convergente; soit W sa somme.

Posons alors $d_n = U_n V_n - W_n.$

D'une part, d_n tend vers $UV - W$ pour n infini.

D'autre part, $|d_n| \leq \Sigma_n \Sigma'_n - T_n$

car d_n est la somme des termes figurant dans le tableau de la figure 71 sous la seconde diagonale, et $\Sigma_n \Sigma'_n - T_n$ est la somme des modules de ces termes.

Or, pour $n \rightarrow \infty$, $\Sigma_n \Sigma'_n - T_n \rightarrow \Sigma \Sigma' - T = 0.$

Par suite d_n tend vers zéro, et donc $UV - W = 0,$

finalement

$$W = UV,$$

et le théorème est établi.

EXEMPLE. — La série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

est absolument convergente quel que soit le nombre réel ou complexe x , sa somme qui dépend de x est une fonction $E(x)$ de la variable complexe x définie pour toutes les valeurs de cette variable. Multiplions d'après la règle donnée les deux séries absolument convergentes

$$E(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$E(y) = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \dots + \frac{y^n}{n!} + \dots$$

Nous trouvons la série absolument convergente

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(x^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} x^{n-1}y + \dots + \frac{n!}{(n-p)!p!} x^{n-p}y^p + \dots + y^n \right) + \dots$$

Si l'on observe que $\frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$ nombre de combinaisons de n objets p à p on reconnaît dans le terme général de cette série le quotient par $n!$ du développement de $(x+y)^n$ par la formule du binôme de Newton d'où

$$E(x) \times E(y) = 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \dots$$

Finalement, quels que soient x et y ,

$$E(x) \times E(y) = E(x+y).$$

V. SÉRIES A TERMES RÉELS NON ABSOLUMENT CONVERGENTES

201. *Séries semi-convergentes : Généralités.* — 1° DÉFINITION. —

Une série (u_n) à termes réels peut être convergente alors que la série des valeurs absolues $(|u_n|)$ est divergente (voir l'exemple du n° 202, 4°) : une telle série est

dite *non absolument convergente*, la négation « non » portant uniquement sur l'adverbe « absolument »; on dit aussi qu'une telle série est *semi-convergente*.

2° Motif de la convergence d'une série semi-convergente. — Conservons les notations employées dans la démonstration du n° 197 et supposons que la série (u_n) soit semi-convergente. Si la série formée par les termes positifs de la série (u_n) était convergente, P_n tendrait vers une limite P quand n devient infini; or, d'après l'hypothèse S_n tend vers une limite S ; d'après l'égalité (1), $Q_n = P_n - S_n$ tendrait vers une limite $Q = P - S$ et d'après l'égalité (2), Σ_n tendrait vers $P + Q$, la série serait absolument convergente, ce qui est contraire à l'hypothèse. *Ainsi, une série semi-convergente étant donnée, les séries formées l'une, des termes positifs, l'autre, des termes négatifs de celle série sont divergentes.*

En d'autres termes, ce n'est pas la rapidité avec laquelle u_n tend vers zéro qui entraîne la convergence de la série, mais ce sont les variations de signe de u_n qui entraînent l'existence d'une limite pour la somme S_n .

L'ordre des termes de la série (u_n) étant le motif de la convergence, on se gardera de changer l'ordre des termes d'une série semi-convergente. On démontre qu'on peut ranger l'ensemble des termes d'une série semi-convergente à termes réels de façon que la série ainsi obtenue ait pour somme un nombre donné à l'avance; on peut aussi l'ordonner de façon à obtenir une série divergente.

202. Séries alternées. — DÉFINITION. — On dit qu'une série à termes réels est *alternée* si ses termes sont alternativement positifs et négatifs.

THÉORÈME. — Si une série alternée (u_n) est telle que

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & |u_n| \geq |u_{n+1}| \quad \text{pour tout } n \\ 2^\circ & u_n \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty, \end{array}$$

elle est convergente.

Nous écrirons la série alternée, en mettant en évidence les signes de ses divers termes, sous la forme

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2p-1} - u_{2p} + \dots$$

1° Étude des sommes partielles d'indice pair.

$$\begin{aligned} S_{2p} &= u_1 - u_2 + \dots + u_{2p-1} - u_{2p} \\ S_{2p+2} &= S_{2p} + u_{2p+1} - u_{2p+2} \geq S_{2p}, \quad \text{car } u_{2p+1} \geq u_{2p+2}. \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part } S_{2p} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2p-2} - u_{2p-1}) - u_{2p}$$

d'où l'on conclut

$$S_{2p} < u_1.$$

Les sommes S_{2p} forment une suite croissante (au sens large) et majorée; donc S_{2p} tend vers une limite S .

2° Étude des sommes partielles d'indice Impair.

$$S_{2p+1} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2p-1} - u_{2p}) + u_{2p+1}$$

$$S_{2p+1} = S_{2p-1} - (u_{2p} - u_{2p+1}) \leq S_{2p-1}$$

$$S_{2p+1} = S_{2p} + u_{2p+1}.$$

Les sommes S_{2p+1} forment une suite décroissante (au sens large), ayant même limite S que les sommes S_{2p} puisque u_{2p+1} tend vers zéro pour p infini.

3° **Convergence et reste.** S_n tendant vers S , pour n infini, quelle que soit la parité de n , la série alternée est convergente.

D'autre part

$$S_{2p} < S < S_{2p+1}$$

montre que le reste R_{2p} relatif au terme u_{2p} est inférieur à u_{2p+1} ;

$$S_{2p+2} < S < S_{2p+1}$$

montre que le reste R_{2p+1} relatif au terme u_{2p+1} est négatif, et inférieur en valeur absolue à u_{2p+2} .

Le reste d'une série alternée convergente étudiée avec le théorème précédent a le signe du premier terme négligé, et lui est inférieur en valeur absolue.

4° REMARQUE. — Le théorème des séries alternées contient deux conditions :

a) la condition « $u_n \rightarrow 0$ » est nécessaire, mais n'est pas suffisante;

b) la condition « $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ », jointe à la précédente est suffisante, mais elle n'est pas nécessaire.

$$5^\circ \text{ EXEMPLE. — } u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0); \quad |u_n| = \frac{1}{n^\alpha}.$$

La série (u_n) est absolument convergente si $\alpha > 1$.

Si $0 < \alpha < 1$, la série (u_n) n'est pas absolument convergente. Appliquons le théorème spécial aux séries alternées : $\frac{1}{n^\alpha}$ tend vers zéro, en décroissant, quand n devient infini; la série (u_n) est convergente.

En particulier la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p} + \dots,$$

dite série harmonique alternée est convergente.

203. Sommation par tranches. — Dans cette étude, pour éviter des indices eux-mêmes indexés, nous appellerons $u(n)$ le terme de rang n d'une série Σ , $U(n)$ la somme des n premiers termes de cette série.

Formons une nouvelle série Σ' de la façon suivante; son premier terme, v_1 , est la somme des p_1 premiers termes de la série Σ :

$$v_1 = u(1) + u(2) + \dots + u(p_1);$$

le second terme, v_2 , est la somme des termes qui suivent, jusqu'au rang p_2 :

$$v_2 = u(p_1 + 1) + u(p_1 + 2) + \dots + u(p_2);$$

de façon générale, étant donné la suite des entiers $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, croissants, nous poserons

$$v_n = u(p_{n-1} + 1) + u(p_{n-1} + 2) + \dots + u(p_n).$$

On suppose que le nombre de termes pris pour former chaque terme de la série Σ' est au plus égal à un entier k , donné à l'avance; en d'autres termes

$$p_n - p_{n-1} \leq k; \quad \text{donc} \quad n \leq p_n \leq nk.$$

On suppose en outre que le terme général $u(n)$ de la série Σ tend vers zéro pour n infini.

En posant

$$V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$V_n = U(p_n).$$

1° Si la série Σ est convergente, lorsque n devient infini, et par suite aussi p_n , V_n tend vers la somme U de la série Σ ; la série (v_n) est convergente.

2° Si la série Σ' est convergente, V_n , donc $U(p_n)$ tend vers la somme V de Σ' .

Soit m un entier quelconque; on peut l'encadrer entre deux entiers consécutifs de la suite $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$; soit

$$p_n \leq m \leq p_{n+1} \\ U(m) = U(p_n) + \sigma,$$

σ est une somme de termes de la série Σ , en nombre au plus égal à k ; donc σ tend vers zéro pour m infini et $U(m)$ tend vers V .

On montre, par l'absurde, que si l'une des deux séries est divergente, l'autre l'est aussi. En définitive :

Lorsque le terme général d'une série tend vers zéro, on ne modifie pas la nature de la série, ni sa somme en cas de convergence, en groupant des termes consécutifs en nombre au plus égal à un nombre donné k .

EXEMPLE. — Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$. En distinguant suivant la parité de n , on obtient, pour $n \geq 2$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p} + \dots$$

Cette série n'est pas absolument convergente, puisque

$$|u_n| = \frac{1}{n + (-1)^n} \sim \frac{1}{n}.$$

Elle est alternée, mais on ne peut lui appliquer le théorème relatif aux séries alternées car la valeur absolue du terme général n'est pas décroissante.

Groupons alors les termes 2 par 2, et formons la nouvelle série

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p}\right) + \dots$$

de terme général

$$v_p = \frac{-1}{2p(2p+1)}.$$

v_p est négatif, et d'ordre infinitésimal 2 par rapport à $\frac{1}{p}$; la série (v_p) est donc convergente, donc aussi la série (u_n) .

V. ÉTUDE PRATIQUE D'UNE SÉRIE EXEMPLES ET COMPLÉMENTS

204. Exemples divers d'études de séries. — Pour étudier une série (u_n) à termes réels, de signes quelconques, on commence par étudier la série des valeurs absolues $(|u_n|)$.

Si $|u_n|$ ne tend pas vers zéro, (u_n) diverge.

Avant d'étudier $(|u_n|)$, on essaiera de simplifier l'expression du terme général, de façon à trouver une expression monôme v_n plus simple que $|u_n|$, de même ordre que $|u_n|$; ou bien on pourra trouver un ordre infinitésimal par rapport à $\frac{1}{n}$, ou bien on comparera à la série géométrique à l'aide des règles de Cauchy ou de d'Alembert.

Si la série (u_n) n'est pas absolument convergente, en dehors du cas où, étant alternée, on peut lui appliquer le théorème spécial aux séries alternées, on examinera si on peut grouper convenablement des termes consécutifs.

Dans les cas où on se heurtera dans l'étude de $(|u_n|)$

1° au cas douteux de la règle de Cauchy, on essaiera de trouver ce que devient $n^a |u_n|$ pour n infini;

2° au cas douteux de la règle de d'Alembert, on comparera le rapport $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ avec le rapport analogue pour la série de Riemann $v_n = \frac{1}{n^a}$, en étudiant le signe, pour n assez grand, de la différence, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

EXEMPLE I. — Étudier la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Si le nombre donné m est un entier naturel n , le coefficient de x^{n+1} est nul, ainsi que les suivants, la série se réduit à un polynôme dans lequel on reconnaît le développement de $(1+x)^n$.

Supposons dorénavant que m n'est pas un entier naturel. Appelons u_n le terme général :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|m-n|}{n+1} |x| \rightarrow |x| \begin{cases} |x| < 1, (u_n) \text{ est absolument convergente.} \\ |x| > 1, |u_n| \text{ ne tend pas vers } 0, (u_n) \text{ est divergente.} \end{cases}$$

$$\text{si } |x| = 1, \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n-m}{n+1} \quad \text{pour } n \text{ assez grand } (n > m).$$

$$\frac{n-m}{n+1} \begin{cases} \text{si } m+1 < 0, \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1, (u_n) \text{ est divergente} \\ \text{si } m+1 > 0, \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1, \end{cases} \quad \text{on est dans le cas douteux de la règle de l'Alembert.}$$

Pour $m > -1$ et $|x| = 1$, comparons la série étudiée avec la série de terme général $v_n = \frac{1}{n^a}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^a}{(n+1)^a} \quad \text{ou} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-a};$$

Étudions le signe de la différence

$$\delta = \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{m+1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \quad \text{ou} \quad \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right] - \frac{m+1}{n+1}.$$

Sous cette forme δ est somme de deux infiniment petits, le premier équivalent à $\frac{\alpha}{n}$, le second à $-\frac{m+1}{n}$.

$$\delta \sim \frac{\alpha - (m+1)}{n} \quad \text{si} \quad \alpha \neq m+1;$$

Choisissons α entre 1 et $m+1$ (qui est positif) :

ou bien $0 < m+1 < 1$, alors $m+1 < \alpha < 1$, $\delta > 0$, et comme (v_n) diverge, $|u_n|$ diverge
ou bien $m+1 > 1$, alors $1 < \alpha < m+1$, $\delta < 0$, et comme (v_n) converge, $|u_n|$ converge.

Finalement, pour $m > 0$ et $x = \pm 1$, (u_n) est absolument convergente;

pour $m < 0$, on saura conclure si la série (u_n) a ses termes tous de même signe. Or on peut écrire

$$u_n = (-1)^n \frac{(-m)(1-m) \dots (n-1-m)}{n!} x^n.$$

Pour $x = -1$, on a $u_n > 0$, et la série (u_n) diverge.

Le cas ultime à examiner est celui où $x = 1$, dans le cas où $-1 < m < 0$; l'expression précédente montre alors que la série est alternée; puisque $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$, $|u_n|$ décroît quand n croît. Reste, avant d'appliquer le théorème spécial aux séries alternées, à étudier si $|u_n|$ tend vers zéro pour n infini; $|u_n|$ se présente sous forme d'un produit infini; on se ramène à l'étude d'une série en étudiant le logarithme :

$$\text{Log } |u_n| = \text{Log} \left(\frac{-m}{1} \right) + \text{Log} \left(\frac{1-m}{2} \right) + \dots + \text{Log} \left(\frac{n-1-m}{n} \right).$$

$\text{Log } |u_n|$ est la somme des n premiers termes de la série qui a pour terme général

$$w_n = \text{Log} \left(1 - \frac{m+1}{n} \right); \quad w_n \sim -\frac{m+1}{n};$$

(w_n) est une série négative divergente,

$$\text{Log } |u_n| \rightarrow -\infty, \quad \text{et} \quad |u_n| \rightarrow 0.$$

La série (u_n) est donc convergente dans le cas étudié. Les deux cas limites $m = 0$, $m = -1$, sont immédiats.

EXEMPLE II. — Étudier la série qui a pour terme général

$$u_n = \frac{n + \text{Log } n}{n^2 + 1} x^n.$$

Étudions d'abord $|u_n|$;

$$|u_n| = \frac{n + \text{Log } n}{n^2 + 1} |x|^n \sim \frac{|x|^n}{n} = v_n.$$

si $|x| > 1$, $v_n \rightarrow \infty$, $|u_n| \rightarrow \infty$; (u_n) diverge

si $|x| < 1$, $v_n < |x|^n$; (v_n) converge; (u_n) est absolument convergente,

si $x = 1$, $u_n \sim \frac{1}{n}$, (u_n) diverge

si $x = -1$, (u_n) est une série alternée, non absolument convergente; $|u_n| \rightarrow 0$; pour étudier si $|u_n|$ décroît, considérons la fonction $f(x) = \frac{x + \text{Log } x}{x^2 + 1}$; sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x \text{Log } x + x + 1 + \frac{1}{x}}{(x^2 + 1)^2};$$

le numérateur est un infiniment grand équivalent à $-x^2$, pour x infini positif; c'est donc que, pour x assez grand, $f'(x)$ est négatif, $f(x)$ décroissant; comme $f(n) = |u_n|$, $|u_n|$ décroît et l'on peut conclure à la convergence de (u_n) d'après le théorème spécial aux séries alternées.

EXEMPLE III. — Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$.

Posons
$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad w_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}};$$

(v_n) est une série alternée convergente

(w_n) est une série de Riemann divergente, par conséquent (cf. n° 187), (u_n) est divergente.

On observera que v_n étant d'ordre inférieur à w_n , $u_n \sim v_n$: on a ainsi un exemple de deux séries de nature différente dont les termes généraux sont pourtant des infiniment petits équivalents; mais u_n et v_n n'ont pas un signe fixe.

EXEMPLE IV. — Reprenons la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

u_n peut s'écrire
$$\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}};$$

or
$$\frac{x}{1+x} = x + 0x^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 0 = -1$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{0(n)}{n^2}$$

$v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ donne une série convergente

$w_n = \frac{0(n)}{n^2}$ donne une série absolument convergente et la série (u_n) converge.

Plus généralement, $f(x)$ étant une fonction dont on connaît un développement limité au voisinage de zéro,

$$f(x) = ax + bx^2 + \varepsilon(x)x^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

on demande d'étudier la série de terme général

$$u_n = f\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

$|u_n| \sim \frac{|a|}{n^\alpha}$; donc si $\alpha > 1$, (u_n) est absolument convergente.

Si
$$\alpha \leq 1, \quad u_n = (-1)^n \frac{a}{n^\alpha} + \frac{b}{n^{2\alpha}} + \frac{\eta}{n^{2\alpha}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta = 0.$$

$v_n = (-1)^n \frac{a}{n^\alpha}$ donne une série convergente

$w_n = \frac{b + \eta}{n^{2\alpha}}$ donne une série $\begin{cases} \text{convergente si } 2\alpha > 1 \\ \text{divergente si } 2\alpha \leq 1. \end{cases}$

Donc (u_n) converge si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$

(u_n) diverge si $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

EXEMPLE V. — On a vu (190, 5°) $\varphi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \text{Log } n + C + \varepsilon_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.
On va en déduire la somme de la série harmonique alternée

(1)
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p} + \dots$$

Écrivons $S_{2p} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p} \right)$
 $S_{2p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p} \right)$
 $S_{2p} = \varphi(2p) - \varphi(p) = \text{Log } 2p + C + \varepsilon_{2p} - (\text{Log } p + C + \varepsilon_p)$
et enfin $S_{2p} = \text{Log } 2 + \eta, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \eta = 0$. D'où
 $S_{2p} \rightarrow \text{Log } 2, \quad \text{et aussi} \quad S_{2p+1} = S_{2p} + \frac{1}{2p+1}.$
Par suite $\text{Log } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p} + \dots$

Considérons maintenant la série obtenue en prenant un terme positif de la série harmonique alternée, suivi de deux termes négatifs de cette série, dans l'ordre où ils se présentent.

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \dots$$

Nous pouvons, puisque le terme général tend vers 0, grouper les termes de la façon suivante :

$$(3) \quad \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} \right) - \frac{1}{2(2n+2)} + \dots$$

ou (3) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \dots$

Les séries (2) et (3) sont de même nature.

Or les termes de la série (3) sont les produits par $\frac{1}{2}$ des termes de la série (1); la série (2) est donc convergente et a pour somme $\frac{1}{2} \text{Log } 2$. On a ainsi un exemple simple de deux séries semi-convergentes qui ne diffèrent que par l'ordre des termes, et dont les sommes sont différentes.

205. Étude comparée de séries et d'intégrales. — Le théorème de Cauchy nous a permis de déduire la nature d'une série de la convergence ou de la divergence d'une intégrale simple.

Inversement, la théorie des séries étant acquise, on peut, dans certains cas, en déduire la nature de certaines intégrales simples.

EXEMPLE 1. — La fonction $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ est positive pour $t \in]2k\pi, 2k\pi + \pi[$, négative pour $t \in](2k-1)\pi, 2k\pi[$; elle est définie par continuité pour $t = 0$, soit $\varphi(0) = 1$.

Soit
$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad n\pi < x < (n+1)\pi.$$

On peut écrire

$$F(x) = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + R_n$$

en posant
$$a_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt, \quad R_n = \int_{n\pi}^x \varphi(t) dt.$$

L'interprétation géométrique montre que la courbe Γ qui représente $\varphi(t)$ présente des arcs alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe Ot ; a_k est l'aire de la k^{e} arche limitée par Γ et l'axe Ot (fig. 70).

On peut comparer les nombres a_k en donnant les mêmes bornes à toutes les intégrales définies au moyen du changement de variable

$$t = (k-1)\pi + u, \quad a_k = \int_0^\pi \frac{\sin u}{(k-1)\pi + u} du$$

alors

$$\frac{\sin u}{(k-1)\pi + u} > \frac{\sin u}{k\pi + u} \Rightarrow a_{k-1} > a_k.$$

D'autre part, pour $0 \leq u \leq \pi$,

$$\frac{\sin u}{k\pi} \leq \frac{\sin u}{(k-1)\pi + u} \leq \frac{\sin u}{(k-1)\pi}$$

et, en intégrant entre 0 et π ,

$$(1) \quad \frac{2}{k\pi} \leq a_k \leq \frac{2}{(k-1)\pi}.$$

L'inégalité de droite montre que a_k tend vers zéro lorsque k devient infini. Par suite $S_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n$ est la somme des n premiers termes d'une série alternée qui est convergente d'après la règle du n° 202.

L'inégalité $|R_n| < a_{n+1}$ montre que R_n tend aussi vers zéro lorsque n devient infini. Donc $F(x)$ tend vers la somme S de la série précédente lorsque $x \rightarrow +\infty$.

En d'autres termes

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = S.$$

Un raisonnement analogue montrera que si $f(t)$ est une fonction

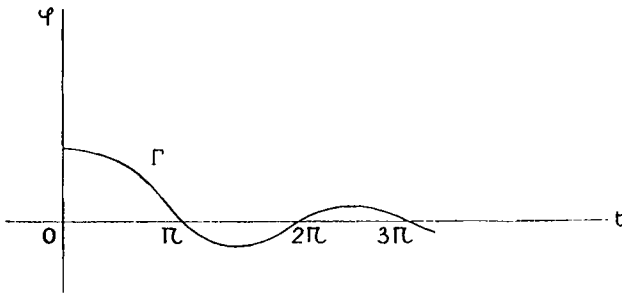


FIG. 70.

1° positive; 2° décroissante pour $t \geq 0$; 3° tendant vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \sin t dt$ est convergente.

EXEMPLE II. — Posons

$$G(x) = \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

Avec les notations de l'exemple précédent, nous pouvons écrire,

$$G(x) = a_1 + a_2 + \dots + a_n + R'_n$$

avec

$$R'_n = \int_{n\pi}^x \frac{|\sin t|}{t} dt, \quad n\pi < x < (n+1)\pi$$

R'_n tend vers 0 lorsque n devient infini.

Mais l'inégalité de gauche de la formule (1) de l'exemple précédent montre que la série à termes positifs (a_k) est minorée par une série harmonique, elle est donc divergente, et

l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

est divergente.

*EXEMPLE III. — Soit $I = \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}} dx \quad (a > 0)$

$$|x| < a \implies 1 \leq \sqrt{1+x^2} < \sqrt{1+a^2}$$

par suite

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \leq \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}} < \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

et

$$\pi < I < \pi \sqrt{1+a^2}.$$

Il en résulte $\lim_{a \rightarrow 0} I = \pi$.

L'infiniment petit $I \rightarrow \pi$ a-t-il une partie principale, en choisissant a comme infiniment petit principal?

$$I - \pi = \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx.$$

Ramenons-nous à des limites fixes dans l'intégrale simple, en posant $x = at$

$$I - \pi = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+a^2t^2} - 1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

D'après un résultat qui sera vu au n° 222

$$\sqrt{1+a^2t^2} = 1 + \frac{a^2t^2}{2} - \frac{1}{8}a^4t^4 + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1}{8} \frac{3 \cdot \dots \cdot (2p-3)}{6 \cdot \dots \cdot 2p} \cdot a^{2p}t^{2p} + \dots$$

la série étant convergente quel que soit $t \in]-1, +1[$ pourvu que $a < 1$, d'après le théorème relatif aux séries alternées. C'est donc que

$$\sqrt{1+a^2t^2} - 1 = \frac{a^2t^2}{2} + R(t), \quad \text{avec} \quad |R(t)| < \frac{1}{8}a^4t^4.$$

$$I - \pi = \frac{a^2}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{-1}^{+1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

La première intégrale se calcule en posant $t = \sin \varphi$; sa valeur est $\frac{\pi}{2}$. La seconde peut être majorée :

$$\left| \int_{-1}^{+1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| < \frac{a^4}{8} \int_{-1}^{+1} \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} = k \cdot \frac{a^4}{8}.$$

Finalement

$$\frac{I - \pi}{a^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{B}{a^2} \quad \text{avec} \quad \left| \frac{B}{a^2} \right| < \frac{k a^2}{8}.$$

Il est ainsi prouvé, $\frac{B}{a^2}$ tendant vers zéro, que

$$I - \pi \sim \frac{\pi}{4} a^2.$$

EXERCICES

Dans les exercices de ce chapitre $a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots, h, k, \dots, x, y, z, \dots$ désignent des nombres réels donnés; on supposera $a, b, \alpha, \beta, h, k$, etc positifs, $x, y, z, \dots$ de signes quelconques. En première lecture, on pourra se borner à supposer $x, y, z, \dots$ positifs.

1. — Trouver la nature de la série qui a pour terme général :

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}; \quad \frac{x^n}{n+y^n}; \quad \frac{\operatorname{Log}[1+x^n]}{y^n}; \quad \frac{1}{n \operatorname{Log}[1+x^n]}; \quad a\sqrt[n]{n}; \quad e^{-\sqrt[n]{n+1}}; \\ & \frac{x^n + \operatorname{sh} n}{3^n} y^n; \quad (a^n + a\sqrt[n]{n}) \sin \frac{x}{2^n}; \quad e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad \cos \left(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} n + \frac{1}{n^a}\right); \\ & \operatorname{Arc} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n^a}\right) - \frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{1 - \frac{1}{n}}; \\ & \sqrt[3]{\operatorname{Log}(2n+1)} - \sqrt[3]{\operatorname{Log} 2n}; \quad \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^n}; \quad \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^n}; \quad (1 + \operatorname{th} n)^{\frac{1}{n}} - \sqrt[n]{a}; \\ & \frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}}; \quad \frac{1}{n^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)}}; \quad \frac{1}{n^{\operatorname{coth} n}}; \quad \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}; \quad a^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}; \\ & \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}; \quad \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+2)!}; \quad n! \left(\frac{x}{n}\right)^n; \quad \frac{(nx)^n}{n!}; \\ & \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} x^n; \quad \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n; \quad \left(\operatorname{Log} \frac{n+1}{n-1}\right)^a n^b x^n; \quad \left(n^2 - \cot^2 \frac{1}{n}\right) \frac{x^n}{n^a}; \\ & n^a \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^b t \, dt; \quad \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + at^2}; \quad \int_0^1 (1-t^a)^n \, dt; \quad \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{t} \, dt}{1 + \sqrt[3]{t}}. \end{aligned}$$

2. — On désigne par p le nombre des chiffres de l'entier n supposé écrit dans le système décimal de numération. Étudier la série qui a pour terme général :

$$\frac{1}{nx^p}; \quad \frac{1}{np^a}; \quad x^n y^{p^2}; \quad x^{n-p} y^{\frac{n}{p^2}}.$$

3. — Sommer la série dont le terme général est

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}; \quad \operatorname{Log} \left[1 + \frac{2}{n(n+3)}\right]; \quad \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2 + 3n + 3}; \quad \frac{1}{n^2 - 1} \quad (n \geq 2) \\ & \frac{4n-3}{n(n^2-4)} \quad (n \geq 3); \quad \frac{a+n-1}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} \quad (a > 0); \quad \frac{n^2+n-3}{n!}. \end{aligned}$$

4. — De la convergence des séries (u_n) et (v_n) , à termes positifs, déduire la convergence de la série dont le terme général est

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{u_n}; \quad \sqrt[n]{u_n v_n}; \quad \sqrt[3]{u_n^2 v_n}; \quad \frac{u_n v_n}{au_n + bv_n} \quad (a > 0, b > 0)$$

5. — La convergence de la série (u_n) , à termes positifs, entraîne celle de la série dont le terme général est $v_n = \sqrt[n]{u_n u_{n+1}}$. La réciproque est-elle vraie?

6. — La convergence de la série (u_n) , à termes positifs, implique-t-elle

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0?$$

7. — (u_n) est une série divergente à termes positifs. Nature de la série dont le terme général est $v_n = \frac{u_n}{u_1 + u_2 + \dots + u_n}$.

On pourra calculer $\prod_{k=2}^n (1 - v_k)$.

8. — Nature de la suite dont le terme général est

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}; \quad \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} - \operatorname{Arg sh} n$$

$$\frac{\operatorname{Log} 2}{2} + \frac{\operatorname{Log} 3}{3} + \dots + \frac{\operatorname{Log} n}{n} - \frac{1}{2}(\operatorname{Log} n)^2; \quad \frac{n(n+1)}{2} - n^2 \operatorname{Log} n + \sum_{k=1}^n 2k \operatorname{Log} k$$

$$\sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!}} \quad (a > 0); \quad \sqrt{n! \sin a \cdot \sin \frac{a}{2} \dots \sin \frac{a}{n}} \quad (0 < a < \pi).$$

9. — Une suite $\{S_n\}$ est définie par l'égalité $S_1 = 1$ et la formule

$$2S_{n+1} = S_n + \sqrt{S_n^2 + a_n}$$

où a_n est le terme général d'une série donnée à termes positifs.

Démontrer l'inégalité

$$S_{n+1} < S_n + \frac{a_n}{4}$$

et en conclure que S_n tend vers une limite quand n devient infini si la série (a_n) est convergente. La réciproque est-elle vraie?

10. — Soit

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \dots + \frac{1}{(2n)^p}.$$

a) On demande pour quelles valeurs de p cette expression tend vers zéro quand n devient infini et pour quelles valeurs de p elle est le terme général d'une série convergente;

b) Évaluer dans ce cas la somme de cette série en supposant connue pour $q = p$ et pour $q = p - 1$ la somme

$$f(q) = 1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^q} + \dots + \frac{1}{n^q} + \dots$$

11. — On pose : $S(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \frac{1}{3^{1+\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{1+\alpha}} + \dots$; $\alpha > 0$.

Démontrer que, lorsque α tend vers 0, le produit $\alpha \cdot S(\alpha)$ reste fini et ne tend pas vers 0.

12. — (u_n) est une série convergente à termes positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$.

Montrer que la série qui a pour terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que la première.

13. — Soient u_n et v_n deux fonctions positives de l'entier n telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

a) Si les séries (u_n) et (v_n) sont convergentes, les restes R_n et R'_n de ces séries sont des infiniment petits équivalents;

b) Si les séries (u_n) et (v_n) sont divergentes, les sommes S_n et S'_n de leurs n premiers termes sont des infiniment grands équivalents.

14. — Trouver la nature de la série dont le terme général est :

$$\frac{(-1)^n}{n^n \sqrt{n}}; \quad \sin \pi \frac{n^2 + a}{n}; \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}; \quad \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}; \quad \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + \cos n};$$

$$\frac{\sqrt{n} + (-1)^n \sqrt[4]{n^2 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + n^2}}; \quad \cos\left(\pi n^2 \operatorname{Log} \frac{n}{n-1}\right); \quad \frac{a}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad \operatorname{Log}\left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\operatorname{Log} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + a}; \quad (-1)^n \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right) a^{2n+1};$$

$$-1)^n \int_{n\pi}^{n\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{t^a}{t^a} dt; \quad (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}, \quad P \text{ et } Q \text{ étant des polynômes donnés.}$$

15. — Trouver la nature de la série qui a pour terme général :

$$x^n \cos^n \left(y + \frac{z}{n} \right); \quad x^n \operatorname{tg}^n \left(y + \frac{z}{n} \right); \quad \frac{1}{n} \left(\frac{nx + h}{ny + k} \right)^n;$$

$$\left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2} \right)^{n^2}; \quad \left(\frac{xn^2 + yn + z}{n^2 + pn + q} \right)^{n^2};$$

16. — Règles de Duhamel et de Darboux. — a) On pose

$$v_n = \frac{1}{n^h} \quad \text{et} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1 + \beta_n};$$

montrer que $n \beta_n$ tend vers h quand n devient infini.

b) Si, u_n étant le terme général d'une série à termes positifs, on définit α_n par l'égalité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n}$$

et si à partir d'un certain rang

$$n \alpha_n > k > 1$$

la série est convergente; si à partir d'un certain rang, $0 < n \alpha_n \leq 1$, la série est divergente (Règle de Duhamel). Que peut-on dire si $n \alpha_n$ tend vers une limite quand n devient infini?

(On obtiendra ces résultats en comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, h étant convenablement choisi).

c) Si, u_n étant le terme général d'une série alternée, on définit α_n par l'égalité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = - \frac{1}{1 + \alpha_n}$$

et si à partir d'un certain rang $-1 < \alpha_n < 0$, la série est divergente; si à partir d'un certain rang on a

$$n \alpha_n > k > 0$$

la série est convergente (Règle de Darboux). Que peut-on dire si $n \alpha_n$ tend vers une limite quand n devient infini? (On obtiendra ces résultats en utilisant la série dont le terme général est v_n).

17. — Étudier la série qui a pour terme général

$$\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} x^n, \quad \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n} \frac{x^n}{2n+1},$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} \sin x \sin \frac{x}{2} \dots \sin \frac{x}{n};$$

$$\frac{(h+x)(h+2x) \dots (h+nx)}{(k+y)(k+2y) \dots (k+ny)}; \quad \frac{(x+2)\left(x+2^{\frac{1}{2}}\right) \dots \left(x+2^{\frac{1}{n}}\right)}{(y+2)\left(y+2^{\frac{1}{2}}\right) \dots \left(y+2^{\frac{1}{n}}\right)}.$$

18. — Nature de la série (u_n) , à termes positifs, dans laquelle on a, à partir d'un certain rang :

$$\sqrt[n]{u_n} < 1 - \frac{1}{\operatorname{Log} n}; \quad \sqrt[n]{u_n} < 1 - \frac{1}{n^k} \quad (0 < k < 1);$$

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 + k \quad (k > 0); \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \quad (k < 1).$$

19. — Calculer la somme d'une série convergente à termes positifs sachant que, u_n étant le terme général de cette série,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

a et b étant des constantes. On montrera : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0$.

Application.

$$u_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n(2n+2)}.$$

20. — A partir de la série harmonique $\left(\frac{1}{n}\right)$, on forme une nouvelle série a) en changeant le signe de deux termes consécutifs, en gardant le signe des deux termes précédents :

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

nature de cette série?

b) en écrivant trois termes consécutifs de dénominateur impair, suivis d'un terme négatif, produit par $-k$ ($k > 0$) d'un terme de dénominateur pair :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{k}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{k}{4} + \dots$$

nature de cette série?

c) en supprimant le premier terme, en gardant le second, en supprimant deux termes à la suite, en gardant le suivant, en supprimant trois termes à la suite, en gardant le suivant, etc. :

$$[1] + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{5} + \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \frac{1}{9} + \dots$$

(on a mis entre crochets les termes supprimés) nature de cette série?

21. — Dans la série $\left(\frac{1}{\text{Log } n}\right)$ on remplace les termes de la forme $\frac{1}{\text{Log } 3^p}$ par $\frac{-2}{\text{Log } 3^p}$; nature de la nouvelle série ainsi obtenue?

22. — Étudier la suite dont le terme général est $J_n = \int_0^1 \frac{x^n \text{Log } x}{x-1} dx$.

(on peut majorer J_n en observant que, sur $]0,1[$,

$$\frac{x \text{Log } x}{x-1} < 1).$$

En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\text{Log } x}{x-1} dx$, en admettant que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

23*. — a) *Lemme d'Abel*. — Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite positive décroissante, $\{v_n\}$ une suite à termes réels ou complexes telle que, en posant $s_p = v_0 + v_1 + \dots + v_p$, on ait $|s_p| < A$, $\forall p$, A étant fixe.

On donne $V_p = \varepsilon_0 v_0 + \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_p v_p$. Démontrer que $|V_p| < A \varepsilon_0$, $\forall p$.

En observant que $v_p = s_p - s_{p-1}$, on écrit

$$V_p = s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots + s_{p-1}(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p \varepsilon_p,$$

et l'on majorera $|V_p|$ en remarquant que toutes les différences $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, ... sont positives.

b) *Règle d'Abel*. — Soit (v_n) une série telle que $|v_0 + v_1 + \dots + v_n| < A$, A étant fixe, $\forall n$, et $\{\varepsilon_n\}$ une suite positive, décroissante, admettant pour limite 0. Démontrer que la série $(u_n = \varepsilon_n v_n)$ est convergente.

L'hypothèse entraîne $|v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+p}| < 2A$, quels que soient n et p ; le lemme d'Abel entraîne

$$|\varepsilon_{n+1} v_{n+1} + \varepsilon_{n+2} v_{n+2} + \dots + \varepsilon_{n+p} v_{n+p}| < 2A \varepsilon_{n+1}.$$

On peut alors conclure à la convergence de (u_n) par application du théorème général sur la convergence (n° 186, 3°).

c) Étudier la nature des séries $\left(\frac{\cos nx}{n}\right)$ et $\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$.

24. — Montrer que les séries de termes généraux :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

sont convergentes. Comparer leurs sommes.

25. — Étudier l'existence des intégrales suivantes, en les comparant à des séries

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx; \quad \int_0^{+\infty} \cos^2(x^2) dx; \quad \int_0^a \sin \frac{1}{x} dx; \quad \int_0^a x^2 \sin \frac{1}{x} dx;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2 \sin^2 x}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2 \sin^2 x}.$$

26. — *Produits infinis.* — a) Si la série à termes positifs (u_n) est convergente, le produit

$$P_n = (1 - u_1) (1 - u_2) \dots (1 - u_n)$$

tend, quand n devient infini, vers une limite P différente de zéro si aucun des termes de la série (u_n) n'est égal à 1.

En supposant toujours que la série (u_n) est convergente démontrer que le produit

$$Q_n = (1 + u_1) \dots (1 + u_n)$$

tend vers une limite.

b) Si la série (u_n) à termes positifs est divergente, le produit Q_n défini plus haut devient infini avec n ; le produit P_n tend vers 0 lorsque $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ sont tous inférieurs à 1. On pourra utiliser

$$Q_n > u_1 + u_2 + \dots + u_n; \quad 0 < u_k < 1 \implies 0 < 1 - u_k < \frac{1}{1 + u_k}.$$

c) Si une série (u_n) est absolument convergente le produit

$$(1 + u_1) (1 + u_2) \dots (1 + u_n)$$

tend vers une limite qui n'est nulle que si l'un des facteurs est nul.

(Le lecteur observera que l'emploi des logarithmes ramène l'étude d'un produit infini à celle d'une série.)

27*. — *Formule de Stirling.* — a) Montrer que la suite de terme général

$$y_n = \frac{1}{n!} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

admet une limite finie, non nulle, l .

b) Calculer l en utilisant la formule de Wallis (n° 180). En déduire la formule

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} (1 + \varepsilon_n); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

28*. — On désigne par p_n le n -ième nombre premier. Étudier la série $\left(u_n = \frac{1}{p_n}\right)$. On pourra commencer par étudier la série dont le terme général est

$$v_n = \text{Log} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}.$$

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

SÉRIES ENTIÈRES

I. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Ce sous-chapitre ne s'adresse, dans sa totalité, qu'aux lecteurs suivant le programme A'2; les lecteurs qui suivent le programme A2 n'appliqueront la définition de la convergence uniforme et ses conséquences relatives à la continuité et à l'intégration qu'aux seules séries entières.

206. Suites de fonctions. — 1° DÉFINITION. — On appelle suite de fonctions toute application de l'ensemble des entiers naturels dans l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle (resp. fonctions complexes d'une variable complexe) définies sur un intervalle ouvert (resp. disque ouvert) donné $\mathcal{C}$.

On note f_n la fonction associée à l'entier n , et la suite, dite de terme général f_n , est notée $\{f_n\}$.

Pour une valeur donnée $x \in \mathcal{C}$, $\{f_n(x)\}$ est une suite numérique dont la convergence a été définie au n° 21. Si cette convergence a lieu en tout point de $\mathcal{C}$, on donne alors la définition suivante.

2° **Convergence simple d'une suite de fonctions.** — DÉFINITION. — a) Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions, réelles ou complexes, définies sur un champ $\mathcal{C}$. On dit que $\{f_n\}$ converge simplement sur $\mathcal{C}$ si, pour tout point x de $\mathcal{C}$, la suite numérique $\{f_n(x)\}$ est convergente.

b) La fonction f définie sur $\mathcal{C}$ par $f(x) = \lim f_n(x)$ est dite limite de la suite $\{f_n\}$.

Comme au chapitre II, nous nous dispenserons d'écrire « quand n tend vers l'infini » lorsqu'il s'agira de la limite d'une suite.

D'après la définition du n° 21

$$(1) \quad x \in \mathcal{C}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon, x) \quad \text{tel que} \\ n > N(\varepsilon, x) \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nous avons écrit $N(\varepsilon, x)$ pour rappeler que N dépend non seulement du choix de ε , mais aussi du point x choisi dans $\mathcal{C}$.

EXEMPLE. — $\{f_n\}$ est la suite des fonctions réelles de la variable réelle définies sur $\mathcal{C} = [0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$

La limite est la fonction f définie sur $\mathcal{C}$ par

$$f(0) = 0; \quad f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 0.$$

I. — Cherchons N, ε et x étant donnés.

a) $|f_n(0) - f(0)| = 0$; pour $x = 0$, N est arbitraire.

b) si $x > 0$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1 + nx}$.

$$\frac{1}{1 + nx} < \varepsilon \iff n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon x};$$

Si ε est donné, supérieur à 1, N est arbitraire; mais si ε est donné, inférieur à 1, N est un entier supérieur à $\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon x}$.

Comme l'expression $\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon x}$ n'est pas majorée sur $]0, +\infty[$, il n'existe pas de nombre N qui puisse servir dans l'inégalité (1), pour toutes les valeurs de $x \in \mathcal{C}$.

II. — Chaque fonction f_n est continue sur $\mathcal{C}$, mais la limite f n'est pas une fonction continue sur $\mathcal{C}$.

Lorsqu'il existe un nombre N qui peut servir dans l'inégalité (1), quel que soit x pris dans $\mathcal{C}$, on donne alors une nouvelle définition.

3° Convergence uniforme d'une suite de fonctions. — a) DÉFINITION. — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions, réelles ou complexes, définies sur un champ $\mathcal{C}$. On dit que $\{f_n\}$ converge uniformément vers une fonction f définie sur $\mathcal{C}$ si

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathcal{C} \\ n > N(\varepsilon) \end{array} \right\} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

ou encore si $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que,} \quad \forall n > N(\varepsilon), \sup_{x \in \mathcal{C}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

On dit alors que f est *limite uniforme* de la suite $\{f_n\}$.

On notera la place différente dans (1) et (2) de la condition relative à x .

La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque n'est pas vraie.

EXEMPLE. — Considérons la suite $\{f_n\}$ du 2° sur le domaine $\mathcal{D} = [1, +\infty[$.

$$\text{Si } x \in \mathcal{D}, \quad |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + n};$$

$$\frac{1}{1 + n} < \varepsilon \iff n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Il suffit, ε étant inférieur à 1, de choisir pour n un entier supérieur à $\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$, pour que, nécessairement, $|f_n(x) - f(x)|$ soit inférieur à ε , quel que soit x pris dans $\mathcal{D}$.

La suite $\{f_n\}$ est uniformément convergente sur le domaine $\mathcal{D}$.

b) *Continuité.* — THÉORÈME I. — Si la suite $\{f_n\}$ de fonctions, toutes continues sur le champ $\mathcal{C}$, converge uniformément sur $\mathcal{C}$ vers la fonction f , celle-ci est continue sur $\mathcal{C}$.

Les fonctions f_n sont réelles (ou complexes), le champ $\mathcal{C}$ est un intervalle (ou un disque) ouvert.

Posons $f(x) = f_n(x) + \delta_n(x)$, $x \in \mathcal{C}$; montrons la continuité de f en un point arbitraire x_0 de $\mathcal{C}$.

$$(3) \quad \begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= [f_n(x) - f_n(x_0)] + \delta_n(x) - \delta_n(x_0) \\ |f(x) - f(x_0)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\delta_n(x)| + |\delta_n(x_0)|. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de convergence uniforme, nous savons qu'étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N(\varepsilon)$ tel que

$$n > N(\varepsilon) \implies |\delta_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |\delta_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ayant choisi un nombre n , fixe, supérieur à $N(\varepsilon)$, f_n est une fonction continue au point x_0 . Au nombre $\varepsilon > 0$ considéré plus haut on peut donc associer $\alpha > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \alpha \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, d'après (3), $|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La proposition en résulte.

REMARQUE I. — Si la limite f de la suite $\{f_n\}$ de fonctions continues sur $\mathcal{C}$ n'est pas continue sur $\mathcal{C}$, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathcal{C}$.

REMARQUE II. — Le théorème I donne une condition suffisante pour que f , limite de $\{f_n\}$, soit continue; cette condition n'est pas nécessaire, il peut arriver que, f_n étant continue, f soit continue, sans que la convergence soit uniforme.

Le lecteur vérifiera qu'il en est ainsi par exemple pour la suite $\{f_n\}$ de fonctions continues définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2}.$$

La limite f est définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 0$. La limite est continue, quoique la convergence ne soit pas uniforme.

4° Intégration et dérivation. — Les deux théorèmes suivants ne s'appliquent qu'à des suites de fonctions réelles d'une variable réelle.

THÉORÈME II. — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions réelles, continues sur le segment réel $[a, b]$, qui converge uniformément vers la fonction f . Posons

$$x \in [a, b], \quad F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

La suite de fonctions $\{F_n\}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction F .

F existe à cause de la continuité de f sur $[a, b]$ vue au théorème I. Posons

$$f(x) = f_n(x) + \delta_n(x).$$

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_a^x [f_n(t) - f(t)] dt \right| \leq \left| \int_a^x |\delta_n(t)| dt \right|$$

D'après la convergence uniforme de $\{f_n\}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [a, b] \\ n > N \end{array} \right\} \implies |\delta_n(t)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|}$$

et par suite,

$$\forall x \in [a, b], \quad \left| \int_a^x |\delta_n(t)| dt \right| < \frac{\varepsilon}{|b-a|} \cdot |x-a| \leq \varepsilon.$$

En définitive, on peut écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [a, b] \\ n > N \end{array} \right\} \implies |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

La proposition énoncée en résulte; elle se résume par la formule

$$(4) \quad \int_a^x [\lim f_n(t)] dt = \lim \int_a^x f_n(t) dt.$$

REMARQUE. — Le théorème II donne une condition suffisante pour qu'on puisse intervertir, dans la formule (4), l'intégration et la recherche de la limite; cette condition suffisante n'est pas nécessaire, il peut arriver que la formule (4) soit vérifiée sans que la convergence soit uniforme.

EXEMPLE I. — Reprenons la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

et considérons-la sur l'intervalle fermé $[0, 1]$.

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{nt}{1+nt} dt = x - \frac{1}{n} \text{Log}(1+nx)$$

la limite de $\{F_n\}$ est la fonction F définie par

$$F(x) = x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Montrons que $\{F_n\}$ converge uniformément vers F sur $[0, 1]$:

$$|F_n(x) - x| = \frac{\text{Log}(1+nx)}{n} < \frac{\text{Log}(1+n)}{n} \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n > N \implies \frac{\text{Log}(1+n)}{n} < \varepsilon,$$

et alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [0, 1] \\ n > N \end{array} \right\} \implies |F_n(x) - x| < \varepsilon.$$

On a vu au 2° que $\{f_n\}$ ne converge pas uniformément vers sa limite f , définie par

$$f(0) = 0, \quad f(x) = 1 \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1;$$

f est intégrable sur $[0, 1]$ (cf. n° 86) : $\int_0^x f(t) dt = x$.

La formule (4) est vraie dans ce cas particulier, bien que la convergence ne soit pas uniforme.

EXEMPLE II. — Reprenons la suite considérée au théorème I et pour laquelle la convergence n'est pas uniforme

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2} \quad x \in [0, 1]$$

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt = \frac{1}{2n} \text{Log}(1 + n 2^n x^2).$$

$$\lim F_n(0) = 0; \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad \lim F_n(x) = \frac{1}{2} \text{Log } 2.$$

Mais d'autre part $\int_0^x [\lim f_n(t)] dt = 0$.

La formule (4) n'est pas applicable dans ce cas.

THÉORÈME III. — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions réelles définies sur le segment réel $[a, b]$, et admettant sur ce segment des dérivées continues. On suppose que la suite de fonctions $\{f'_n\}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g et qu'il existe un point $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite numérique $\{f_n(x_0)\}$ converge. Alors la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une primitive convenablement choisie de la fonction g .

Posons

$$\varphi_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

D'après le théorème II, la suite de fonctions $\{\varphi_n\}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Or $\varphi_n(x) = f_n(x) - f_n(x_0)$ et, par ailleurs, la suite numérique $\{f_n(x_0)\}$ admet une limite l . On en déduit que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge uniformément vers la fonction f telle que $f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t) dt$.

On en déduit $g(x) = f'(x)$.

La proposition en résulte; elle se résume par la formule

$$(5) \quad \frac{d}{dx} [\lim f_n(x)] = \lim f'_n(x).$$

5° Intégrabilité d'une fonction, limite uniforme de fonctions intégrables. —

THÉORÈME. — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions réelles, bornées et intégrables sur le segment $[a, b]$, ($a < b$); si $\{f_n\}$ converge uniformément vers la fonction f , cette fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

a) Posons
$$I_n = \int_a^b f_n(t) dt.$$

D'après la convergence uniforme de $\{f_n\}$, à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer $N(\varepsilon)$ tel que

$$\{\forall t \in [a, b], \quad n > N(\varepsilon) \} \implies |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

On en déduit que, si p et q sont deux entiers supérieurs à $N(\varepsilon)$, on a, pour tout $t \in [a, b]$,

$$|f_q(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f_p(t) - f(t)| < \varepsilon$$

ce qui entraîne

$$|f_p(t) - f_q(t)| < 2\varepsilon \quad \text{et, par suite,} \quad |I_p - I_q| < 2\varepsilon(b - a).$$

Il en résulte que la suite numérique $\{I_n\}$ est une suite de Cauchy et qu'elle admet une limite, que nous désignerons par I .

b) Soit ε un nombre positif donné. Nous pouvons lui associer un naturel fixe ν , assez grand pour que

$$(6) \quad |I_\nu - I| < \varepsilon \quad \text{et}$$

$$(7) \quad \forall t \in [a, b], \quad |f(t) - f_\nu(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Cela posé, à toute subdivision (d) de $[a, b]$ en m intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ associons les deux sommes

$$\sigma(d) = \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) f(t_i) \quad \text{et} \quad \sigma_\nu(d) = \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) f_\nu(t_i).$$

Nous constatons que

$$|\sigma(d) - \sigma_\nu(d)| \leq \sup |f(t_i) - f_\nu(t_i)| \times \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}).$$

Compte-tenu de (7) et de $\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) = b - a$, on en déduit

$$(8) \quad |\sigma(d) - \sigma_\nu(d)| < \varepsilon.$$

D'autre part, d'après la définition de l'intégrale simple, on peut associer à ε un nombre positif α tel que toute subdivision (d) dont le module, $\sup |t_i - t_{i-1}|$, est inférieur à α vérifie

$$(9) \quad |\sigma_\nu(d) - I_\nu| < \varepsilon.$$

En écrivant

$$|\sigma(d) - I| \leq |\sigma(d) - \sigma_\nu(d)| + |\sigma_\nu(d) - I_\nu| + |I_\nu - I|$$

on constate que toute subdivision (d) dont le module est inférieur à α vérifie

$$|\sigma(d) - I| < 3\varepsilon,$$

ce qui montre que f admet I pour intégrale sur $[a, b]$; la proposition en résulte.

EXTENSION DU THÉORÈME II. — La fonction f , limite uniforme de la suite $\{f_n\}$ est,

a fortiori, intégrable sur tout sous-segment $[a, x]$ de $[a, b]$. Nous pouvons donc reprendre alors la démonstration du théorème II du 4°, et énoncer :

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions réelles, bornées et intégrables sur le segment $[a, b]$, convergeant uniformément vers la fonction f . Posons

$$x \in [a, b], \quad F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

La suite de fonctions $\{F_n\}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction F .

207* Les fonctions étagées. — 1° DÉFINITION. — Une fonction réelle de la variable réelle, f , définie sur un segment $[a, b]$, est dite fonction étagée sur $[a, b]$ s'il existe une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f (cf. n° 87).

THÉORÈME. — Une fonction f , définie sur un segment $[a, b]$, est étagée si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier sur $[a, b]$, φ_ε , qui approche f à ε près, ce qui signifie que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

I. Soit f une fonction étagée, c'est-à-dire limite uniforme d'une suite $\{f_n\}$ de fonctions en escalier. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que toute fonction f_n correspondant à $n > N(\varepsilon)$ est une fonction en escalier qui approche f à ε près.

II. Soit f une fonction telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier, φ_ε , qui approche f à ε près. En posant $f_n = \varphi_{\frac{1}{n}}$, nous déterminons une suite $\{f_n\}$ de fonctions en escalier; à tout $\varepsilon' > 0$, associons $N(\varepsilon')$, plus petit entier naturel supérieur à $\frac{1}{\varepsilon'}$; pour tout $n > N(\varepsilon')$, f_n approche f à $\frac{1}{n}$ près, c'est-à-dire

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\varepsilon')} < \varepsilon'.$$

Il en résulte que $\{f_n\}$ converge uniformément vers f .

2° THÉORÈME. — L'ensemble $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}^*$) des fonctions en escalier (resp. étagées) sur le segment donné $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel Φ , (40, 3°), des fonctions définies sur $[a, b]$.

λ désigne un réel quelconque.

I. Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$; $\lambda\varphi$ (resp. $\varphi + \psi$) qui est constante entre deux discontinuités consécutives de φ (resp. de φ ou de ψ) est une fonction en escalier.

II. Soient f et g deux fonctions étagées sur $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ_ε (resp. ψ_ε) qui approche f (resp. g) à ε près; $\lambda\varphi_\varepsilon$ (resp. $\varphi_\varepsilon + \psi_\varepsilon$), qui est une fonction en escalier d'après I, approche λf (resp. $f + g$) à $|\lambda|\varepsilon$ (resp. 2ε) près; λf (resp. $f + g$) est donc une fonction étagée.

Une fonction en escalier, f , étant une fonction étagée particulière, $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}^*$.

3° THÉORÈME. — Si une suite $\{f_n\}$ de fonctions étagées sur $[a, b]$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f , celle-ci est étagée.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$, arbitraire; du fait de la convergence uniforme de $\{f_n\}$ vers f , on peut trouver un entier naturel m assez grand tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme f_m est une fonction étagée, il existe une fonction en escalier φ_ε qui l'approche à $\frac{\varepsilon}{2}$ près, c'est-à-dire

$$\forall x \in [a, b], \quad |f_m(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Quel que soit ε , il existe une fonction en escalier qui approche f à ε près; f est donc une fonction étagée.

4^o THÉORÈME. — Les points de discontinuité d'une fonction étagée sont de première espèce; ils forment un ensemble fini ou dénombrable (éventuellement vide).

Soit f une fonction étagée sur $[a, b]$, $a < b$, limite uniforme d'une suite $\{f_n\}$ de fonctions en escalier. Nous désignons par D_n l'ensemble (fini) des points de $[a, b]$ en lesquels f_n est discontinue et par D la réunion des D_n .

1) Soit x_0 un point de $[a, b]$ qui n'appartient pas à D . La continuité des f_n en x_0 entraîne celle de f , ainsi que le montre le raisonnement du n° 206, 3^o, b , qui reste valable. Les seuls points de discontinuité possible de f sont donc les points de D , qui est un ensemble fini ou dénombrable (I, 26, 4^o).

II) Soit maintenant $x_0 \in D$. En supposant $x_0 \neq b$, on sait que chaque fonction f_n admet en x_0 une limite à droite, $f_n(x_0 + 0)$, qui est la valeur prise par f_n sur un intervalle ouvert $[x_0, x_0 + \alpha_n]$, $\alpha_n > 0$.

Étudions la suite numérique $\{f_n(x_0 + 0)\}$. D'après la convergence uniforme de $\{f_n\}$ sur $[a, b]$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [a, b] \\ \forall n > N(\varepsilon) \end{array} \right\} \implies |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Choisissons deux entiers quelconques, p et q , supérieurs à $N(\varepsilon)$;

$$\forall x \in [a, b], \quad |f_p(x) - f_q(x)| < 2\varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall x \in [x_0, x_0 + \alpha_p] \cap [x_0, x_0 + \alpha_q], \quad \text{on a} \quad |f_p(x) - f_q(x)| < 2\varepsilon$$

et en considérant les limites à droite, pour x_0 , on peut écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} p > N(\varepsilon) \\ q > N(\varepsilon) \end{array} \right\} \implies |f_p(x_0 + 0) - f_q(x_0 + 0)| < 2\varepsilon.$$

Ceci montre que la suite numérique $\{f_n(x_0 + 0)\}$ est une suite de Cauchy.

Elle admet donc une limite l , telle que

$$\forall n > N(\varepsilon), \quad \text{on ait} \quad |f_n(x_0 + 0) - l| \leq 2\varepsilon.$$

D'autre part, nous pouvons écrire, pour tout n , et quel que soit $h > 0$ assez petit

$$|f(x_0 + h) - l| \leq |f(x_0 + h) - f_n(x_0 + h)| + |f_n(x_0 + h) - f_n(x_0 + 0)| + |f_n(x_0 + 0) - l|$$

Fixons n , supérieur à $N(\varepsilon)$ et, cela fait, limitons-nous à $0 < h < \alpha_n$; il vient alors

$$|f(x_0 + h) - l| \leq \varepsilon + 0 + 2\varepsilon$$

ce qui signifie que $f(x_0 + h)$ a pour limite l lorsque h tend vers zéro par valeurs positives, c'est-à-dire que f admet l pour limite à droite au point x_0 .

Ainsi $f(x_0 + 0)$ existe, et est la limite de la suite numérique $\{f_n(x_0 + 0)\}$.

Nous montrerions de même que si $x_0 \in D$ et $x_0 \neq a$, $f(x_0 - 0)$ existe et est la limite de la suite numérique $\{f_n(x_0 - 0)\}$.

On a ainsi montré que x_0 est un point de discontinuité de première espèce de la fonction f (n° 53, 3^o).

5° THÉORÈME. — Une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est une fonction étagée sur $[a, b]$.

Nous avons vu (n° 54, th. I) que si f est une fonction continue sur $[a, b]$, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut subdiviser $[a, b]$ en un nombre fini de sous-segments $[x_{i-1}, x_i]$ tels que, pour tout couple x' et x'' de points appartenant à un même sous-segment

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Soit φ la fonction en escalier déterminée par :

$$\varphi(x) = f(x_i) \quad \text{si} \quad x \in]x_{i-1}, x_i]; \quad \varphi(a) = f(a).$$

On constate que, pour $x \in]x_{i-1}, x_i]$,

$$\varphi(x) - f(x) = f(x_i) - f(x) \implies |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Puisque $\varphi(a) = f(a)$, la dernière inégalité est valable pour tout $x \in [a, b]$; φ est une fonction en escalier qui approche f à ε près. La proposition en résulte.

6° THÉORÈME. — Une fonction monotone sur un segment est une fonction étagée sur ce segment.

Considérons, pour fixer les idées, une fonction f croissante (au sens large) sur un segment $[a, b]$. Elle prend ses valeurs sur le segment $[f(a), f(b)]$, que nous subdivisons au moyen d'un nombre fini de points y_i tels que

$$\begin{cases} f(a) = y_0 < y_1 < \dots < y_{i-1} < y_i < \dots < y_n = f(b) \\ y_i - y_{i-1} < \varepsilon \quad (\varepsilon : \text{nombre positif donné}). \end{cases}$$

Étudions l'ensemble des points x de $[a, b]$ tels que $y_{i-1} < f(x) \leq y_i$; on le note

$$E_i = f^{-1}(]y_{i-1}, y_i]).$$

Tout $x \in]a, b]$ a son image par f dans un, et un seul, des intervalles $]y_{i-1}, y_i]$; par suite, ce nombre x appartient à un, et un seul, des ensembles E_i ; ceux-ci constituent donc une partition de $]a, b]$.

D'autre part, si E_i n'est pas vide, nous pouvons considérer deux points quelconques, ξ et ξ' , de E_i et supposer $\xi' < \xi$; d'où, f étant croissante,

$$y_{i-1} < f(\xi') \leq f(\xi) \leq y_i,$$

et, pour tout $x \in [\xi', \xi]$,

$$f(\xi') \leq f(x) \leq f(\xi) \implies y_{i-1} < f(x) \leq y_i \quad \text{et} \quad x \in E_i;$$

ainsi (54, 4°) un ensemble E_i non vide est un intervalle (fermé, ouvert ou semi-ouvert), dont nous pouvons désigner la borne inférieure par x'_i et la borne supérieure par x_i (ces deux points n'appartenant pas nécessairement à E_i) (1).

En nous limitant à ceux des E_i qui ne sont pas vides (leur nombre est $n' \leq n$), nous obtenons une nouvelle partition de $]a, b]$ au moyen de n' intervalles, ce qui exige que l'extrémité x_k de l'un de ces intervalles, E_k , est en même temps l'origine d'un autre intervalle $E_{k'}$ ($k' \geq k + 1$), de telle sorte que x_k appartient à un, et un seul, des deux ensembles E_k et $E_{k'}$.

Ceci posé, soit φ la fonction en escalier sur $[a, b]$ déterminée par

$$\begin{cases} \varphi(a) = f(a); & \varphi(x_k) = f(x_k) \\ \text{pour } x \in]x'_k, x_k[, & \varphi(x) = f\left(\frac{x'_k + x_k}{2}\right). \end{cases}$$

(k prend n' valeurs entières comprises entre 1 et n).

(1) Exceptionnellement, E_i peut être un intervalle fermé réduit à un point : $\xi' = \xi = x = x'_i = x_i$ dans le raisonnement précédent.

Si $x = a$ ou si $x = x_k$, on a : $\varphi(x) - f(x) = 0$.

Si $x \in]x'_k, x_k[$, $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont tous deux compris entre y_{k-1} et y_k

et $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$.

La fonction φ approche ainsi la fonction f à ε près; le raisonnement étant valable pour tout ε positif, la proposition en résulte.

6° THÉORÈME. — Une fonction étagée sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$, au sens de Riemann.

Cela résulte du n° 206 5°, une fonction étagée est en effet limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, qui sont des fonctions intégrables (87) au sens de Riemann.

REMARQUE. — L'intégrabilité des fonctions étagées englobe un certain nombre de cas d'intégrabilité vus antérieurement (fonctions continues, fonctions monotones). Il ne faudrait pas en conclure que toute fonction intégrable est étagée.

Le contre-exemple suivant montre qu'une fonction peut être intégrable au sens de Riemann sans être une fonction étagée. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \neq \frac{1}{n}, n \text{ entier naturel} \\ f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas étagée; en effet elle n'admet pas de limite à droite au point 0. Montrons qu'elle vérifie le critère d'intégrabilité du n° 83, 5°. Pour toute subdivision (d) de $[0, 1]$, nous avons ici $s(d) = 0$, car dans chacun des sous-intervalles il existe des points x

tels que $\frac{1}{x}$ n'est pas un entier naturel. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous remarquons que f est intégrable sur $[\varepsilon, 1]$, segment sur lequel elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce. Il existe donc une subdivision (d') de $[\varepsilon, 1]$ telle que $S(d') < \varepsilon$. En adjoignant $[0, \varepsilon]$ à (d') nous obtenons une subdivision (d) de $[0, 1]$, et la contribution de l'intervalle $[0, \varepsilon]$ pour la somme $S(d)$ est inférieure à ε ; finalement $S(d) < 2\varepsilon$.

Le critère d'intégrabilité est ainsi satisfait, la fonction f est intégrable, et la valeur de l'intégrale est nulle.

208. *Séries de fonctions.* — 1° DÉFINITION. — Étant donnée une suite $\{u_n\}$ de fonctions (réelles ou complexes), définies sur un champ $\mathcal{C}$ (intervalle ou disque ouvert), étudier la série de fonctions (u_n) , c'est étudier la suite de fonctions dont le terme général est la fonction

$$\mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

L'étude précédente revient à examiner si, pour tout $x \in \mathcal{C}$, la suite numérique $\{\mathcal{S}_n(x)\}$ admet une limite; s'il en est ainsi et si

$$\lim \mathcal{S}_n(x) = f(x),$$

on dit que la fonction f , définie sur $\mathcal{C}$, est la somme de la série (u_n) .

On pose alors $f(x) = \mathcal{S}_n(x) + \mathcal{R}_n(x)$; pour x donné, $\mathcal{R}_n(x)$ est le reste de la série numérique $(u_n(x))$ relatif au terme d'indice n :

$$\mathcal{R}_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Comme au n° 212, nous distinguerons deux sortes de convergence.

2° **Convergence simple. Convergence uniforme.** — DÉFINITION I.
— Si la suite $\{f_n\}$ est simplement convergente, on dit que la série (u_n) est simplement convergente.

Cette propriété se traduit par :

$$(1) \quad x \in \mathcal{C}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon, x) \quad \text{tel que} \quad n > N \implies |R_n(x)| < \varepsilon.$$

DÉFINITION II. — Si la suite $\{f_n\}$ est uniformément convergente sur $\mathcal{C}$, on dit que la série (u_n) est uniformément convergente sur $\mathcal{C}$.

Cette propriété se traduit par :

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathcal{C} \\ n > N \end{array} \right\} \implies |R_n(x)| < \varepsilon.$$

En d'autres termes, la série (u_n) est simplement ou uniformément convergente suivant que la suite de fonctions $\{R_n\}$ converge vers la fonction nulle simplement ou uniformément.

EXEMPLES. — Nous appliquerons les définitions précédentes : a) aux séries entières (n° 209 et la suite) : $u_n(x) = ax^n$; b) aux séries trigonométriques (n° 227 et la suite) : $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

REMARQUE. — S'il y a ambiguïté sur le premier terme, on pourra désigner la somme de la série de fonctions par

$$\sum_0^{\infty} u_n(x) \quad \text{ou} \quad \sum_1^{\infty} u_n(x).$$

3° **Applications de la convergence uniforme.** — L'étude des suites de fonctions (212) conduit aux énoncés suivants; il suffit, pour les obtenir, de remplacer dans les démonstrations du n° 212, $f_n(x)$ par $g_n(x)$, et $\delta_n(x)$ par $R_n(x)$.

THÉORÈME I. — Soit (u_n) une série de fonctions toutes continues sur le champ $\mathcal{C}$, si la série (u_n) est uniformément convergente sur $\mathcal{C}$, sa somme f est une fonction continue sur $\mathcal{C}$.

Les deux théorèmes suivants ne s'appliquent qu'à des séries de fonctions réelles d'une variable réelle.

THÉORÈME II. — Soit (u_n) une série de fonctions réelles continues sur le segment réel $[a, b]$; supposons que la série (u_n) soit uniformément convergente sur $[a, b]$ et soit f sa somme. Posons

$$x \in [a, b], \quad U_n(x) = \int_a^x u_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

La série de fonctions (U_n) converge uniformément sur $[a, b]$ et a pour somme la fonction F .

Autrement dit,

$$(3) \quad \int_a^x \left(\sum_0^\infty u_n(t) \right) dt = \sum_0^\infty \left(\int_a^x u_n(t) dt \right).$$

THÉORÈME III. — Soit (u_n) une série de fonctions réelles définies sur le segment réel $[a, b]$ et admettant sur ce segment des dérivées continues. On suppose que la série de fonctions (u'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ et qu'il existe un point $x_0 \in [a, b]$ tel que la série numérique $(u_n(x_0))$ converge. Alors la série de fonctions (u_n) converge uniformément sur $[a, b]$; sa somme est une primitive convenablement choisie de la somme g de la série (u'_n) .

Autrement dit :

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \left[\sum_0^\infty u_n(x) \right] = \sum_0^\infty \left[\frac{d}{dx} u_n(x) \right].$$

On exprime le théorème II en disant encore qu'une série de fonctions continues, uniformément convergente sur $[a, b]$, est intégrable terme à terme sur ce segment.

On déduit du théorème III que si une série de fonctions dérivables est convergente et si la série des dérivées est uniformément convergente, la série proposée est dérivable terme à terme.

Sous les réserves faites, on peut permuter intégration ou dérivation d'une part, sommation infinie d'autre part.

4° Convergence uniforme d'une série de fonctions admettant une série majorante. — Supposons que la série $(u_n(x))$, à termes réels ou complexes, admette une série numérique majorante convergente (v_n) , pour toutes les valeurs d'un champ $\mathcal{C}$ (intervalle ou disque).

Par hypothèse

$$\forall x \in \mathcal{C}, \quad |u_n(x)| \leq v_n.$$

v_n est un nombre positif, terme général d'une série numérique, c'est-à-dire que v_n est indépendant de x .

La série $(u_n(x))$ est absolument convergente (197, 2°). Montrons qu'elle est en outre uniformément convergente. Appelons respectivement $\mathcal{R}_n(x)$ et ρ_n les restes relatifs aux termes d'indice n des séries $(u_n(x))$ et v_n :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(x) &= u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots & \rho_n &= v_{n+1} + v_{n+2} + \dots \\ \forall x \in \mathcal{C}, \quad |\mathcal{R}_n(x)| &\leq \rho_n & (199, 1^\circ). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n > N \implies \rho_n < \varepsilon;$$

$$a \text{ fortiori, } \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathcal{C} \\ n > N \end{array} \right\} \implies |\mathcal{R}_n(x)| < \varepsilon.$$

La convergence uniforme de (u_n) sur $[a, b]$ est ainsi démontrée; on dit que la série (v_n) est majorante pour la série de fonctions (u_n) , et on énonce :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — On donne une série de fonctions, (u_n) , définies sur l'ensemble $\mathcal{C}$ et une série numérique positive convergente, (v_n) , telles que, pour tout entier n ,

$$\forall x \in \mathcal{C}, \quad \text{on a} \quad |u_n(x)| \leq v_n.$$

La série $(u_n(x))$ est alors absolument et uniformément convergente sur $\mathcal{C}$.

On rappelle les hypothèses du théorème en disant que la série $(u_n(x))$ est **normalement convergente** sur $\mathcal{C}$.

REMARQUE. — La convergence normale entraîne la convergence absolue et la convergence uniforme, mais nous noterons que cette condition suffisante de convergence uniforme n'est pas une condition nécessaire; nous noterons aussi que la convergence uniforme n'exige pas la convergence absolue.

EXEMPLE. — Soit la série de fonctions (u_n) définie sur $] -\infty, +\infty[$ par

$$u_n(x) = \frac{1}{2^n} \sinh(3^n x).$$

Nous avons $|u_n(x)| < \frac{1}{2^n}$; d'après le théorème précédent la série de fonctions (u_n) est uniformément convergente sur $] -\infty, +\infty[$.

Il ne faudrait pas en déduire, par une application incorrecte de la formule (4), que la série de fonctions (u'_n) converge uniformément, ou même simplement. En effet

$$u'_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cos(3^n x); \quad u'_n(0) = \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

la série numérique $(u'_n(0))$ diverge.

II. SÉRIES ENTIÈRES. CONVERGENCE.

209. Définition et premiers exemples. — **DÉFINITION.** — On appelle **série entière** par rapport à la variable complexe z toute série de fonctions dont le terme général est de la forme $a_n z^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), les nombres $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — appelés **coefficients de la série entière** — étant eux-mêmes complexes.

Une telle série — lorsqu'elle est convergente — généralise une fonction polynôme, somme de puissances entières de x , d'où l'épithète « entière » utilisée pour la désigner. Sa somme est une fonction de z ; le but de cette étude est de chercher le domaine d'existence et les propriétés de cette fonction.

La série géométrique $\frac{z^n}{a^n}$ est une série entière; elle est absolument convergente si $|z| < |a|$, divergente si $|z| > |a|$. Si la variable z est représentée par un point m du plan complexe, la série est absolument convergente, ou divergente, suivant que le point m est intérieur, ou extérieur, au cercle C de centre O , de rayon $|a|$; C est appelé **cercle de convergence** de la série.

Il peut se faire qu'une série entière soit absolument convergente quel que soit z [Exemple : $\frac{z^n}{n!}$ (n° 198)], ou ne soit convergente que pour $z = 0$. [Exemple $n! z^n$, dont le terme général ne tend pas vers zéro (n° 195, 3°)].

210. Convergence d'une série entière. — 1° Lemme d'Abel. —

a) Étude préliminaire. — Soit $u_n = a_n z^n$ le terme général d'une série entière.

Supposons qu'il existe un nombre complexe *non nul* z_0 tel que la suite $\{ |a_n z_0^n| \}$ soit majorée : il existe alors un nombre positif $\mathfrak{B}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } |a_n| |z_0|^n < \mathfrak{B}.$$

Soit alors z tel que $|z| < |z_0|$;

$$|u_n| = |a_n| |z|^n < \frac{\mathfrak{B}}{|z_0|^n} |z|^n \quad \text{ou} \quad \mathfrak{B} \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n = v_n.$$

La série à termes positifs (v_n) est alors majorée par la série géométrique v_n , convergente parce que la raison $\frac{|z|}{|z_0|}$ est inférieure à 1. La série $(a_n z^n)$ est donc absolument convergente pour toute valeur z telle que $|z| < |z_0|$.

Nous énoncerons : Si, pour la valeur z_0 de z , $|u_n|$ est majoré quel que soit n , la série (u_n) est absolument convergente pour toute valeur z telle que $|z| < |z_0|$.

b) Lemme d'Abel. — Supposons que la série entière $(a_n z^n)$ soit convergente pour la valeur z_0 de la variable; le terme général $a_n z_0^n$ tend vers zéro pour n infini, c'est donc que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } n \geq N \implies |a_n z_0^n| < \varepsilon.$$

On est ramené aux hypothèses du 1°, en prenant

$$\mathfrak{B} = \sup [|a_0|, |a_1 z_0|, \dots, |a_{n-1} z_0^{n-1}|, \varepsilon].$$

Nous énonçons ainsi le lemme d'Abel :

Si la série entière $(a_n z^n)$ est convergente pour la valeur z_0 de z , elle est absolument convergente pour toute valeur z telle que $|z| < |z_0|$.

Le lemme d'Abel va permettre d'étudier la convergence d'une série entière.

2° Étude de la convergence de la série des modules.

Posons $a'_n = |a_n|$, $\rho = |z|$.

Supposons la série des modules $(a'_n \rho^n)$ convergente pour certaines valeurs de ρ , divergente pour d'autres valeurs de ρ .

Partageons l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des nombres réels positifs (9, 5°) en :

classe (x) : ensemble des $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ tels que la série $(a'_n \rho_1^n)$ converge

classe (X) : ensemble des $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que la série $(a'_n \rho_2^n)$ diverge.

Il s'agit d'une partition, en effet tout réel positif est classé et les classes sont disjointes. Par hypothèse, aucune des classes n'est vide. D'autre part :

α) Tout réel positif x inférieur à un élément ρ_1 de (x) appartient à (x) ; l'inégalité $a'_n x^n < a'_n \rho_1^n$ montre en effet que la convergence de la série $(a'_n \rho_1^n)$ entraîne celle de la série $(a'_n x^n)$.

β) Tout réel positif X supérieur à un élément ρ_2 de (X) appartient à (X) ; l'inégalité $a'_n \rho_2^n < a'_n X^n$ montre en effet que la divergence de la série $(a'_n \rho_2^n)$ entraîne celle de la série $(a'_n X^n)$.

La partition considérée est donc une coupure dans R^+ . Cette coupure définit un nombre réel positif R tel que

$$\rho_1 \leq R \leq \rho_2.$$

Pour tout $\rho_1 < R$, la série $(a'_n \rho_1^n)$ converge.

Pour tout $\rho_2 > R$, la série $(a'_n \rho_2^n)$ diverge.

3° Retour à la série entière $(a_n z^n)$ elle-même.

a) si $\rho < R$, la série $(a_n z^n)$ converge, la série $(a_n z^n)$ est absolument convergente.

b) soit $\rho > R$; la série des modules est divergente, et on sait qu'on n'en peut rien conclure relativement à la série elle-même. Nous allons démontrer cependant que la série $(a_n z^n)$ est elle-même divergente. En effet, si la série $(a_n z^n)$ était convergente, la série entière serait, d'après le lemme d'Abel, absolument convergente pour toute valeur z' telle que $|z'| < |z|$.

En choisissant z' tel que

$$R < |z'| < |z|,$$

on mettrait en évidence un nombre z' tel que la série des modules soit convergente pour $|z'| > R$, ce qui est en contradiction avec la définition de R .

Par suite la série $(a_n z^n)$ est divergente pour toute valeur z telle que $|z| > R$.

4° CAS PARTICULIERS. — a) Si la série $(a'_n \rho^n)$ est convergente quel que soit ρ , la série $(a_n z^n)$ est absolument convergente quel que soit z .

b) Si la série $(a'_n \rho^n)$ est divergente quel que soit $\rho \neq 0$, la série $(a_n z^n)$ est divergente quel que soit $z \neq 0$, car si la série $(a_n z_0^n)$ était convergente ($z_0 \neq 0$), la série $(a_n z^n)$ où $|z| < |z_0|$ serait absolument convergente, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

En résumé, nous énonçons :

5° THÉORÈME ET DÉFINITION. — 1° Si une série entière à coefficients complexes

$$(1) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

n'est pas convergente quel que soit z et si elle n'est pas divergente pour toute valeur de cette variable autre que zéro, il existe un nombre positif R tel que la série est absolument

convergente pour toute valeur de z inférieure à R en module et divergente pour toute valeur de z supérieure à R en module.

2° On dit que R est le rayon de convergence de la série entière.

Si la série est convergente quel que soit z on dit que son rayon de convergence est infini, si la série est divergente pour toute valeur de z autre que zéro, on dit que son rayon de convergence est nul.

On observera que si l'on sait la convergence de la série entière $(a_n z^n)$ quel que soit $|z| < r$, le rayon de convergence R est tel que $R \geq r$.

Si l'on sait la divergence de la série $(a_n z^n)$ quel que soit $|z| > r'$, le rayon de convergence R est tel que $R \leq r'$.

Le rayon de convergence est défini par la double condition :

$$\begin{aligned} \forall |z| < R, \text{ la série } (a_n z^n) \text{ est convergente} \\ \forall |z| > R, \text{ la série } (a_n z^n) \text{ est divergente.} \end{aligned}$$

6° Cercle de convergence. — Associons au nombre complexe z son image M dans le plan complexe; la série entière est convergente si M est intérieur au cercle $C(O, R)$, et divergente si M est extérieur à ce cercle; le cercle C est appelé *cercle de convergence* de la série entière. Si l'image M est sur le cercle C , on ne peut rien dire de général sur la convergence de la série entière; celle-ci peut être convergente (semi, ou absolument) ou divergente.

L'ensemble des valeurs z telles que $|z| < R$ s'appelle (134, 2°) disque de convergence de la série entière; le disque de convergence d'une série entière est un disque ouvert.

7° Intervalle de convergence d'une série entière réelle. — Si la série entière $(a_n x^n)$ est à coefficients et variable réels (en abrégé, dans la suite, nous dirons alors série entière réelle), elle est absolument convergente pour $-R < x < R$, divergente pour $x < -R$ et $x > R$.

On dit que l'intervalle $] -R, +R[$ est l'*intervalle de convergence* de la série entière à termes réels; l'intervalle de convergence d'une série entière réelle est un intervalle ouvert.

REMARQUE. — On remarquera le caractère particulier qu'offre la divergence d'une série entière pour une valeur z de la variable telle que $|z| > R$: on ne peut trouver un nombre β tel que

$$\forall n, \quad |a_n z^n| < \beta,$$

sinon le raisonnement d'Abel montrerait l'absolue convergence pour une valeur z' telle que $R < |z'| < |z|$, ce qui est absurde.

A l'extérieur du cercle (ou de l'intervalle) de convergence, le module du terme général d'une série entière n'est pas borné.

211. **Détermination pratique du rayon de convergence d'une série entière.** — Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière ($u_n = a_n z^n$), il suffit (210, 1^o) d'étudier la convergence de la série des modules ($|u_n| = a'_n \rho^n$). Remarquons que les expressions $\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{a'_n} \rho$ et $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{a'_{n+1}}{a'_n} \rho$ font intervenir le nombre ρ lui-même; il est donc indiqué d'utiliser les critères de Cauchy ou de d'Alembert.

1^o Supposons que $\sqrt[n]{|a_n|}$ ait, pour n infini, une limite $l \neq 0$. Alors

$$\sqrt[n]{|u_n|} \rightarrow l\rho \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } l\rho < 1 \quad \text{ou} \quad \rho < \frac{1}{l}, \text{ la série } (u_n) \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } l\rho > 1 \quad \text{ou} \quad \rho > \frac{1}{l}, \quad |u_n| > 1, \text{ la série } (u_n) \text{ est divergente.} \end{array} \right.$$

Ces deux conditions montrent que $R = \frac{1}{l}$ (210, 5^o).

Si $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 0$, $\sqrt[n]{|u_n|} \rightarrow 0$, la série (u_n) est absolument convergente quel que soit z ; le rayon de convergence est infini.

Si $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \infty$, $\sqrt[n]{|u_n|} \rightarrow \infty$ quel que soit $z \neq 0$; $|u_n| > 1$; la série (u_n) est divergente quel que soit $z \neq 0$; le rayon de convergence est nul.

2^o Supposons que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ ait, pour n infini, une limite $l \neq 0$. Alors

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \rightarrow l\rho \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } l\rho < 1, \quad \text{ou} \quad \rho < \frac{1}{l}, \text{ la série } (u_n) \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } l\rho > 1, \quad \text{ou} \quad \rho > \frac{1}{l}, \quad |u_{n+1}| > |u_n|, \text{ la série } (u_n) \text{ est divergente.} \end{array} \right.$$

Ces deux conditions montrent que $R = \frac{1}{l}$ (210, 5^o).

Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow 0$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \rightarrow 0$, la série (u_n) est absolument convergente quel que soit z , le rayon de convergence est infini.

Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow \infty$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \rightarrow \infty$, quel que soit $z \neq 0$; $|u_{n+1}| > |u_n|$; la série (u_n) est divergente quel que soit $z \neq 0$; le rayon de convergence est nul.

3^o REMARQUES ET EXEMPLES. — a) Dans chacun des deux cas précédents, le raisonnement d'Abel n'est pas nécessaire pour établir la divergence de la série entière lorsque $|x| > R$.

b) Si l'expression de $|a_n|$ est compliquée, on lui substitue un nombre positif b_n plus simple tel que $\frac{|a_n|}{b_n}$ tende vers une limite non nulle pour n infini; on applique ensuite la règle de Cauchy ou de d'Alembert à la série $(b_n \rho^n)$.

c) Exemples : $u_n = \frac{z^n}{n^n}$; $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{z}{n} \rightarrow 0$; R est infini

$$u_n = \frac{z^n}{n^n}; \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |z| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow |z|; \quad R = 1.$$

4° Nature d'une série entière réelle aux bornes de l'intervalle de convergence. — Au cours de l'étude qui vient d'être faite, rien n'a été dit de général sur la nature de la série entière en un point du cercle de convergence, ou à une borne de l'intervalle de convergence. Les exemples suivants montrent en effet que tous les cas peuvent se produire.

La série (nx^{n-1}) a pour intervalle de convergence $] -1, +1[$; elle est divergente aux deux bornes, le terme général ne tendant pas alors vers zéro.

La série $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ a pour intervalle de convergence $] -1, +1[$; pour $x = +1$, elle se réduit à la série harmonique, elle est divergente; pour $x = -1$, elle est convergente.

La série $\left(\frac{x^n}{n^2}\right)$ a pour intervalle de convergence $] -1, +1[$; elle est absolument convergente aux deux bornes.

*** 5° DÉTERMINATION THÉORIQUE DU RAYON DE CONVERGENCE.** — Soit $u_n = a_n z^n$; et soit L la limite supérieure de la suite $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, étant entendu que L est infinie si la suite n'est pas majorée; par homothétie, la limite supérieure de la suite $\{\sqrt[n]{|u_n|}\}$ est L .

D'après les résultats du n° 196, 4°,

si $L|z| < 1$, (u_n) est absolument convergente,

si $L|z| > 1$, (u_n) est divergente

par suite
$$R = \frac{1}{L}.$$

Si L est infini, (u_n) diverge pour tout $z \neq 0$

si L est nul, (u_n) converge pour tout z .

212. — Développement limité de la somme d'une série entière. —
1° Soit

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

$|x|$ étant inférieur à R , rayon de convergence que nous supposons non nul.

Posons

$$y_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$R_n(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \dots$$

Écrivons

$$R_n(x) = x^n \varepsilon(x),$$

avec

$$\varepsilon(x) = a_{n+1}x + a_{n+2}x^2 + \dots = x[a_{n+1} + a_{n+2}x + \dots].$$

Pour tout x tel que $|x| \leq r < R$,

$$|\varepsilon(x)| \leq |x| [|a_{n+1}| + |a_{n+2}|r + \dots]$$

entre crochets figure en effet la somme d'une série à termes positifs convergente, puisque ses termes s'obtiennent en divisant par r^{n+1} les termes du reste de la série des modules pour la valeur r de la variable.

$$\text{Posant } \Sigma = |a_{n+1}| + |a_{n+2}|r + \dots, \quad |\varepsilon(x)| \leq \Sigma \cdot |x|,$$

ce qui prouve : 1° que $\varepsilon(x)$ reste finie si $|x|$ reste inférieur ou égal à r ;

2° que $\varepsilon(x)$ tend vers zéro avec x .

Nous pouvons donc écrire

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \varepsilon(x)x^n; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

S'il s'agit d'une série entière réelle, l'écriture précédente constitue un développement limité de la fonction $f(x)$ au voisinage de 0, à l'ordre n .

S'il s'agit d'une série entière complexe, nous généraliserons à une fonction complexe de la variable complexe la notion de développement limité au voisinage de 0 (définition I du n° 114) et nous énoncerons :

THÉORÈME. Si une série entière admet un rayon de convergence non nul, sa somme admet un développement limité au voisinage de 0, à un ordre quelconque.

2° Applications. — On déduit du résultat précédent, comme au n° 115, 1° :

a) l'unicité du développement d'une fonction en série entière;

si deux séries entières ont la même somme en tout point d'un voisinage de 0, leurs coefficients sont les mêmes.

Cette conséquence s'énonce encore en disant que, si une fonction est développable en série entière, elle ne l'est que d'une seule manière.

b) en particulier, si une série entière a pour somme 0 en tout point d'un voisinage de 0, les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sont nuls.

c) Si la somme d'une série entière est une fonction paire (resp. impaire), les coefficients des termes de puissance impaire (resp. paire) sont tous nuls.

213. Addition et Multiplication. — Soit deux séries entières ayant respectivement R et R' pour rayon de convergence :

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad |x| < R$$

$$(2) \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots \quad |x| < R'.$$

$$\text{Supposons } R \leq R'.$$

On ne pourra combiner les sommes de ces deux séries que lorsqu'elles existent, c'est-à-dire pour $|x| < R$.

Si λ et μ sont deux nombres complexes quelconques, la série $(\lambda a_nx^n + \mu b_nx^n)$ est absolument convergente pour $|x| < R$ (198, 4°), et

$$(3) \quad \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda a_0 + \mu b_0 + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n)x^n + \dots$$

De même (200) la règle de multiplication de deux séries absolument convergentes permet d'écrire

$$(4) \quad f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots \\ + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0)x^n + \dots$$

REMARQUE. — Le rayon de convergence des séries (3) et (4) est au moins R .

Si $R < R'$, on peut montrer que le rayon de convergence de la série (3) est exactement R , car s'il était plus grand la série (3) serait convergente pour un certain nombre x tel que $R < |x| < R'$, comme il en est de même de la série (2) la série dont le terme est $(\lambda a_n + \mu b_n)x^n - \mu b_n x^n$ serait convergente : la série (1) le serait aussi, ce qui n'est pas.

Si $R = R'$, il peut se faire que le rayon de convergence R'' de la série (3) soit supérieur à R ; c'est ce qui se passe pour $a_n = 1 + 2^n$, $b_n = 1 - 2^n$, $\lambda = \mu = 1$; on a $R = R' = \frac{1}{2}$ et $R'' = 1$.

Cependant si $R = R'$ et si les séries (1) et (2) sont disjointes — ce qui signifie que $a_p \neq 0$ entraîne $b_p = 0$ et que $b_q \neq 0$ entraîne $a_q = 0$ —, on peut montrer que le rayon de convergence de (3) est R . En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait x ($|x| > R$) pour lequel la série des modules de (3) convergerait; or les séries $(| \lambda a_n x^n |)$ et $(| \mu b_n x^n |)$ sont majorées par la série $(| (\lambda a_n + \mu b_n) x^n |)$; elles convergeraient, ce qui est contradictoire avec $|x| > R$. C'est ainsi que si l'on a établi que les séries $(a_{2p}x^{2p})$ et $(a_{2p+1}x^{2p+1})$ ont le même rayon de convergence R , la série $(a_n x^n)$ admet R pour rayon de convergence.

III. APPLICATION DE L'ÉTUDE DES SÉRIES DE FONCTIONS AUX SÉRIES ENTIÈRES

214. Convergence uniforme et continuité d'une série entière complexe. — Soit $(u_n = a_n x^n)$ une série entière à coefficients et variable complexes; soit R son rayon de convergence.

1° Convergence uniforme. — Choisissons un nombre positif $r < R$.

$$|x| \leq r < R \implies |a_n x^n| \leq v_n \quad \text{avec} \quad v_n = |a_n| r^n.$$

La série numérique (v_n) converge. On peut donc appliquer, sur le disque (O, r) fermé, le théorème du n° 208, 4° et énoncer :

THÉORÈME. — Une série entière est uniformément convergente sur tout disque fermé concentrique au cercle de convergence et strictement intérieur à ce cercle.

2° Continuité. — Pour n donné, la fonction u_n définie par $u_n(x) = a_n x^n$ est continue sur l'ensemble des complexes et, en particulier sur le disque (O, r) fermé. En tenant compte de la convergence uniforme de la série entière $(a_n x^n)$, qui vient d'être démontrée au 1°, on en déduit (208, 3°, théorème I) que la somme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

est une fonction de x continue sur le disque (O, r) fermé.

Or, étant donné un nombre complexe x_0 tel que $|x_0| < R$, on peut toujours trouver r tel que $|x_0| < r < R$.

Par suite on peut énoncer :

THÉORÈME. — La somme d'une série entière est une fonction continue sur le disque de convergence ouvert.

Dans le cas d'une série entière réelle, la somme est continue sur l'intervalle de convergence ouvert.

REMARQUE. — Dans ce dernier cas on démontre que, si la série numérique $(a_n R^n)$ [resp. $(a_n (-R)^n)$] est convergente, elle a pour somme

$$\lim_{x \rightarrow R-0} f(x) \quad [\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -R+0} f(x)],$$

$f(x)$ désignant la somme de la série sur $] -R, +R[$. (cf. ex. n° 25).

215. Rayon de convergence des séries obtenues par dérivation ou par intégration. — **THÉORÈME.** — Les séries entières obtenues en dérivant ou en intégrant terme à terme une série entière (réelle ou complexe) ont le même rayon de convergence que la série donnée.

$$\text{Soit (1)} \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

une série entière, R son rayon de convergence,

1° Série des dérivées. — Considérons la série des dérivées

$$(2) \quad a_1 + 2 a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

et soit R' son rayon de convergence; nous étudierons les séries des modules; posons $a'_n = |a_n|$, $\rho = |x|$, et $w_n = n a'_n \rho^{n-1}$.

a) Montrons que si $\rho > R$, la série (w_n) diverge; à condition de nous limiter à $n > \rho$, $w_n > a'_n \rho^n$; or la série $(a'_n \rho^n)$ diverge; *a fortiori*, (w_n) diverge; par suite $R' \leq R$.

b) Montrons que si $\rho < R$, la série (w_n) converge. Soit α l'un des nombres positifs tels que $\rho + \alpha < R$. La série numérique de terme général $a'_n (\rho + \alpha)^n$ converge. Or nous avons

$$(\rho + \alpha)^n = \rho^n + C_n^1 \rho^{n-1} \alpha + \dots + \alpha^n > n \rho^{n-1} \alpha.$$

Il en résulte que la série numérique à termes réels positifs $(n a'_n \rho^{n-1} \alpha)$ qui admet une majorante convergente $(a'_n (\rho + \alpha)^n)$ est elle-même convergente, et la série (w_n) converge; par suite $R' \geq R$.

En résumé $R' = R$.

2° **Série des primitives.** — Considérons la série des primitives

$$(3) \quad a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Si R'' est son rayon de convergence, la série (1) étant la série des dérivées de (3), le 1° permet d'affirmer $R = R''$. La série des primitives admet également R pour rayon de convergence.

3° **Généralisation.** — En itérant les opérations précédentes, les séries entières obtenues en prenant les dérivées successives des termes de la série (1), ou les primitives successives des termes de la série (1), ont toutes R pour rayon de convergence.

4° REMARQUE. — Les séries (1), (2), (3) peuvent être de nature différente en un point du cercle de convergence.

Par exemple soit $\left(\frac{x^n}{n^2}\right)$, $R = 1$, et la série converge pour $x = 1$; mais la série des dérivées $\left(\frac{x^{n-1}}{n}\right)$ est divergente pour $x = 1$.

216. **Intégration et dérivation d'une série entière.** — Du fait que les séries (2) et (3) du n° 215 ont le même rayon de convergence que la série (1) il ne résulte pas que leurs sommes soient respectivement la dérivée ou une primitive de la somme de la série (1). Cette question va faire l'objet du présent paragraphe.

1° **Intégration d'une série entière réelle.** — a) Soit $u_n(x) = a_n x^n$ le terme général d'une série entière réelle; soit R le rayon de convergence et $f(x)$ la somme. La série (u_n) est uniformément convergente sur le segment $[-r, +r]$, avec $r < R$ (n° 214). Il en résulte qu'on peut lui appliquer le théorème II du n° 213, 3° : la série entière

$$U_n(x) = \int_0^x a_n t^n dt = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{a pour somme} \quad \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [-r, +r].$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — La somme $\sum_0^\infty a_n x^n$ d'une série entière réelle admet pour primitive, à l'intérieur de l'intervalle (ouvert) de convergence, la somme $\sum_0^\infty a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ de la série entière obtenue en intégrant terme à terme.

b) Plus généralement, soit $[\alpha, \beta]$ un segment quelconque inclus dans $] -R, +R[$; on peut trouver un réel positif r tel que

$$-R < -r < \alpha < \beta < r < R.$$

On peut écrire, d'après le théorème II du n° 213, 3°,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = a_0(\beta - \alpha) + a_1 \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + \dots + a_n \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Nous énoncerons, en résumé :

Une série entière réelle est intégrable terme à terme sur tout segment inclus dans l'intervalle (ouvert) de convergence.

La formule précédente sera utilisée dans des questions de calcul numérique (271).

2° **Dérivation d'une série entière réelle.** — Soit

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \\ g(x) &= a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

les sommes de deux séries entières réelles, la seconde série étant déduite de la première par dérivation terme à terme. Ces deux séries ont le même rayon de convergence, R (215).

D'après le 1°, $f(x)$ est une primitive de $g(x)$, donc pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$,

$$g(x) = f'(x),$$

et nous énoncerons :

THÉOREME. — La somme $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ d'une série entière réelle admet pour dérivée à l'intérieur de l'intervalle (ouvert) de convergence, la somme $\sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1}$ de la série entière obtenue en dérivant terme à terme.

En abrégé, on pourra aussi énoncer :

Une série entière réelle est dérivable terme à terme sur l'intervalle (ouvert) de convergence.

COROLLAIRE. — Soit $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$ $f(0) = a_0$
 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$ $f'(0) = a_1$

$$f^{(p)}(x) = p!a_n + (p+1)p \dots 2.a_{n+1}x + \dots \quad f^{(p)}(0) = p!a_n.$$

La somme d'une série entière admet une infinité de dérivées successives, et l'on peut écrire

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots + \frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0) + \dots$$

La formule précédente montre que, si une fonction réelle de la variable réelle admet un développement en série entière, ce développement est unique. Ce résultat avait déjà été acquis précédemment (210, 2°).

*3° Dérivation d'une série entière à termes complexes.

Soit
$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

une série entière à coefficients et variable complexes, admettant R pour rayon de convergence.

Choisissons x et x_0 tels que $|x| < R$ et $|x_0| < R$, on peut former

$$f(x) - f(x_0) = a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x^n - x_0^n) + \dots$$

puis

$$(1) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + a_2(x + x_0) + \dots + a_n(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) + \dots$$

Nous allons démontrer que l'expression précédente a pour limite, lorsque x tend vers x_0 ,

$$(2) \quad g(x_0) = a_1 + 2a_2x_0 + \dots + na_nx_0^{n-1} + \dots$$

Choisissons r entre $|x_0|$ et R : $|x_0| < r < R$.

Puisque x tend vers x_0 , nous pourrions supposer $|x| < r$. Posons

$$g_n = a_1 + a_2(x + x_0) + \dots + a_n(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})$$

$$\Sigma_n = a_1 + 2a_2x_0 + \dots + na_nx_0^{n-1}$$

$$\mathcal{R}_n = a_{n+1}(x^n + x^{n-1}x_0 + \dots + x_0^n) + \dots$$

$$\rho_n = (n+1)a_{n+1}x_0^n + (n+2)a_{n+2}x_0^{n+1} + \dots$$

$\mathcal{R}_n$ et ρ_n sont, dans les séries (1) et (2), les restes relatifs à g_n et Σ_n .

D'après l'égalité

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) = g_n - \Sigma_n + \mathcal{R}_n - \rho_n$$

on a

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq |g_n - \Sigma_n| + |\mathcal{R}_n| + |\rho_n|.$$

Or

$$|\rho_n| \leq (n+1)a'_{n+1}r^n + (n+2)a'_{n+2}r^{n+1} + \dots$$

a'_p désignant comme précédemment $|a_p|$. Le second membre est le reste relatif au terme na'_nr^{n-1} dans la série convergente

$$a'_1 + 2a'_2r + \dots + na'_nr^{n-1} + \dots$$

Fixons le nombre n de façon que ce reste soit inférieur à ε , ε étant un nombre positif donné. Cela fait, on a *a fortiori* $|\rho_n| < \varepsilon$. Il est clair que l'on a aussi, puisque $|x|$ et $|x_0|$ sont inférieurs à r ,

$$|\mathcal{R}_n| < (n+1)a'_{n+1}r^n + \dots$$

et par suite $|\mathcal{R}_n| < \varepsilon$.

$\mathcal{G}_n$ est la somme d'un nombre fixe de termes qui tendent vers les termes correspondants de Σ_n quand x tend vers x_0 ; $\mathcal{G}_n$ tend vers Σ_n et il est possible de trouver un nombre positif β tel que l'inégalité $|x - x_0| < \beta$ entraîne

$$|\mathcal{G}_n - \Sigma_n| < \varepsilon.$$

Dès lors, si $\alpha \leq \inf(\beta, r - |x_0|)$, toute valeur de x satisfaisant à l'inégalité $|x - x_0| < \alpha$ vérifie $|x| < r$ et rend $|\mathcal{G}_n - \Sigma_n| < \varepsilon$. Ces valeurs satisfont donc à l'inégalité

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| < 3\varepsilon$$

ce qui justifie que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $g(x_0)$.

En d'autres termes, à l'intérieur du cercle de convergence, une série entière à termes complexes est dérivable terme à terme.

On peut écrire, comme au 1^o,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots + \frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0) + \dots$$

et en déduire que, si une fonction de la variable complexe admet un développement en série entière, ce développement est unique.

3^o EXEMPLE. — La série géométrique

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

a pour rayon de convergence 1 et a pour somme $\frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$. Pour ces mêmes valeurs de x

$$1 + 2x + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

a pour somme la dérivée de $\frac{1}{1-x}$, soit $\frac{1}{(1-x)^2}$.

En réitérant l'application du même théorème on trouve que pour $|x| < 1$, quel que soit l'entier positif $p > 1$,

$$(3) \quad \frac{1}{(1-x)^p} = 1 + \frac{p(p-1)\dots 2}{(p-1)!}x + \frac{(p+1)p\dots 3}{(p-1)!}x^2 + \dots + \frac{(n+p-1)\dots (n+1)}{(p-1)!}x^n + \dots$$

REMARQUE. — Le résultat précédent peut s'obtenir sans qu'il soit besoin d'avoir étendu au champ complexe le théorème sur la dérivation d'une série entière.

Dans le champ réel, la dérivée $(p-1)^e$ de $\frac{1}{1-x}$ permet d'obtenir la formule (3). Or cette formule pourrait être aussi obtenue en faisant le produit de $(p-1)$ facteurs $\frac{1}{1-x}$, et ce produit est valable dans le champ complexe comme dans le champ réel. La dérivée $(p-1)^e$ de $\frac{1}{1-x}$ étant, même dans le champ complexe, $\frac{(p-1)!}{(1-x)^p}$, la formule (3) s'applique donc, non seulement pour x réel $\in]-1, +1[$, mais aussi pour x complexe vérifiant $|x| < 1$.

IV. DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE ENTIÈRE

217. Généralités. Série de Mac-Laurin. — 1° **Analyse.** — Étant donné une fonction réelle $f(x)$ de la variable réelle x , existe-t-il une série entière en x dont elle soit la somme?

Comme une série entière est convergente sur un intervalle $] -R, +R[$, la fonction $f(x)$ doit exister sur un intervalle ouvert comprenant zéro.

Comme la somme d'une série entière est indéfiniment dérivable sur $] -R, +R[$, la fonction $f(x)$ doit admettre une infinité de dérivées successives.

Nous avons vu (216) que si

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

on pouvait écrire

$$g(x) = g(0) + \frac{x}{1!}g'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}g^{(n)}(0) + \dots$$

2° Synthèse. — Soit donné une fonction $f(x)$, indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert E comprenant 0.

S'il existe une série entière dont la somme soit $f(x)$, les coefficients de cette série sont nécessairement $f(0), \frac{f'(0)}{1!}, \dots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots$. Formons donc la série

$$(1) \quad f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

dite série de Mac-Laurin associée à la fonction $f(x)$.

Cette série pose deux problèmes :

a) a-t-elle un rayon de convergence non nul?

b) si oui, sa somme est-elle $f(x)$?

Les hypothèses faites sur la fonction $f(x)$ permettent de lui appliquer, dans l'intervalle E , la formule de Mac-Laurin (79)

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in E, \quad \forall n, \quad \exists \theta \in]0, 1[\quad \text{tel que} \\ f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x). \end{array} \right.$$

Posons

$$S_n = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$T_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

Supposons que, x étant fixé, T_n tende vers zéro pour n infini;

l'égalité

$$f(x) = S_n + T_n$$

montre qu'alors S_n tend vers $f(x)$.

Il en résulte que

- a) la série de Mac-Laurin associée à la fonction $f(x)$ est convergente;
- b) la somme de cette série est $f(x)$.

Inversement si la série (1) est convergente et a pour somme $f(x)$, nécessairement T_n tend vers zéro pour n infini, x étant fixé.

On peut alors résumer cette étude :

3° THÉORÈME. — Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit la somme de la série entière

$$f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

est que le reste T_n de la formule de Mac-Laurin tende vers zéro pour n infini, x étant fixé.

4° Une condition suffisante. — L'étude de la limite de T_n peut être difficile.

Si $f^{(n)}(x)$ est bornée, pour $|x| < r$, c'est-à-dire, de façon plus précise, s'il existe un nombre fixe M tel que

$$\forall x \text{ tel que } |x| < r, \quad \forall n, \quad |f^{(n)}(x)| < M,$$

alors on peut affirmer

$$|T_{n-1}| < M \cdot \frac{|x|^n}{n!}.$$

Or $\frac{x^n}{n!}$ tend vers zéro pour n infini (195, 3°) car il s'agit du terme général d'une série convergente, quel que soit x . Comme le second membre tend vers zéro lorsque n devient infini, *a fortiori* T_{n-1} tend vers zéro.

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — Si, sur un intervalle $] -r, +r[$, la fonction $f(x)$ admet des dérivées de tout ordre et si les valeurs absolues de toutes ces dérivées sont majorées par un nombre fixe, indépendant de x , la série de Mac-Laurin de la fonction $f(x)$ est convergente sur $] -r, +r[$ et, sur cet intervalle, sa somme coïncide avec $f(x)$.

218. Développement en série entière de $\sin x$ et $\cos x$ (¹). — Appliquons la formule de Mac-Laurin à la fonction $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2+n2}}{(2n+2)!} \sin [(n+1)\pi + \theta x]$$

$0 < \theta < 1.$

(1) L'exposé suivant est une conséquence de la définition des fonctions circulaires à l'aide du cercle trigonométrique; le lecteur trouvera un exposé de pure analyse à la fin de l'ouvrage (n° 276 et la suite).

Le terme complémentaire T_n est tel que

$$|T_n| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

donc T_n tend vers zéro pour n infini, quel que soit x .

$$S_n = \sin x - T_n \rightarrow \sin x \quad \text{pour } n \text{ infini,}$$

ce qui montre que la série de Mac-Laurin associée à $\sin x$ est convergente et a pour somme $\sin x$:

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots} \quad \forall x.$$

De même la formule de Mac-Laurin donne, pour $\cos x$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} + \theta x \right] \\ 0 < \theta < 1.$$

Le terme complémentaire T_n est tel que

$$|T_n| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

donc tend vers zéro pour n infini, quel que soit x .

$$S_n = \cos x - T_n \rightarrow \cos x \quad \text{pour } n \text{ infini,}$$

ce qui montre que la série de Mac-Laurin associée à $\cos x$ est convergente et a pour somme $\cos x$:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots} \quad \forall x.$$

REMARQUE. — Nous aurions pu justifier les développements en série entière de $\sin x$ et $\cos x$ en utilisant le théorème du n° 217, 4°; les fonctions considérées admettent en effet des dérivées de tout ordre n

$$\sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \quad \text{et} \quad \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

dont les valeurs absolues sont majorées par le nombre fixe $M = 1$.

219. Développement de e^x en série entière. — Appliquons la formule de Mac-Laurin à la fonction e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad 0 < \theta < 1.$$

Le terme complémentaire T_n est tel que

$$|T_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|},$$

donc tend vers zéro pour n infini, quel que soit x .

$$S_n = e^x - T_n \rightarrow e^x \quad \text{pour } n \text{ infini,}$$

ce qui montre que la série de Mac-Laurin associée à e^x est convergente, et a pour somme e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x.$$

On en déduit

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

et par suite

$$\begin{aligned} \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots & \forall x. \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & \forall x. \end{aligned}$$

220. Développement en série entière d'une fraction rationnelle.

— 1° Pour trouver le développement en série entière de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'admettant pas le pôle $x = 0$, on la décompose en éléments simples de première espèce, et l'on développe en série entière chacun de ces éléments simples; on fait ensuite la somme des développements ainsi obtenus.

Pour développer la fraction $\frac{1}{x-a}$ en série entière ordonnée suivant les puissances de x , on l'écrit $-\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a}}$ et l'on observe que $\frac{1}{1 - \frac{x}{a}}$ est la somme de la série géométrique de raison $\frac{x}{a}$, dont le premier terme est 1; d'où

$$(1) \quad \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^n} + \dots \right]$$

Le rayon de convergence de la série (1) est $|a|$.

Le résultat précédent est valable, que x et a soient réels ou complexes.

On peut dériver les deux membres par rapport à x (216), que x soit réel ou complexe, ce qui donne

$$\frac{1}{(x-a)^2} = \frac{1}{a^2} \left(1 + 2\frac{x}{a} + \dots + n\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}} + \dots \right)$$

et plus généralement

$$\frac{1}{(x-a)^p} = \frac{(-1)^p}{a^p} \left[1 + \frac{p(p-1) \dots 2x}{(p-1)! a} + \dots + \frac{(n+p-1) \dots (n+1)x^n}{(p-1)! a^n} + \dots \right]$$

Toutes ces séries ont pour rayon de convergence $R = |a|$.

Si $a, b, \dots, l$ sont les pôles distincts de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$, en opérant comme il vient d'être dit, on a finalement à ajouter des séries entières dont les

rayons de convergence respectifs sont $|a|, |b|, \dots, |l|$. Si l'on suppose que $|a|$ est inférieur ou égal à $|b|, \dots, |l|$, la série somme est certainement convergente pour $|x| < |a|$; le rayon de convergence R de la série somme est donc au moins égal à $|a|$. De façon plus précise, on peut affirmer que $|a|$, plus petit module des pôles de la fraction rationnelle, est le rayon de convergence de la série cherchée, car si $|a|$ était plus petit que R , la somme de cette série serait continue pour $x = a$. Or, la fraction rationnelle qui lui est égale devient infinie quand x tend vers a , ce qui est contradictoire; nécessairement $R = |a|$.

En résumé, *une fraction rationnelle n'admettant pas zéro pour pôle est développable en série entière; le rayon de convergence est le plus petit des modules de ses pôles.*

2° EXEMPLE. — Soit à développer en série entière la fraction rationnelle

$$y = \frac{x \sin \alpha}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}.$$

Ses pôles sont $x_0 = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad x_1 = \cos \alpha - i \sin \alpha,$

$$y = -i \frac{x_0}{2} \cdot \frac{1}{x - x_0} + i \frac{x_1}{2} \cdot \frac{1}{x - x_1}$$

ou

$$y = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_0}} - \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}}.$$

$$y = \frac{i}{2} \cdot \left[1 + \frac{x}{x_0} + \dots + \frac{x^n}{x_0^n} + \dots \right] - \frac{i}{2} \cdot \left[1 + \frac{x}{x_1} + \dots + \frac{x^n}{x_1^n} + \dots \right]$$

$$y = \frac{i}{2} \frac{x_1 - x_0}{x_0 x_1} x + \dots + \frac{i}{2} \frac{x_1^n - x_0^n}{(x_0 x_1)^n} x^n + \dots$$

et finalement

$$y = x \sin \alpha + \dots + x^n \sin n\alpha + \dots$$

Le rayon de convergence est le module commun de x_0 et x_1 , c'est-à-dire 1.

3° REMARQUE. — L'unicité du développement limité d'une fonction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'admettant pas zéro pour pôle, que ce développement soit obtenu à partir du développement en série entière, ou à partir d'une division de $f(x)$ par $g(x)$ suivant les puissances croissantes de la variable, permet d'obtenir les $n + 1$ premiers termes du développement en série entière en calculant le quotient à l'ordre n dans la division de $f(x)$ par $g(x)$, suivant les puissances croissantes.

Dans l'exemple précédent, le quotient relatif à l'entier 2 de $x \sin \alpha$ par $1 - 2x \cos \alpha + x^2$ est $x \sin \alpha + x^2 \sin 2\alpha$, la reste associé étant $x^3 \sin 3\alpha - x^4 \sin 2\alpha$. Par récurrence, on peut ainsi établir

$$x \sin \alpha = (1 - 2x \cos \alpha + x^2)(x \sin \alpha + x^2 \sin 2\alpha + \dots + x^n \sin n\alpha) + x^{n+1} \sin(n+1)\alpha - x^{n+2} \sin n\alpha$$

Par suite

$$\frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = S_n(x) + T_n(x), \quad T_n(x) = \frac{x^{n+1} \sin(n+1)\alpha - x^{n+2} \sin n\alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

Si $|x| < 1$, $T_n \rightarrow 0$ et $S_n(x) \rightarrow y$ pour n infini; on retrouve ainsi le développement de y en série entière.

221. *Développements en série entière obtenus par dérivation et intégration.* — 1° **Généralités.** — Supposons que, $f(x)$ étant une fonction donnée, on sache développer en série entière la fonction dérivée $f'(x)$ sur l'intervalle $] - R, + R[$, soit

$$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n +$$

Sur l'intervalle $] - R, + R[$ la série

$$a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

est convergente et sa somme $\varphi(x)$ admet pour dérivée $f'(x)$, il existe donc une constante C telle que $f(x) = \varphi(x) + C$; il est clair que $f(0) = C$ puisque $\varphi(0) = 0$; par conséquent

$$f(x) = f(0) + a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

sur l'intervalle $] - R, + R[$.

2° **Développement de $\text{Log}(1+x)$.** — La dérivée de cette fonction est $\frac{1}{1+x}$ et, pour $-1 < x < +1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

On a donc, en observant que $\text{Log}(1+x)$ s'annule pour $x = 0$,

$$(1) \quad \text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots; \quad -1 < x < 1.$$

Développement de $\text{Log}(1-x)$ et de $\text{Arg th } x = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$. En remplaçant x par $-x$ dans l'égalité (1), on trouve le développement de $\text{Log}(1-x)$.

$$(2) \quad \text{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \dots; \quad -1 < x < 1.$$

En retranchant membre à membre l'égalité (2) de l'égalité (1) et divisant par 2 les deux membres de l'égalité obtenue, on trouve

$$(3) \quad \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x} = \text{Arg th } x = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots; \quad -1 < x < 1.$$

Conséquences. — 1° Si l'on a $|x| < |a|$, on peut écrire

$$\text{Log}|a+x| = \text{Log}|a| + \text{Log}\left(1 + \frac{x}{a}\right) \text{ et}$$

$$\text{Log}|a+x| = \text{Log}|a| + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} + \dots$$

2° $\log_a(1+x)$ se développe en série entière en observant que c'est le quotient de $\text{Log}(1+x)$ par $\text{Log } a$.

3° **Développement de Arctg x .** — La dérivée de Arctg x est $\frac{1}{1+x^2}$; or
 $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^p x^{2p} + \dots$ pour $-1 < x < +1$

et comme Arctg 0 = 0,

$$(4) \quad \boxed{\text{Arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots} ; -1 < x < +1.$$

4° REMARQUE. — On peut dans certains cas montrer que l'intégration est possible jusqu'aux bornes comprises de l'intervalle de convergence.

Par exemple
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \text{Log } 2.$$

D'autre part

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}, \text{ pour tout } x > -1.$$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient

$$\text{Log } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx.$$

Appelons T_n le terme complémentaire :

$$\left| \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \right| < x^{n+1} \text{ pour } 0 \leq x \leq 1.$$

donc

$$|T_n| \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}.$$

Comme $T_n \rightarrow 0$ pour n infini, on démontre ainsi que

$$\text{Log } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \dots$$

c'est-à-dire que la formule (1) est encore vraie pour $x = 1$.

On montrera, par un procédé analogue, à partir de $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$, que la formule (4) est encore vraie pour $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

222. Développement en série entière d'une fonction donnée, solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre. —
 1° **Généralités.** — On dit que la fonction $f(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0$$

si en remplaçant dans (1) y par $f(x)$ et y' par $f'(x)$ on obtient au premier membre une fonction de x nulle dans un certain intervalle E.

Supposons qu'on puisse démontrer que la fonction $f(x)$ est caractérisée par la double condition :

- a) d'être solution de l'équation (1);
- b) de prendre, au point 0, la valeur $f(0) = a_0$.

S'il est alors possible de déterminer les coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de la série entière

$$(2) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

de manière que la somme de cette série vérifie la relation (1), on pourra affirmer que pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle E et comprises entre les limites de l'intervalle de convergence de la série (2), la somme de cette série ne diffère pas de la fonction $f(x)$; pour ces valeurs de x la série (2) est le développement de $f(x)$ en série entière.

REMARQUE. — Nous verrons ultérieurement comment on trouve toutes les fonctions, satisfaisant à une équation différentielle donnée, et développables en série entière.

2° **Développement en série entière de la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$.** — Cette fonction est définie, quel que soit α , sur $] -1, +\infty[$.

a) Propriétés caractéristiques de la fonction $f(x)$. Sur $] -1, +\infty[$, on a $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ et on en déduit

$$(3) \quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x);$$

$f(x)$ est donc une solution de l'équation différentielle

$$(4) \quad (1+x)y' = \alpha y; \quad \text{de plus} \quad f(0) = 1.$$

Réciproquement, cherchons toutes les solutions de l'équation différentielle (4); si y est l'une d'elles, la comparaison des égalités (3) et (4) conduit à

$$y'f(x) - yf'(x) = 0.$$

La fonction f ne prenant pas la valeur zéro dans l'intervalle $] -1, +\infty[$, il existe donc (81, 2°) une constante C telle que $y = Cf(x)$. Parmi les solutions de l'équation (4), une seule prend la valeur 1 pour $x = 0$, c'est $f(x)$, et nous concluons :

La fonction $(1+x)^\alpha$ est caractérisée par la double condition suivante :

1° elle est solution de l'équation différentielle (4);

2° elle prend, au point 0, la valeur 1.

b) Recherche du développement de $f(x)$.

α) *Analyse.* — Supposons que la fonction $(1+x)^\alpha$ ait un développement en série entière; il est nécessairement de la forme

$$f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad \text{puisque} \quad f(0) = 1.$$

On en déduit : $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$

Comme $f(x)$ est une solution de l'équation différentielle (4), les développements en série entière des fonctions $(1+x)f'(x)$ et $\alpha f(x)$ doivent avoir mêmes coefficients, ce qui conduit aux relations :

$$a_1 = \alpha, \quad 2a_2 + a_1 = \alpha a_1, \quad \dots, \quad na_n + (n-1)a_{n-1} = \alpha a_{n-1}, \quad \dots$$

qui s'écrivent aussi :

$$a_1 = \alpha, a_2 = \frac{\alpha-1}{2} a_1, \dots, \quad (5) \quad a_n = \frac{\alpha-n+1}{n} a_{n-1}, \dots$$

En multipliant membre à membre les n premières, on obtient

$$(6) \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

Nous pouvons conclure : si la fonction $(1+x)^\alpha$ est développable en série entière, les coefficients de cette série sont nécessairement déterminés par les égalités (6) pour $n = 1, 2, \dots$

β) *Synthèse*. — Soit, inversement, la série $u_n = a_n x^n$, a_n ayant la valeur (6). Nous devons en premier lieu examiner si elle admet un rayon de convergence non nul. Pour cela, nous utiliserons la règle de d'Alembert en remarquant que le rapport $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ est déjà connu, et donné par (5); formons alors

$$\left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| |x| = \left| \frac{\alpha-n+1}{n} \right| |x|.$$

Ce rapport tend vers $|x|$ et il en résulte (209) que la série $a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. Sur l'intervalle de convergence, la somme de cette série est solution de l'équation différentielle (4) et prend, pour $x = 0$, la valeur 1; d'après le 1°, cette somme est $(1+x)^\alpha$. On peut donc conclure :

$$(7) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$\forall x$ tel que $|x| < 1$.

REMARQUE. — Si α est un entier positif n , le coefficient de x^{n+1} est nul et il en est de même de tous les coefficients suivants, la série se réduit à un polynôme de degré n et on retrouve la formule du binôme de Newton. Dans le cas général, la série est connue sous le nom de *série du binôme*.

3° Applications. — Quel que soit α , la fonction $(a+x)^\alpha$ est définie pour $x > -a$, elle est définie sur un voisinage de 0 si a est positif; lorsqu'il en est ainsi, il suffit de l'écrire $a^\alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right)^\alpha$ et de développer $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^\alpha$ par la série du binôme pour trouver le développement en série entière de $(a+x)^\alpha$ valable pour x compris entre $-a$ et $+a$.

EXEMPLES. — a) *Développements de $\sqrt{1+x}$ et de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$* .

Des réductions déjà effectuées au n° 116 permettent d'écrire les développements suivants, valables pour $-1 < x < 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} x^n + \dots \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} x^n + \dots \end{aligned}$$

En remplaçant x par $-x$ on obtiendrait les développements en séries entières de $\sqrt{1-x}$ et de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ pour les mêmes valeurs de x .

Remplaçons successivement dans la dernière égalité x par $-x^2$ et par x^2 , nous trouvons ainsi les deux développements suivants valables pour

$$-1 < x < 1 :$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n}x^{2n} + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \dots + (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n}x^{2n} + \dots$$

b) *Développements de Arc sin x et de Arc cos x .* — Le développement de la première de ces fonctions se déduit de celui de sa dérivée, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On trouve ainsi en observant que Arc sin 0 = 0 et pour $-1 < x < 1$,

$$\text{Arc sin } x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

On pourrait procéder de même pour Arc cos x , on peut aussi remarquer que

$$\text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x.$$

c) *Développement de Arg sh x .* — Le développement de cette fonction se déduit de celui de sa dérivée qui est $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On trouve ainsi en tenant compte de ce que Arg sh 0 = 0 et pour $-1 < x < 1$,

$$\text{Arg sh } x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Il n'y a pas lieu de chercher un développement en série entière de Arg ch x , cette fonction n'étant pas définie pour $x = 0$.

4° **Application au développement en série entière d'une fraction rationnelle.** — p étant un entier naturel, soit à développer en série entière l'élément simple $\frac{1}{(x-a)^p}$. Si x et a sont réels, on peut écrire

$$\frac{1}{(x-a)^p} = \frac{(-1)^p}{a^p} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-p}$$

et appliquer la série du binôme

$$(8) \quad \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-p} = 1 + p \frac{x}{a} + \frac{p(p+1)}{2!} \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n!} \frac{x^n}{a^n} + \dots$$

rayon de convergence : $|a|$.

Cette formule est valable pour x et a complexes (n° 216, 3°).

Exemple de développement en série entière d'une fraction rationnelle. —

$$f(x) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3} = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$(1-x)^{-1} = \sum_0^{\infty} x^n; \quad (1-x)^{-2} = \sum_0^{\infty} (n+1)x^n; \quad 2(1-x)^{-3} = \sum_0^{\infty} (n+1)(n+2)x^n.$$

$$f(x) = 1^2 x + 2^2 x^2 + \dots + n^2 x^n + \dots \quad |x| < 1.$$

V. SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES ENTIÈRES

223. On peut dans certains cas reconnaître, dans une série entière, le développement d'une fonction connue; trouver cette fonction, c'est faire la sommation de la série entière. Ce problème est l'inverse de celui qui a été étudié précédemment.

EXEMPLE. — Le terme général est de la forme $u_n = P(n) \frac{x^n}{n!}$, $P(n)$ étant un polynôme en n . On met $P(n)$ sous la forme $a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + \dots$ (I, 200, 6°) et on utilise le développement de e^x .

Ainsi soit

$$f(x) = 1 + 2 \frac{x}{1!} + \dots + (n^2 + 1) \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$n^2 + 1 = 1 + n + n(n-1)$$

$$u_n = (n^2 + 1) \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^n}{(n-2)!}$$

Alors :

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = \frac{x}{1!} + x \cdot 1$$

$$u_2 = \frac{x^2}{2!} + x \cdot \frac{x}{1!} + x^2$$

$$\dots$$

$$u_n = \frac{x^n}{n!} + x \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x^2 \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$\dots$$

$$f(x) = e^x(1 + x + x^2).$$

EXEMPLE II. — Le terme général est de la forme $u_n = P(n) x^n$, $P(n)$ étant un polynôme en n . On met $P(n)$ sous la forme

$$a_0 + a_1(n+1) + a_2(n+2)(n+1) + \dots$$

et on utilise les développements de $\frac{1}{1-x}$ et de ses dérivées.

Ainsi soit

$$f(x) = 1 + 3x + 5x^2 + \dots + (2n+1)x^n + \dots$$

$$2n+1 = -1 + 2(n+1)$$

$$u_n = (2n+1)x^n = -x^n + 2(n+1)x^n$$

Alors

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 + 2 \\ u_1 &= -x + 2.2x \\ u_2 &= -x^2 + 2.3x^2 \\ &\dots \\ u_n &= -x^n + 2.(n+1)x^n \\ &\dots \\ f(x) &= \frac{-1}{1-x} + 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

EXEMPLE III. — Le terme général est de la forme $\frac{P(n)}{(n+a)(n+b)}x^n$, $P(n)$ étant un polynôme en n , a et b étant des entiers relatifs. On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{P(n)}{(n+a)(n+b)}$ et on utilise le développement de $\text{Log}(1-x)$.

Ainsi soit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{1.4} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)(n+2)} + \dots \\ \frac{1}{(n-1)(n+2)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+2} \\ u_n &= \frac{x^n}{(n-1)(n+2)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^n}{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^n}{n+2} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3} \left[x \cdot \frac{x}{1} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^4}{4} \right] \\ u_2 &= \frac{1}{3} \left[x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^5}{5} \right] \\ &\dots \\ u_n &= \frac{1}{3} \left[x \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} \right] \\ &\dots \\ f(x) &= \frac{x}{3} \left[-\text{Log}(1-x) \right] - \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} \left[-\text{Log}(1-x) \cdot -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \end{aligned}$$

ou enfin

$$f(x) = \frac{1-x^3}{3x^2} \text{Log}(1-x) + \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} + \frac{x}{9}.$$

VI. FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES D'UNE VARIABLE COMPLEXE

224. Définition des fonctions fondamentales. — 1° **Définition de e^z .**
— Quel que soit le nombre complexe z , la série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

est absolument convergente et si $E(z)$ est sa somme on sait que

$$E(z) \times E(z') = E(z+z'). \qquad (\text{n}^\circ 200)$$

De plus, si z est réel, la somme de la série est e^z (ou $\exp z$). Ces observations conduisent à la définition suivante :

DÉFINITION. — Si z est un nombre complexe, on représente par e^z (ou $\exp z$) le nombre défini par l'égalité

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

D'après la propriété rappelée, quels que soient z et $z' \in \mathbb{C}$,

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}.$$

En réitérant le produit de e^z par lui-même, on obtient

$$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \text{ entier naturel}).$$

D'autre part $e^z \times e^{-z} = e^0$ c'est-à-dire 1

$$e^z \times e^{-z} = 1 \implies e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

2° Fonctions hyperboliques. — Pour un nombre complexe z comme pour un nombre réel, on définit les fonctions hyperboliques au moyen des égalités

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Les formules d'addition et de multiplication obtenues pour z réel subsistent pour z complexe puisqu'elles se déduisent des relations

$$\begin{cases} e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z \\ e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z \end{cases} \quad \text{et} \quad e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}.$$

En particulier $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

Des égalités

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \dots$$

et des définitions de $\operatorname{ch} z$ et $\operatorname{sh} z$, il résulte immédiatement que, pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2p}}{(2p)!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \dots$$

3° Fonctions circulaires. — Remplaçons dans ces séries z par ix , x étant réel; nous obtenons

$$\operatorname{ch} ix = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{2p!} + \dots = \cos x$$

$$\operatorname{sh} ix = i \left[x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \dots \right] = i \sin x.$$

Il est ainsi démontré que, si x est réel,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

ces formules sont connues sous le nom de *formules d'Euler*.

Si z est complexe, on définit $\cos z$ et $\sin z$, $\operatorname{tg} z$ et $\cot z$ par les égalités

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

D'après les deux premières égalités, quel que soit le nombre $z \in \mathbb{C}$, $\cos z$ et $\sin z$ sont les sommes des séries absolument convergentes

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} + \dots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Observons aussi que

$$(1) \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

et que

$$\operatorname{ch} iz = \cos z, \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z.$$

En remplaçant z par iz dans ces formules, on trouve

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

Il suffit de multiplier membre à membre les égalités (1) pour trouver la relation

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Les formules d'addition et de multiplication des fonctions circulaires d'une variable complexe sont les mêmes que pour les fonctions circulaires d'une variable réelle. On peut les déduire des formules d'Euler.

Par exemple,

$$\cos(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) + (\cos a - i \sin a)(\cos b - i \sin b)}{2}$$

ou encore

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Application. — Les formules d'Euler peuvent être utilisées pour exprimer un monôme en $\sin x$ et $\cos x$ en fonction linéaire des cosinus et des sinus de l'arc x et de ses multiples; en effet

$$\cos^p x \sin^q x = \frac{1}{2^{p+q}} (e^{ix} + e^{-ix})^p (e^{ix} - e^{-ix})^q$$

et le second membre est la somme d'expressions de la forme $A(e^{kix} \pm e^{-kix})$, A étant un coefficient numérique, et éventuellement d'une constante.

On retrouve ainsi les résultats obtenus dans l'étude des nombres complexes; le nombre λ qui est intervenu au n° 87 du tome I

$$\lambda = \cos a + i \sin a \quad \text{n'est autre que} \quad e^{ia}.$$

225. Propriétés des fonctions fondamentales. — 1° **Module et argument de e^z .** — Soit $z = x + iy$.

$$e^z = e^x \times e^{iy} \quad \text{ou} \quad e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

x et y étant réels, e^z est positif :

e^{x+iy} a pour module e^x , et pour argument y .

2° **Périodicité de e^z .** — Ajouter 2π à y , laisse invariant $\cos y$ et $\sin y$ donc e^z ; or cela revient à ajouter $2\pi i$ à z .

Autrement dit $e^{z+2\pi i} = e^z$.

D'ailleurs $e^{z+2\pi i} = e^z \times e^{2\pi i}$

et $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$.

La fonction e^z admet donc pour période $2\pi i$.

3° **Demi-période et quart de période.** — Nous venons de voir

$$e^{2\pi i} = 1.$$

De même

$$e^{\pi i} = -1 \quad \text{et} \quad e^{z+\pi i} = -e^z$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i \quad \text{et} \quad e^{z+\frac{\pi}{2}i} = ie^z.$$

4° **Parties réelles et coefficients de i .**

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$

$$\text{ou} \quad \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

On trouve de même

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

$$\text{ou} \quad \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

$$\text{Par définition} \quad \operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin(x + iy)}{\cos(x + iy)}.$$

Multiplions les deux termes de cette fraction par $\cos(x - iy)$, nombre complexe conjugué du dénominateur et transformons les produits $2 \sin(x + iy) \cos(x - iy)$, $2 \cos(x + iy) \cos(x - iy)$ en sommes de fonctions circulaires; nous trouvons ainsi

$$\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + \sin 2iy}{\cos 2x + \cos 2iy}$$

et finalement

$$\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$$

REMARQUE. — Pour que $\cos(x + iy)$ soit réel, il faut et il suffit que $\sin x \operatorname{sh} y$ soit nul;

ou bien $y = 0$ et $z = x$ est réel

ou bien $x = k\pi$, et $\cos(k\pi + iy) = (-1)^k \operatorname{ch} y$.

Pour que $\sin(x + iy)$ soit réel, il faut et il suffit que $\cos x \operatorname{sh} y$ soit nul,

ou bien $y = 0$ et $z = x$ est réel

ou bien $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + iy\right) = (-1)^k \operatorname{ch} y$.

$\operatorname{tg}(x + iy)$ ne peut être réel que si $y = 0$.

5° Dérivées. — a) Soit $F = u + iv$, u et v étant deux fonctions réelles de la variable réelle x . Nous supposons que pour les valeurs considérées de x , les fonctions u et v admettent des dérivées u' et v' .

Dérivée de e^F . $e^F = e^u (\cos v + i \sin v)$

est une fonction complexe de la variable réelle x , elle admet une dérivée

$$(e^F)' = (e^u \cos v)' + i (e^u \sin v)'$$

ou, successivement,

$$(e^F)' = u'e^u \cos v + v'e^u \cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + u'e^u i \sin v + iv'e^u \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(e^F)' = u'e^{u+iv} + v'e^u (\cos v + i \sin v) \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(e^F)' = (u' + iv')e^{u+iv}$$

$$(e^F)' = F'e^F.$$

Dérivée de $\cos F$. — Puisque $\cos F = \frac{e^{iF} + e^{-iF}}{2}$

$$(\cos F)' = \frac{1}{2}(iF'e^{iF} - iF'e^{-iF})$$

$$(\cos F)' = -F' \sin F.$$

Dérivée de $\sin F$. — On trouverait de même $(\sin F)' = F' \cos F$.

REMARQUE. — On vérifie aisément que

$$(\operatorname{ch} F)' = F' \operatorname{sh} F \quad \text{et} \quad (\operatorname{sh} F)' = F' \operatorname{ch} F.$$

*b) Plus généralement les fonctions complexes de la variable complexe e^z , $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\cos z$, $\sin z$ sont les sommes de séries entières qui convergent pour toute valeur de z . Il en résulte (216, 2°) que ces fonctions admettent, en tout point z , des dérivées obtenues par dérivations terme à terme des développements écrits au n° 224. C'est ainsi que :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \Rightarrow (e^z)' = 1 + \frac{z}{1!} + \dots = e^z.$$

On constate :

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z; \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$$

$$(\cos z)' = -\sin z; \quad (\sin z)' = \cos z$$

226. — Résolution d'équations où l'inconnue est complexe. —

1° Résolution de l'équation $e^z = A$. — Si l'on cherche l'inconnue z sous forme algébrique, $z = x + iy$, e^z se trouve mis sous forme trigonométrique

$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$. On se donnera donc le nombre A sous sa forme trigonométrique $A = r(\cos \omega + i \sin \omega)$. On trouve ainsi

$$e^x = r, \quad y = \omega + 2k\pi$$

et finalement $z = \text{Log } r + i(\omega + 2k\pi)$.

L'équation proposée a une infinité de solutions différant entre elles d'un multiple de $2i\pi$, période de la fonction e^z .

Pour que l'une des déterminations de z soit réelle, il faut et il suffit que ω soit un multiple de 2π , c'est-à-dire que A soit un nombre réel positif, et alors

$$z = \text{Log } A + k.2i\pi.$$

Plus généralement, on peut appeler *logarithme népérien* de A toute solution de l'équation $e^z = A$.

2° RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $\sin z = b$. — Cette équation équivaut à l'équation :

$$\begin{aligned} e^{iz} - e^{-iz} &= 2ib \\ \text{ou } (1) \quad (e^{iz})^2 - 2ibe^{iz} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

du second degré par rapport à e^{iz} . Si $z = x + iy$, $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$; d'autre part si r et ω sont respectivement le module et l'argument de l'une des racines de l'équation (1), $\frac{1}{r}$ et $\pi - \omega$ sont le module et l'argument de l'autre puisque -1 est le produit de ces racines.

A la première racine correspondent les valeurs telles que

$$e^{-y} = r, \quad x = \omega + 2k\pi$$

d'où

$$z = \omega + 2k\pi - i \text{Log } r.$$

A la seconde racine correspondent les valeurs

$$z = \pi - \omega + 2k\pi + i \text{Log } r.$$

On constate que, comme dans la trigonométrie des arcs réels, toutes les racines de $\sin z = \sin a$ sont données par les formules

$$z = a + 2k\pi, \quad z = \pi - a + 2k\pi.$$

3° RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $\cos z = b$. — Cette équation équivaut à l'équation

$$(e^{iz})^2 - 2be^{iz} + 1 = 0$$

du second degré par rapport à e^{iz} . Si r est le module et ω l'argument de l'une des racines de cette équation, $\frac{1}{r}$ est le module et $-\omega$ l'argument de l'autre puisque le produit des racines est 1. On déduit aisément de là que

$$z = \omega + 2k\pi - i \text{Log } r \quad \text{ou} \quad z = -\omega + 2k\pi + i \text{Log } r.$$

Toutes les racines de $\cos z = \cos a$ sont donc données par les formules

$$z = a + 2k\pi, \quad z = -a + 2k\pi.$$

4° RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $\text{tg } z = b$. — Cette équation équivaut à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} &= ib \\ \text{ou } e^{2iz}(1 - bi) &= 1 + bi. \end{aligned}$$

Si r désigne le module et ω l'argument du nombre complexe $\frac{1+ib}{1-ib}$, l'équation devient en posant $z = x + iy$,

$$e^{2i(x+iy)} = r(\cos \omega + i \sin \omega).$$

e^{-2y} étant le module et $2x$ l'argument du premier membre,

$$e^{-2y} = r \quad \text{et} \quad 2x = \omega + 2k\pi$$

$$\text{d'où} \quad z = -\frac{i}{2} \text{Log } r + \frac{\omega}{2} + k\pi.$$

Les racines de $\text{tg } z = \text{tg } a$, a étant donné sont, $z = a + k\pi$, k étant un entier relatif quelconque.

REMARQUE. — Si $b = -i$, on ne trouve pas de valeur finie pour e^{2iz} et si $b = i$ on trouve $e^{2iz} = 0$. A ces valeurs de b ne correspond aucune valeur de z telle que $\text{tg } z = b$.

5° BIRAPPORT DE DEUX DROITES D , D' ET DES DROITES ISOTROPES PASSANT PAR LEUR INTERSECTION. — Les coordonnées étant rectangulaires, soient m, m' les coefficients directeurs des droites D, D' ; le birapport des droites D', D et des droites isotropes est

$$(m', m, i, -i) = \frac{m' - i}{m - i} : \frac{m' + i}{m + i} \quad \text{ou} \quad \frac{mm' + 1 + i(m' - m)}{mm' + 1 - i(m' - m)}.$$

$$\text{Soit } V = (D, D'), \text{ tg } V = \frac{m' - m}{1 + mm'}. \text{ La fraction précédente s'écrit } \frac{\cos V + i \sin V}{\cos V - i \sin V}.$$

$$\text{Finalement} \quad (m', m, i, -i) = \cos 2V + i \sin 2V \quad \text{ou} \quad e^{2iV}.$$

Cette relation permet de suivre ce que deviennent les angles dans une perspective.

VII. SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ⁽¹⁾

227. Définition d'une série trigonométrique. — On appelle série trigonométrique toute série de fonctions dont le terme général est de la forme

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

a_n et b_n étant deux nombres réels fonctions de l'entier n , mais indépendants de la variable réelle x .

Pour une raison qui apparaîtra plus loin, on note $\frac{a_0}{2}$ le premier terme de la série, indépendant de x .

Les fonctions $u_n(x)$ sont définies, continues et dérivables sur $]-\infty, +\infty[$ et elles admettent la période commune 2π . Il en résulte que si la série de fonctions converge (simplement ou uniformément), sa somme f admet la période 2π . Nous allons signaler deux cas dans lesquels on peut reconnaître la convergence d'une série trigonométrique.

1° **THÉORÈME.** — Si les séries numériques (a_n) et (b_n) sont absolument convergentes, la série trigonométrique

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

converge absolument et uniformément sur $]-\infty, +\infty[$.

(1) Les séries trigonométriques sont en dehors du programme.

En effet, pour toute valeur de x , la série numérique $(u_n(x))$ admet la série numérique majorante convergente $v_n = |a_n| + |b_n|$. La proposition découle du théorème démontré au n° 213, 4°.

2° THÉORÈME. — Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont deux suites à termes positifs, décroissantes, qui admettent la limite 0, la série numérique

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

est convergente pour $x \neq 2k\pi$.

Considérons la série $\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx + \dots$

et posons $S_n = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx$.

En supposant $x \neq k.2\pi$, formons

$$\begin{aligned} 2 S_n \sin \frac{x}{2} &= a_0 \sin \frac{x}{2} + 2 a_1 \sin \frac{x}{2} \cos x + \dots + 2 a_n \sin \frac{x}{2} \cos nx \\ &= a_0 \sin \frac{x}{2} + a_1 \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + \dots + a_n \left(\sin \frac{2n+1}{2} x - \sin \frac{2n-1}{2} x \right) \\ 2 S_n \sin \frac{x}{2} &= (a_0 - a_1) \sin \frac{x}{2} + (a_1 - a_2) \sin \frac{3x}{2} + \dots \\ &\quad + (a_{n-1} - a_n) \sin(2n-1) \frac{x}{2} + a_n \sin(2n+1) \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Au second membre figure la somme Σ_n des n premiers termes de la série de terme général

$$v_n = (a_{n-1} - a_n) \sin(2n-1) \frac{x}{2}.$$

D'après l'hypothèse $a_{n-1} - a_n > 0$; par suite $|v_n| \leq a_{n-1} - a_n = w_n$.

La série (v_n) admettant une série numérique majorante convergente (w_n) est, sur tout intervalle, absolument convergente; Σ_n tend vers une limite Σ , et comme a_n tend vers zéro, $2 S_n \sin \frac{x}{2}$ tend vers Σ , et, par suite, la série $(a_n \cos nx)$ est convergente quel que soit $x \neq k.2\pi$.

On étudie de la même façon la série $(b_n \sin nx)$.

EXEMPLE. — Nous savons (209) que la série entière $\left(\frac{z^n}{n}\right)$ admet 1 pour rayon de convergence; étudions-la sur le cercle de convergence; soit $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$u_n = \frac{\cos n\varphi}{n} + i \frac{\sin n\varphi}{n}.$$

$a_n = \frac{1}{n}$ est un nombre positif qui tend vers zéro, en décroissant, pour n infini; donc les séries $\left(\frac{\cos n\varphi}{n}\right)$ et $\left(\frac{\sin n\varphi}{n}\right)$ sont convergentes pour $\varphi \neq k.2\pi$, et u_n est aussi convergente.

Pour $\varphi = k.2\pi$, $z = 1$, et la série $\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

228. Intégration d'une série trigonométrique. — Supposons que les séries (a_n) et (b_n) soient convergentes; la fonction

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

est continue sur tout intervalle; elle est périodique, de période 2π ; comme la série est uniformément convergente, on peut par application du n° 213 l'intégrer terme à terme sur tout intervalle.

On obtient ainsi

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_0^{2\pi} (a_1 \cos x + b_1 \sin x) dx + \dots$$

Toutes les intégrales, sauf la première, sont nulles, et finalement

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \pi a_0.$$

On peut de même intégrer terme à terme les fonctions

$$f(x) \cos px \quad \text{et} \quad f(x) \sin px \quad (p \text{ entier naturel}).$$

Le calcul des intégrales

$$I_p = \int_0^{2\pi} f(x) \cos px dx \quad \text{et} \quad J_p = \int_0^{2\pi} f(x) \sin px dx$$

se ramène à celui des intégrales suivantes :

$$\text{si } n \neq p \quad \int_0^{2\pi} \cos px \cos nx dx = 0 \quad \int_0^{2\pi} \sin px \sin nx dx = 0$$

$$\text{si } n = p \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 px dx = \pi \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 px dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos px dx = 0.$$

$$\text{On obtient} \quad I_p = \pi a_p; \quad J_p = \pi b_p.$$

En d'autres termes :

$$(1) \quad a_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos px dx \quad b_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin px dx$$

$$p = 0, 1, 2, \dots \quad p = 1, 2, \dots$$

Les résultats précédents restent vrais dans tous les cas où la série trigonométrique $(u_n(x))$ est uniformément convergente sur tout intervalle.

REMARQUE. — Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période 2π , définie et continue pour tout x réel; intégrons-la sur un intervalle quelconque d'amplitude de 2π ; soit

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^{2\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx.$$

Dans la dernière intégrale, faisons le changement de variable $x = u + 2\pi$.

$$\int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(u + 2\pi) du = \int_0^{\alpha} f(u) du$$

à cause de la périodicité de la fonction f .

Finalement

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

En désignant par Δ un segment arbitraire d'amplitude 2π les formules (1) deviennent

$$a_p = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} f(x) \cos px dx \quad b_p = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} f(x) \sin px dx.$$

229. Développement d'une fonction donnée en série trigonométrique. — PROBLÈME. — Une fonction $f(x)$ étant donnée, existe-t-il une série trigonométrique dont elle soit la somme?

Une condition nécessaire est que $f(x)$ soit périodique et de période 2π ; nous la supposons réalisée.

1° Analyse. — Supposons qu'on puisse écrire

$$(1) f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots$$

Si l'on admet la possibilité d'intégrer terme à terme une série trigonométrique, un calcul analogue au précédent donnera des valeurs nécessaires de a_n et b_n

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

2° Synthèse. — A toute fonction $f(x)$ intégrable on a pu associer une série trigonométrique dont les coefficients sont donnés par les formules (2) : cette série s'appelle série de Fourier relative à la fonction $f(x)$.

Deux problèmes se posent alors :

- a) la série de Fourier d'une fonction intégrable $f(x)$ est-elle convergente?
- b) dans l'affirmative, sa somme est-elle $f(x)$?

Nous ne pouvons donner ici la solution de ces problèmes difficiles. Nous admettrons simplement le résultat suivant :

3° THÉORÈME. — Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période 2π , continue et pourvue d'une dérivée continue sauf en des points dont il existe un nombre fini dans un intervalle d'une période, et qui sont points de discontinuité de première espèce pour f ou f' . La série de Fourier associée à la fonction $f(x)$ est convergente pour tout x et a pour somme $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

En un point où $f(x)$ est continue, la somme de la série de Fourier est $f(x)$.

REMARQUE. — Supposons $f(x)$ paire; on peut choisir $[-\pi, +\pi]$ pour calculer les coefficients de la série de Fourier :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0, \quad \text{la fonction à intégrer étant impaire.}$$

Supposons maintenant $f(x)$ impaire; alors

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0, \quad \text{la fonction à intégrer étant impaire.}$$

Inversement, il est immédiat que, sous réserve de la convergence,

la fonction $\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx + \dots$ est paire

la fonction $b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx + \dots$ est impaire.

4° Exemples de calculs de coefficients de la série de Fourier d'une fonction donnée. — Une fonction périodique et de période P est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur un intervalle d'amplitude P . Nous tiendrons compte de ce fait dans les énoncés suivants.

a) Développer en série de Fourier la fonction périodique f , de période 2π , définie par $f(x) = x$ si $x \in]-\pi, +\pi[$ et $f(\pi) = 0$. Cette fonction est représentée graphiquement sur la figure 71.

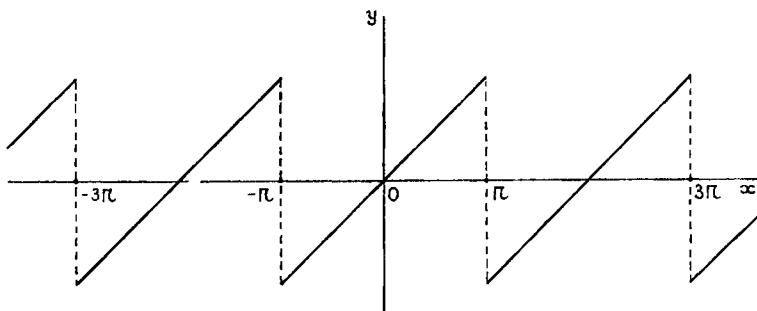


FIG. 71.

Comme elle est impaire, $a_n = 0$ et il suffit de calculer

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} t \sin nt \, dt = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

La fonction $f(x)$ définie plus haut a pour développement

$$f(x) = 2 \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx + \dots \right]$$

si $x \in]-\pi, +\pi[$, la série du second membre a pour somme x

si $x \in]\pi, 3\pi[$, la série du second membre a pour somme $x - 2\pi$, etc....

Pour $x = \pi$, la série a pour somme

$$\frac{1}{2} [f(\pi - 0) + f(\pi + 0)] = 0.$$

On voit sur cet exemple qu'une série de fonctions continues peut avoir pour somme une fonction discontinue.

b) Développer en série de Fourier la fonction périodique f de période 2π , définie par $f(x) = x$ si $x \in]0, 2\pi[$ et $f(0) = \pi$; cette fonction est représentée graphiquement sur la figure 72.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \, dt = 2\pi; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos nt \, dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

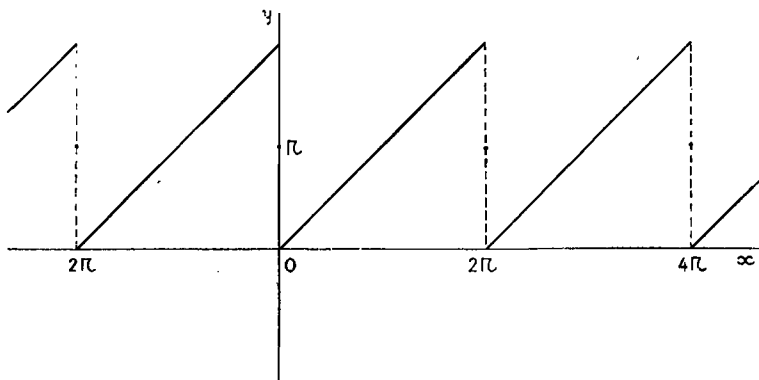


FIG. 72.

le changement de variable $t = 2\pi - u$ donne $a_n = -a_n$ d'où $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin nt \, dt = -\frac{2}{n} \quad (\text{n}^\circ 178)$$

$$f(x) = \pi - 2 \left[\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx + \dots \right]$$

REMARQUE. — Les deux séries précédentes ont même somme sur l'intervalle $]0, \pi[$ et, plus généralement sur les intervalles $]k.2\pi, \pi + k.2\pi[$; sur les autres intervalles de l'ensemble des réels, leurs sommes sont distinctes.

En faisant $x = \frac{\pi}{2}$, l'une ou l'autre donne

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

c) Développer en série de Fourier la fonction paire $f(x)$, périodique de période 2π , égale à $\pi - x$ pour $x \in [0, \pi]$, cette fonction est représentée graphiquement sur la figure 73.

$$f(x) = \pi - x \quad \text{pour } x \in [0, \pi]$$

$$f(x) = \pi + x \quad \text{pour } x \in [-\pi, 0].$$

La fonction étant paire, $b_n = 0$;

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + t) \cos nt \, dt + \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos nt \, dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 t \cos nt \, dt + \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt; \end{aligned}$$

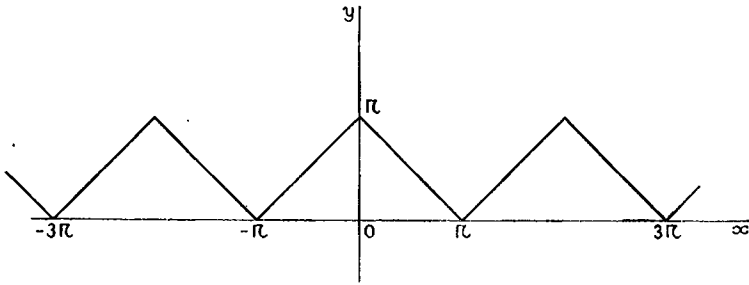


FIG. 73.

en se reportant au n° 178, on obtient

$$\begin{cases} a_{2q} = 0 \\ a_{2q+1} = \frac{4}{\pi(2q+1)^2} \end{cases}$$

Directement

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

Finalement

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \dots \right]$$

En donnant à x la valeur 0, on obtient

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$$

En posant

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} + \dots \right)$$

et en observant que la série qui est entre parenthèses a pour somme $\frac{\Sigma}{4}$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

EXERCICES

1. — Rayon de convergence de la série entière de terme général

$$n(-1)^n x^n; \quad \left(\frac{n^2+1}{2n^2-1} \right)^{\cot \frac{1}{n}} x^n; \quad \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n} x^n; \quad \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} x^n \quad (a > 0).$$

2. — Rayon de convergence de la série entière $(a_n x^n)$, a_n étant le n -ième chiffre après la virgule dans le développement décimal de π .

3. — Rayon de convergence de la série entière $(a_n x^n)$ sachant que les quotients

$$\left| \frac{a_{3p+1}}{a_{3p}} \right|, \quad \left| \frac{a_{3p+2}}{a_{3p+1}} \right|, \quad \left| \frac{a_{3p}}{a_{3p-1}} \right|$$

admettent respectivement, pour p infini, les limites non nulles l_1, l_2, l_3 .

4. — Développer en série entière la fonction $\operatorname{ch} x \cos x$ en utilisant successivement le produit de deux séries, la formule de Mac-Laurin, une équation différentielle linéaire, des exponentielles.

5. — Développer en série entière, sous la forme $(a_n x^n)$, chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+x+x^2}; \quad \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^p}; \quad \frac{1+x+x^2}{1+x}; \quad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \\ & \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3; \quad \frac{1}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}; \quad \frac{x\sin\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}; \quad \operatorname{Log}(1-2x\cos\alpha+x^2); \\ & \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{1+x}{1-x}; \quad \operatorname{Arc}\operatorname{tg}(1+x); \quad \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}; \quad \operatorname{Arg}\operatorname{th}\frac{x\operatorname{ch}\alpha}{1-x\operatorname{sh}\alpha}; \\ & \frac{\operatorname{Arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\operatorname{Arc}\sin x)^2; \quad \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{1+x}; \quad [\operatorname{Log}(1+x)]^2; \quad \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}; \\ & \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^\alpha; \quad \int_{-\infty}^x \frac{dt}{t^4+t^2+1}; \quad \sin^3 x \cos^4 x; \quad \frac{\sin x}{e^x}; \quad \cos x e^{2x} \\ & e^{x\operatorname{ch}\alpha} \operatorname{ch}(x\operatorname{sh}\alpha); \quad e^{x\cos\alpha} \sin(x\sin\alpha); \quad \operatorname{Log}[1+2x+2\sqrt{x(1+x)}]; \quad e^{\alpha \operatorname{Argsh} x} \\ & \frac{\operatorname{Arc}\sin x}{\sqrt{x}} \text{ et } \frac{\operatorname{Arc}\sin x}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (\text{que représentent les développements pour } x < 0?) \\ & (1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos(\alpha \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

6. — Développer en série entière la fonction $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$. Le dénominateur s'écrit $f \times g$ avec $f = (1-x)^3(1+x)$; $g = 1+x+x^2+x^3+x^4$; on formera d'abord l'égalité de Bezout relative aux polynômes f et g .

En déduire le nombre de façons de former une somme de N francs avec des pièces de 1, 2, 5 francs; cas de $N = 100$.

7. — Trouver, pour la fonction $\sin mx$ (m donné), un développement de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin^n x.$$

Développer en série entière la fonction $\sin[m \operatorname{Arc}\sin x]$.

8. — Calculer la somme de la série entière qui a pour terme général

$$\begin{aligned} & \frac{n^2+4n-1}{n+4} \frac{x^n}{n!}; \quad \frac{x^n \sin n\theta}{n!}; \quad \frac{x^n \sin n\theta}{n}; \quad \frac{nx^n}{(2n+1)!}; \quad (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!}; \\ & (2n+1)x^n; \quad n^2 x^n \quad (p \text{ naturel}); \quad (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)(2n+3)}; \quad \frac{x^n}{1+2+\dots+n}. \end{aligned}$$

9. — Calculer la somme des termes de la série e^x , pris de 3 en 3, à partir de l'un des trois premiers termes (α et β désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité, on calculera $\lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} + \nu e^{\gamma x}$, λ, μ, ν étant convenablement choisis parmi 1, α, β).

Généralisation. — Connaissant la somme $S(x)$ de la série entière $(a_n x^n)$, calculer la somme de ses termes pris p à p , à partir de $a_h x^h$ ($h < p$).

10. — Calculer la somme de la série numérique

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+7} \right); \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{2}{3n+3} \right); \\ & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}. \end{aligned}$$

11. — (a_n) étant une série convergente à termes réels, montrer que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

existe quel que soit x . Démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1+\infty} e^{-x} \left(a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + \dots + a_n \frac{x^n}{n!} \right) dx = \int_0^{1+\infty} e^{-x} S(x) dx.$$

12. — On considère les suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ définies par la donnée de u_0 et v_0 , et par les relations

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2v_n; & v_{n+1} &= u_n + v_n. \\ \text{Vérifier} & & |u_n| &< 2C(1 + \sqrt{2})^n \text{ et } |v_n| < \sqrt{2}C(1 + \sqrt{2})^n, \\ \text{C désignant} & & \sup \left(\frac{|u_0|}{2}, \frac{|v_0|}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

En déduire que les séries entières $\left(u_n \frac{x^n}{n!}\right)$ et $\left(v_n \frac{x^n}{n!}\right)$ convergent pour toute valeur de x . Calculer leur somme et en déduire une expression de u_n et v_n .

13. — Donner, sous la forme de la somme d'une série, la valeur des intégrales simples suivantes :

$$\int_1^{+\infty} x \left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \right) dx; \quad \int_1^{+\infty} e^x \operatorname{Log} x \, dx; \quad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

14. — Pour quelles valeurs de r la fonction $f(r) = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + r \cos^2 t}$ est-elle définie? Donner l'expression de $f(r)$ et la développer en série entière en r . Vérifier qu'on obtient le même résultat en intégrant terme à terme le développement de la fonction placée sous le signe $\int$.

15. — Résoudre, sur le corps $\mathbb{C}$, les équations :

$$\begin{aligned} \operatorname{th} z &= 1 + i; & \sin z &= \sqrt{2}; & \cos z &= 1 + i; & e^{\frac{z}{1+i}} &= 1 - i; & \cos z &= \operatorname{ch} z; & \sin z &= \operatorname{ch} z \\ \cos^2 z + \sin^2 z &= 1; & \operatorname{ch} a + \operatorname{ch}(a+z) + \operatorname{ch}(a+2z) + \operatorname{ch}(a+3z) &= 0 \\ 2 \cos z + i \sin z &= 1 - i; & \sin 3z &= \sin z + 2. \end{aligned}$$

16. — Lieu du point d'affixe z quand $\operatorname{th} z$ (resp. $\operatorname{ch} z$ ou $\cos z$) a un module donné.

17. — Calculer les parties réelle et imaginaire de $\operatorname{tg} \frac{x+iy}{2}$. Développer la partie réelle en série entière de $u = e^y$.

18. — En reprenant la définition et l'étude de la dérivée d'une fonction complexe de la variable complexe (ex. 4 du chapitre XII) étudier la dérivabilité des fonctions rationnelle, exponentielle, logarithmique, circulaires et hyperboliques (directes et inverses).

19. — Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π définie par

$$f(x) = |x| \quad \text{sur} \quad [-\pi, \pi].$$

Montrer que le résultat permet d'obtenir la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(2n+1)x}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{8} x^2 - \frac{\pi}{6} x^3; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

20. — Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π définie par

$$f(x) = \cos ax \quad (a \text{ non entier}) \text{ sur } [-\pi, +\pi].$$

En déduire la formule (attribuée à Euler)

$$\cotg x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2} \quad (x \text{ non multiple de } \pi).$$

21. — Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π définie par

$$\begin{aligned} a) & \quad f(x) = |\cos x| \quad \text{sur} \quad [-\pi, +\pi]. \\ b) & \quad f \text{ est impaire,} \quad f(x) = 1 \quad \text{sur} \quad]0, \pi[, \quad f(0) = f(\pi) = 0. \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{cases} f \text{ est impaire,} & f(x) = x \text{ sur } [0, \alpha] \text{ (avec } \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[), \\ f(x) = \alpha \text{ sur } [\alpha, \pi - \alpha], & f(x) = \pi - x \text{ sur } [\pi - \alpha, \pi]. \end{cases}$$

$$d) \quad f(x) = e^x \text{ sur }]-\pi, +\pi[, \quad f(\pi) = f(-\pi) = \operatorname{ch} \pi$$

22. — Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π définie par

$$f(x) = x^2 - \pi^2 \text{ sur } [-\pi, +\pi].$$

En déduire les sommes des séries $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left((-1)^n \frac{1}{n^2}\right)$.

23. — Montrer que, k étant un nombre réel tel que $0 < k < 1$, les séries de fonctions de termes généraux

$$u_n(x) = \frac{k^n \sin nx}{n} \quad \text{et} \quad v_n(x) = k^n \cos nx$$

convergent absolument et uniformément pour $x \in [-\pi, +\pi]$.

Calculer les sommes de ces séries.

24. — On considère la suite $\{f_n\}$ des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \int_0^n e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Montrer que f_n est dérivable pour tout $x > 0$ et calculer $f'_n(x)$.

Montrer que la suite de fonctions $\{f'_n\}$ converge uniformément vers une fonction φ que l'on explicitera et que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge uniformément vers une fonction f . En déduire une expression simple de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

25. — a) Soit $f(x)$ la somme de la série entière réelle $(a_n x^n)$, R le rayon de convergence. Montrer que si la série $(a_n R^n)$ est convergente, sa somme est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $R - 0$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{c} \forall p \\ n > N \end{array} \right\} \implies |a_{n+1}R^{n+1} + \dots + a_{n+p}R^{n+p}| < \varepsilon \quad (1)$$

En choisissant x entre 0 et R , $a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$; or la suite $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ permet d'appliquer le lemme d'Abel (ex. 23 du chapitre XVI)

$$|a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_{n+p}x^{n+p}| < \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} < \varepsilon, \quad \forall p \quad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) montrent que la série $(a_n x^n)$ est uniformément convergente dans $[0, R]$, sa somme est donc continue pour la valeur R .

b) Soit (u_n) et (v_n) deux séries convergentes, de sommes $U = \sum_0^\infty u_n$, $V = \sum_0^\infty v_n$; posons

$$w_0 = u_0 v_0, \quad \dots \quad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

Démontrer que si (w_n) est convergente et a pour somme $W = \sum_0^\infty w_n$, alors on a

$$W = U V.$$

On posera $f(x) = \sum_0^\infty u_n x^n$, $g(x) = \sum_0^\infty v_n x^n$, $h(x) = \sum_0^\infty w_n x^n$; ces séries entières convergent pour $x = 1$; donc si $|x| < 1$, $h(x) = f(x)g(x)$ (n° 211).

On fera enfin tendre x vers 1 en utilisant le a).

26. — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions convexes sur l'intervalle I , qui converge vers une fonction f . Montrer que f est convexe sur I .

27. — Montrer que la suite $\{f_n\}$ de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 4^n (x^{2n} - x^{2n+1}), \quad (n \geq 1),$$

converge simplement, mais non uniformément.

28. — Utiliser la convergence uniforme d'une suite de fonctions au calcul de la limite, pour n infini, de

$$I_n = \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{x + n} dx.$$

29. — Sur f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq n \quad \text{et} \quad f_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad x > n.$$

Montrer que la suite $\{f_n\}$ converge vers une fonction f ; la convergence est-elle uniforme?

30. — Soit f_n la fonction continue sur $[0, +\infty[$, telle que

$$f_n(x) = \frac{(\text{Log } x)^{2n} - 2}{(\text{Log } x)^{2n} + 2} \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

a) Montrer que la suite $\{f_n\}$ converge vers une fonction f , dont on construira le graphe.

b) Montrer que la convergence de $\{f_n\}$ est uniforme sur $[1, 2]$, mais ne l'est pas sur $[0, 1]$.

31. — a) A tout polynôme à coefficients réels, P , et à tout naturel n , on associe le polynôme

$$B_n(P) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Vérifier les relations :

$$B_n(xP) = \frac{x(1-x)}{n} B'_n(P) + x B_n(P);$$

$$B_n(1) = 1; \quad B_n(x) = x; \quad B_n\left(\left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

b) On donne une fonction f continue sur $[0, 1]$ et on pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrer que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

32. — On pose :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2}.$$

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Expliquer le résultat obtenu.

33. — Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de $I = \int_0^1 x^x dx$.

On montrera que l'on peut considérer la fonction $x \mapsto x^x$ comme la somme d'une série de fonctions qui converge normalement sur $[0, 1]$.

34. — Soit u_n la fonction définie par

$$u_n(x) = \sin^\alpha x \cos^n x \quad (\alpha : \text{réel positif}).$$

Pour quelles valeurs de α la série de fonctions (u_n) est-elle uniformément convergente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

35. — Montrer que la série (u_n) de fonctions telles que

$$u_n(x) = \text{Log} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x \right], \quad (n \geq 2),$$

converge sur $] -1, +\infty[$ et que la convergence est uniforme sur $[0, A]$, pour tout $A > 0$.

36. — Soit a un paramètre réel et h un réel tel que $0 < h < 1$.

a) Montrer que les séries entières de la variable t

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \cos(2n+1)a \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \sin(2n+1)a$$

convergent absolument et uniformément pour $|t| \leq h$. Donner une expression de leurs sommes que l'on désignera par $M(t, a)$ et $N(t, a)$.

b) On pose

$$P(t, a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{4n^2 - 1} \cos na.$$

Montrer qu'il s'agit d'une série qui converge absolument et uniformément pour $|t| \leq 1$.

c) Montrer que, pour $|t| < 1$,

$$P(t, a) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}(1 - t^2) \cos \frac{a}{2} \cdot M\left(t, \frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}(1 + t^2) \sin \frac{a}{2} \cdot N\left(t, \frac{a}{2}\right)$$

En déduire que, pour tout x réel,

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{4n^2 - 1}.$$

37. — Soit f une application de classe C^{n+1} du segment $[0, 1]$ dans $] -\infty, +\infty[$.

a) Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P_n , de degré au plus égal à n , tel que

$$P_n\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i}{n}\right), \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Montrer qu'à tout $x \in [0, 1]$ on peut associer un nombre $c \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = x \left(x - \frac{1}{n}\right) \dots \left(x - \frac{i}{n}\right) \dots \left(x - \frac{n}{n}\right) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

b) On se place dans le cas où $f(x) = xe^{-x}$. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |xe^{-x} - P_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$$

Montrer que, dans ce cas, la suite de fonctions $\{P_n\}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

38. — Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, $a < b$, et λ un paramètre réel. On pose

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx.$$

On se propose de démontrer : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0$

a) Montrer qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer une fonction en escalier, φ_ε , telle que

$$0 < \int_a^b (f(x) - \varphi_\varepsilon(x)) < \varepsilon.$$

b) On pose : $G(\lambda) = \int_a^b \varphi_\lambda(x) \sin \lambda x dx$. Montrer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G(\lambda) = 0$.

c) Conclure.

39. — On se propose d'utiliser l'exercice précédent pour démontrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx,$$

dont on commencera par vérifier l'existence, est égale à $\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer : $C(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx.$$

b) Montrer que : $F(n) = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \right) \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx$

a un sens et admet la limite 0 pour n infini.

c) Vérifier que : $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx$ et conclure

40. — Soit f la fonction continue sur $[0, 1]$, telle que

$$f(x) = \frac{x \operatorname{Log} x}{x - 1} \quad \text{si} \quad x \in]0, 1[.$$

a) Montrer qu'on peut développer $f(x)$ en série, en utilisant le développement de $\frac{1}{1-x}$. Vérifier que le développement obtenu converge uniformément sur $[0, 1]$

b) Calculer : $I_n = \int_0^1 x^n \operatorname{Log} x dx$. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^1 f(x) dx$.

CHAPITRE XVIII

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

230. — Notion d'équation différentielle d'ordre n . — 1° DÉFINITION. — Étant donnée une fonction réelle, F , de $n + 2$ variables réelles, on dit que la fonction réelle ⁽¹⁾ ψ d'une variable réelle, définie et n fois dérivable sur un intervalle I , est une solution — ou intégrale — de l'équation différentielle d'ordre n

$$(E) \quad F[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0$$

si la fonction composée de la variable réelle x

$$x \longrightarrow f[x, \psi(x), \psi'(x), \dots, \psi^{(n-1)}(x), \psi^{(n)}(x)]$$

est définie sur I et coïncide sur I avec la fonction nulle.

Intégrer une équation différentielle, c'est en déterminer toutes les solutions, en précisant pour chacune d'elles l'intervalle sur lequel elle est définie.

2° Courbes intégrales. — Donnons-nous, une fois pour toutes, un plan affine réel Γ et un repère $\mathcal{R}$ de Π ; en pratique Π aura été muni d'une structure euclidienne et $\mathcal{R}$ aura été choisi orthonormé.

A toute solution, ψ , de l'équation différentielle (E) on peut associer l'ensemble Γ des points $M(x, y)$ de Π tels que : $y = \psi(x)$, $x \in I$. La fonction ψ étant, pour le moins, continue et dérivable sur I , Γ est un arc simple continu (IV, 10); nous dirons que Γ est une *courbe intégrale* de (E).

3° Changement de variable. — Choisissons une fonction g , n fois dérivable, à dérivée première strictement positive (resp. négative), ce qui nous permet d'affirmer (n° 165, 1°, III) que g^{-1} existe et possède ces mêmes pro-

(1) Par exception, au cours de l'étude des équations différentielles linéaires, ψ pourra être une fonction complexe d'une variable réelle.

priétés. Dans (E) remplaçons la variable x par la variable t telle que : $x = g(t)$. On a :

$$y' = \frac{1}{g'(t)} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{1}{(g'(t))^3} \left[g'(t) \frac{d^2y}{dt^2} - g''(t) \frac{dy}{dt} \right] \dots$$

En portant ces expressions dans (E), nous obtenons une équation différentielle (E_1) , dans laquelle y est une fonction inconnue de t .

En remplaçant dans (E_1) la variable t par la variable x telle que : $t = g^{-1}(x)$, ce qui est possible d'après les propriétés de g^{-1} , on retrouverait (E), si bien que les solutions de (E) et (E_1) se correspondent biunivoquement, la solution $y = \psi(x)$ de (E) étant associé à la solution $y = h(t)$ de (E_1) , définie sur J, avec

$$h = \psi \circ g \quad \text{et} \quad J = g^{-1}(I) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi = h \circ g^{-1} \quad \text{et} \quad I = g(J) \quad (1)$$

Si l'on sait trouver les solutions de (E_1) , on en déduit celles de (E) au moyen des formules (1). On peut remarquer que l'intégration de (E_1) fournit les courbes intégrales de (E) sous la forme paramétrique

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad t \in J$$

qui permet parfois une construction plus aisée que celle que l'on déduirait de (1), car on ne dispose en général pas d'une expression simple de la fonction g^{-1} .

4° Intersion du rôle des variables. — Dans le cas où la solution $y = \psi(x)$, $x \in I$ de l'équation différentielle possède une dérivée strictement positive, la détermination de ψ équivaut à celle de la fonction inverse ψ^{-1} . Celle-ci est une solution de l'équation différentielle

$$(E_2) \quad F \left[x, y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}, \dots \right] = 0$$

dans laquelle x est une fonction inconnue de y .

Quand on remplace sans précaution (E) par (E_2) :

a) on perd les solutions constantes de (E), s'il en existe;

b) on introduit, au titre de solutions étrangères de (E), les solutions constantes de (E_2) , s'il en existe.

C'est ainsi que si l'on remplace (E) $y' = \frac{y}{x}$ par (E_1) $x' = \frac{x}{y}$ on perd la solution $y = 0$ de (E) et on introduit la solution $x = 0$ de (E_1) , qui ne saurait être solution de (E) au sens de la définition donnée au 1°.

231. Théorème d'existence. — 1° **Équation résolue en $y^{(n)}$.** — Dans l'étude des problèmes théoriques tels que celui de l'existence des solutions, on se limite au cas d'une équation différentielle résolue en $y^{(n)}$, c'est-à-dire au cas d'une équation de la forme

$$(E) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

dans laquelle :

$$(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \longrightarrow f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

est une fonction donnée, à valeurs réelles ou complexes, de $n + 1$ variables parmi lesquelles la première, x , est réelle, les autres étant réelles ou complexes.

On suppose que f est définie sur une boule ouverte, $\mathcal{C} = I \times \mathcal{B}$, I désignant un intervalle réel, décrit par x , et $\mathcal{B}$ une boule de $\mathbb{R}^n$, ou de $\mathbb{C}^n$, décrite par le point $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, que nous désignerons par Y .

2° Le problème de Cauchy. — Les notations étant celles du 1°, soit x_0 un point de I et $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un point de $\mathcal{B}$ tels que sont vérifiées les deux hypothèses suivantes :

(H₁) Il existe deux réels positifs, η et r , tels que, sur la boule fermée (partie de $\mathcal{C}$)

$$(1) \quad |x - x_0| \leq \eta, \quad \|Y - Y_0\| \leq r$$

f est une fonction continue des $n + 1$ variables $x, y_1, \dots, y_n$; elle est alors bornée sur la boule (1), ce qui se traduit par l'existence d'un majorant, M , de $|f(x, Y)|$.

(H₂) Sur la boule fermée

$$(2) \quad |x - x_0| \leq \beta, \quad \|Y - Y_0\| \leq r, \quad \text{où} \quad \beta = \inf\left(\eta, \frac{r}{M}\right),$$

f admet des dérivées partielles, bornées en module, par rapport aux variables $y_1, \dots, y_n$.

Dans ces conditions, on démontre et nous admettrons que (E) admet une, et une seule solution, $y = \psi(x)$, définie sur un voisinage de x_0 et vérifiant les conditions initiales ou conditions de Cauchy

$$\psi(x_0) = \alpha_1, \quad \psi'(x_0) = \alpha_2, \quad \dots, \quad \psi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n.$$

L'intervalle de définition de cette fonction contient $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$.

En d'autres termes, dans les conditions indiquées, il existe une et une seule solution de (E) pour laquelle la fonction ψ et ses $n - 1$ premières dérivées prennent, au point x_0 de I , des valeurs imposées.

3° Solution générale. — Nous supposons ici que la fonction f est définie et continue sur la boule ouverte $\mathcal{C} = I \times \mathcal{B}$, qu'elle admet sur $\mathcal{C}$ des dérivées partielles continues par rapport à $y_1, \dots, y_n$. Les hypothèses du 2° sont ainsi vérifiées en tout point de $\mathcal{C}$.

Fixons un point x_0 de l'intervalle I et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de (E) qui sont définies sur un voisinage de x_0 . A toute solutions, $\psi \in \mathcal{E}$, on peut associer le point $Y_0 = (\psi(x_0), \psi'(x_0), \dots, \psi^{(n-1)}(x_0))$ de $\mathcal{B}$. Inversement à tout point $Y_0 \in \mathcal{B}$ on peut, puisque les hypothèses (H₁) et (H₂) relatives à (x_0, Y_0) sont vérifiées, associer celle des fonctions de $\mathcal{E}$ qui vérifie les conditions de Cauchy (x_0, Y_0) . Il existe donc une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{B}$; le point générique de $\mathcal{B}$ ayant n coordonnées, l'élément générique de $\mathcal{E}$ dépend de

n paramètres ⁽¹⁾; nous dirons que $\mathcal{G}$ est la *solution générale* de (E), chacune des fonctions de $\mathcal{G}$ étant une solution particulière.

Toute solution éventuelle de (E) qui ne pourra pas être considérée comme une solution particulière sera dite *solution singulière*; il en sera naturellement ainsi pour une solution en chaque point de laquelle les hypothèses du 2° ne sont pas vérifiées.

II. GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

232. Équation différentielle du premier ordre. — 1° Notations.

La forme la plus générale d'une équation différentielle du premier ordre est

$$(E) \quad F(x, y, y') = 0.$$

Le théorème général du n° 231, que nous avons admis, permet d'affirmer l'existence *a priori* de solutions quand (E) peut être ramenée à une équation résolue par rapport à y' ,

$$(H) \quad y' = \varphi(x, y),$$

dans laquelle la fonction φ est continue sur une boule ouverte $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ et y admet une dérivée partielle continue par rapport à y ; (x_0, y_0) étant un point de $\mathcal{C}$, il existe une et une seule solution de (H) qui est définie sur un voisinage de x_0 et prend au point x_0 la valeur y_0 .

2° **Écriture différentielle.** — D'après l'étude du changement de variable (230, 3°), on peut dire que, avec les notations du 1°, l'intégration de (H) équivaut à la recherche des applications différentiables

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\Phi}(I) \begin{cases} x = g(I) \\ y = h(I) \end{cases} \quad (g \text{ monotone})$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}$ telles que, en tout point t_0 de l'intervalle de définition J , l'image de l'élément générique dt de $\mathbb{R}$ par l'application différentielle de $\vec{\Phi}$ au point t_0 ait des composantes, dx et dy , liées par

$$dy = \varphi[g(t_0), h(t_0)] dx,$$

ce qui est indépendant du choix du paramétrage (avec les réserves habituelles).

Nous pouvons traiter le même problème, en nous dispensant de la restriction « g monotone ». Par abus de langage nous dirons que, ce faisant, nous *inlégrons l'équation différentielle*

$$dy = \varphi(x, y) dx.$$

On obtient ainsi les solutions de (H) et d'autres solutions éventuelles.

(1) x_0 ne doit pas être considéré comme un paramètre, car l'intégrale générale qui est définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 ne change pas si on remplace x_0 par un autre point de $\mathcal{V}$.

3^o Premiers exemples. — a) Soit (1) $y' = f(x)$
 $f(x)$ désignant une fonction donnée, continue sur un intervalle I.

Les solutions de l'équation différentielle (1) sont, d'après leur définition même, les primitives de la fonction $f(x)$. Ce sont donc les fonctions définies sur I et données par

$$x \rightarrow y = F(x) + \lambda,$$

$F(x)$ désignant une primitive, arbitrairement choisie, et λ une constante quelconque. Les graphes de ces fonctions se déduisent de l'un d'eux par des translations parallèles à Oy.

Étant donné $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, une, et une seule, solution prend la valeur y_0 pour $x = x_0$; c'est

$$x \rightarrow y = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0$$

et le théorème général (n^o 231, 2^o) se trouve ainsi démontré directement dans le cas de l'équation (1).

b) Soit (2) $y' = g(y)$

$g(y)$ désignant une fonction donnée, continue sur un intervalle J sur lequel elle ne prend pas la valeur 0.

D'après cette dernière hypothèse, une solution éventuelle, $y = \psi(x)$, de (2) est nécessairement monotone et sa détermination équivaut à celle de la fonction réciproque ψ^{-1} , elle-même donnée (230, 4^o) par l'équation différentielle : $x' = \frac{1}{g(y)}$, soit (cf. a))

$$(3) \quad y \rightarrow x = G(y) + \lambda$$

$G(y)$ désignant une primitive de $\frac{1}{g(y)}$ sur J, arbitrairement choisie, et λ une constante quelconque.

Si l'on tient à expliciter (3) sous la forme $y = \psi_\lambda(x)$, on l'écrira

$$x \rightarrow y = G^{-1}(x - \lambda),$$

ce qui est possible puisque G est monotone.

Les courbes intégrales correspondantes se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à Ox.

Étant donnée $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times J$, une, et une seule, solution de (2) prend la valeur y_0 pour $x = x_0$; c'est la fonction réciproque de la fonction x de y déterminée par

$$(4) \quad y \rightarrow x = \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} + x_0.$$

Pour retrouver ce résultat, on écrira (2) sous la forme : $dx = \frac{dy}{g(y)}$.

REMARQUE. — Reprenons (2), en supposant que la fonction $g(y)$ est continue sur $[\alpha, \beta[$ et prend la valeur 0 au seul point α de cet intervalle. Il en résulte que g garde un signe constant; pour fixer les idées, supposons

$$g(y) > 0 \quad \text{pour} \quad y \in]\alpha, \beta[\quad \text{et} \quad g(\alpha) = 0.]$$

Ici (2) admet visiblement pour solution la fonction constante $y = \alpha$ et, d'autre part le calcul précédent est valable, avec $J =]\alpha, \beta[$. Ainsi, pour un point donné (x_0, y_0) de $R \times [\alpha, \beta[$ le problème de Cauchy admet une solution unique si $y_0 \neq \alpha$, au moins une solution si $y_0 = \alpha$. Pour préciser ce dernier cas, cherchons la limite de la fonction x de y déterminée par (4) quand y tend vers α , ce qui revient à étudier l'existence de l'intégrale généralisée $\int_{y_0}^{\alpha} \frac{dt}{g(t)}$, $\alpha < y_0 < \beta$.

I) *L'intégrale diverge.* — Lorsque y tend vers α , l'expression de x donnée par (4) tend vers $-\infty$; les graphes des solutions (4) sont asymptotes à la droite $y = \alpha$. Pour le point donné (ξ, α) , le problème de Cauchy admet la seule solution $y = \alpha$.

II) *L'intégrale converge.* — En écrivant (4) sous la forme

$$x = \int_{y_0}^{\eta} \frac{dt}{g(t)} + \int_{\eta}^y \frac{dt}{g(t)} + x_0 \quad \alpha < \eta < \inf(y, y_0),$$

et en faisant tendre η vers α , on peut écrire

$$(5) \quad x = \int_{\alpha}^y \frac{dt}{g(t)} + x_1. \quad \alpha \leq y < \beta.$$

Le graphe de la solution correspondante contient le point (x_1, α) et est tangent en ce point à la droite $y = \alpha$.

La formule (5) donne $x > x_1$ pour $\alpha \leq y < \beta$; soit $y = \psi(x)$ la fonction réciproque de celle qui est donnée par (5).

La fonction définie par

$$(6) \quad \begin{cases} y = \alpha & \text{si} \quad x \leq x_1 \\ y = \psi(x) & \text{si} \quad x \geq x_1 \end{cases}$$

est solution de l'équation (2).

Il en résulte que pour le point donné (ξ, α) le problème de Cauchy admet pour solutions toutes les fonctions définies par (6), en prenant $x_1 \geq \xi$. La fonction $y = \alpha$ est ici une solution singulière de l'équation (2).

EXEMPLE. — Soit l'équation (E) $y' = y^k$. On suppose $k > 0$ et on se limite à $y \geq 0$. On intègre (E) en écrivant

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{y^k}, & \text{d'où} \quad x &= x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{y^k} & (y > 0) \\ \text{Si} \quad k > 1, & \quad x &= x_1 - \frac{1}{(k-1)y^{k-1}} \\ \text{si} \quad k = 1, & \quad x &= x_0 + \text{Log} \frac{y}{y_0} \\ \text{si} \quad 0 < k < 1, & \quad x &= x_1 + \frac{1}{1-k} y^{1-k}. \end{aligned}$$

Pour $k > 1$, on est dans le cas I précédent ($\alpha = 0$). Pour $0 < k < 1$, on est dans le cas II ($\alpha = 0$), le graphe est tangent à l'axe Ox au point d'abscisse x_1 .

Sur la figure 74 on a marqué en gros points le graphe de l'une des intégrales passant par le point donné $(\xi, 0)$ dans le cas où $0 < k < 1$.

Les particularités ainsi observées correspondent dans le théorème général d'existence, au fait que la fonction $\varphi(x, y) = y^k$ n'admet au point $(\xi, 0)$ une dérivée partielle continue par rapport à y que si $k > 1$.

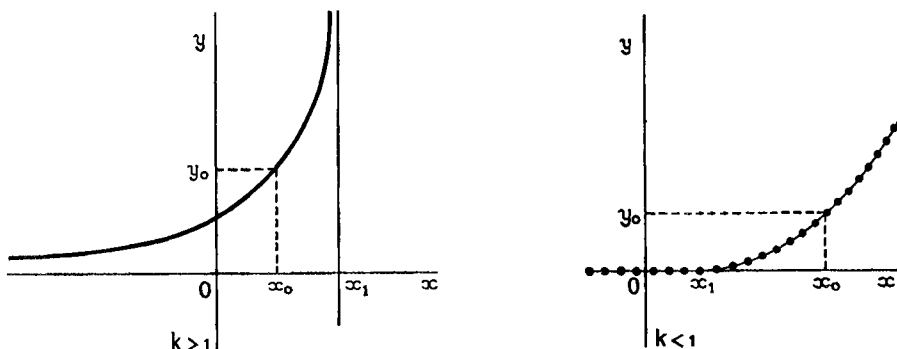


FIG. 74.

233. — Interprétation géométrique d'une équation différentielle du premier ordre. — Nous gardons les notations du n° 232, 1°.

1° Éléments de contact. — Rapportons le plan à un repère affine $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ et reprenons l'équation (H). A tout point $M(x, y)$ de la boule ouverte $\mathcal{C}$ où l'on peut déterminer y' en fonction de x et y est associée une valeur y' et une seule.

DÉFINITION. — On appelle **élément de contact** tout triplet (x, y, t) auquel on associe l'ensemble formé par le point $M(x, y)$ et la droite MT de coefficient directeur t issue de ce point.

Au domaine $\mathcal{C}$ se trouve ainsi associé, par la donnée de (H), un ensemble $\mathcal{E}$ d'éléments de contact.

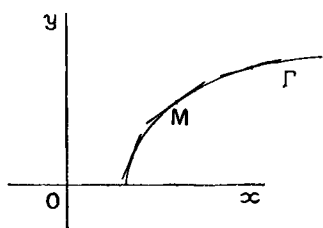


FIG. 75.

Une courbe intégrale de (H) est une courbe Γ telle que tout élément de contact formé d'un point de Γ et de la tangente en ce point à Γ fasse partie de $\mathcal{E}$ (fig. 75). En d'autres termes, intégrer (H), c'est associer les éléments de contact de l'ensemble $\mathcal{E}$ de façon qu'ils appartiennent à une même courbe Γ , graphe d'une fonction ψ telle que

$$\psi'(x) = \varphi[x, \psi(x)].$$

La donnée de l'équation différentielle sous la forme (E) permet d'associer à un point $M(x, y)$ les valeurs y' solutions de l'équation $F(x, y, t) = 0$ où t est l'inconnue, x et y étant choisis de façon que soit possible la résolution de l'équation précédente.

2° Courbes isoclines. — Les points M du plan où l'un des éléments de contact associés à M par la donnée de (E) a pour coefficient directeur le nombre donné m sont ceux de la courbe

$$(\beta_m) \quad F(x, y, m) = 0.$$

Cette courbe est dite *courbe isocline* relative à l'équation (E), pour la direction de coefficient directeur m .

La courbe $\mathcal{J}_m$ est le lieu des points de contact des tangentes de coefficient directeur m aux courbes intégrales. En particulier la courbe d'équation $F(x, y, 0) = 0$ est le lieu des points des courbes intégrales où la tangente est parallèle à Ox .

EXEMPLES. — I) Pour l'équation différentielle

$$(1) \quad y' = f(x)$$

en tous les points d'une droite Δ , d'abscisse x , les éléments de contact comportent des droites parallèles; les isoclines sont des parallèles à l'axe Oy (fig. 76). On a vu au n° 232, 3° que les courbes intégrales étaient déduites de l'une d'elles par les translations parallèles à Oy .

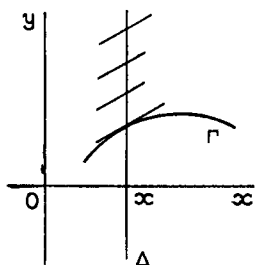


FIG. 76.

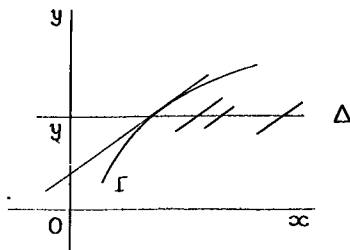


FIG. 77.

II. — Pour l'équation différentielle

$$(2) \quad y' = g(y),$$

en tous les points d'une droite Δ , d'ordonnée y , les éléments de contact comportent des droites parallèles, les isoclines sont des parallèles à l'axe Ox (fig. 77).

S'il existe une valeur α telle que $g(\alpha) = 0$, la droite $D(y = \alpha)$ (fig. 78) est une courbe intégrale.

On a vu, au n° 232, 3° que les courbes intégrales étaient déduites de l'une d'elles par les translations parallèles à Ox .

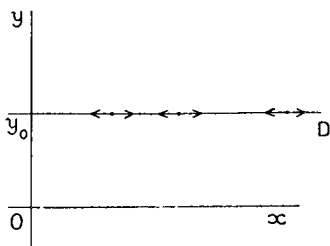


FIG. 78.

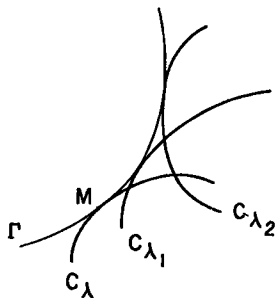


FIG. 79.

3° Enveloppe des courbes intégrales. — Si les courbes intégrales C_λ d'une équation différentielle (E) ont une enveloppe Γ (fig. 79), Γ est une courbe intégrale de (E): en effet, en chaque point M de Γ l'élément de contact (M, MT) formé par le point et la tangente en ce point est aussi l'élément de contact formé par un point de C_λ et la tangente en ce point à C_λ , donc est un élément de contact créé par la donnée de (E); les éléments de contact de Γ appartenant à (E), Γ est une courbe intégrale de (E). La solution de (E) qui est représentée par Γ est singulière; en effet la figure 79 montre la possibilité d'obtenir une courbe intégrale de (E) en associant convenablement des arcs de C_{λ_1} , Γ et C_{λ_2} (courbe représentée par un trait ponctué); il en résulte que par un point de Γ passent une infinité de courbes intégrales de (E) et qu'en ce point le théorème général d'existence est en défaut.

III. ÉQUATIONS A VARIABLES SÉPARABLES

234. Équation dont le premier membre est une différentielle.

— 1° Soit $U(x, y)$ une fonction connue des deux variables x et y ; nous supposons qu'elle admet dans une boule ouverte $\mathfrak{D}$ de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles continues, $U'_x(x, y)$ et $U'_y(x, y)$, $U'_y(x, y)$ ne prenant pas la valeur 0 en un point de $\mathfrak{D}$.

Soit alors l'équation différentielle

$$(E) \quad U'_x(x, y) + U'_y(x, y)y' = 0. \quad (1)$$

a) *Analyse.* Supposons qu'il existe une solution, $y = \psi(x)$, de l'équation (1), c'est-à-dire une fonction ψ dérivable telle que

$$U'_x[x, \psi(x)] + U'_y[x, \psi(x)] \cdot \psi'(x) = 0 \quad (2)$$

quel que soit x , sur un intervalle I.

Soit H l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = U[x, \psi(x)];$$

les conditions suffisantes de dérivabilité d'une fonction composée sont ici satisfaites (U'_x et U'_y sont continues, et ψ est dérivable); par suite

$$H'(x) \quad \text{qui n'est autre que} \quad U'_x[x, \psi(x)] + U'_y[x, \psi(x)] \cdot \psi'(x)$$

prend la valeur 0 en tout point de I, d'après l'hypothèse (2); $H(x)$ est, sur I, une constante, soit λ .

En d'autres termes, $\psi(x)$ est nécessairement une solution en y de l'équation

$$U(x, y) = \lambda. \quad (3)$$

b) *Synthèse.* Partons de l'équation (3) dans laquelle $\lambda = U(x_0, y_0)$, (x_0, y_0) étant un point de $\mathfrak{D}$; résolvons-la par rapport à y , d'après la théorie des fonctions implicites, cette résolution est possible puisque $U'_y(x, y) \neq 0$. Il existe, sur un intervalle I contenant x_0 , une fonction implicite $y = \psi(x)$ définie par (3) :

$$\psi(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad \forall x \in I, \quad U[x, \psi(x)] = 0.$$

Cette fonction admet sur I une dérivée $\psi'(x)$ telle que

$$U'_x[x, \psi(x)] + U'_y[x, \psi(x)] \cdot \psi'(x) = 0$$

ce qui montre que la fonction ψ est une intégrale de E.

Le théorème d'existence (n° 231) est ainsi démontré de façon directe.

En résumé :

THÉORÈME. — Si U'_x et U'_y sont continues et si U'_y ne prend pas la valeur 0, les solutions de $U'_x + U'_y \cdot y' = 0$ sont obtenues en résolvant par rapport à y l'équation $U(x, y) = \lambda$, où λ est une constante quelconque.

2° Avec les mêmes hypothèses, sans qu'il soit cependant nécessaire d'imposer cette fois que U'_y ne prend pas la valeur 0 sur $\mathcal{D}$, nous montrerions par un raisonnement analogue au précédent que les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$U'_x(x, y) dx + U'_y(x, y) dy = 0$$

dont le premier membre est la différentielle de la fonction $U(x, y)$, sont représentées par $U(x, y) = \lambda$.

235. Équation à variables séparables. — 1° **DÉFINITION.** On appelle équation à variables séparables toute équation qui peut se mettre sous la forme

$$(E) \quad P(y) \cdot y' = Q(x).$$

Nous supposons la fonction $P(y)$ continue sur $]y_1, y_2[$, et ne prenant la valeur 0 en aucun point de cet intervalle; nous supposons $Q(x)$ continue sur $]x_1, x_2[$.

2° Intégration. — Il suffit de désigner par $F(y)$ et $G(x)$ des primitives arbitrairement choisies de $P(y)$ et de $Q(x)$, puis de poser

$$U(x, y) = F(y) - G(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{D} =]x_1, x_2[\times]y_1, y_2[$$

pour se trouver dans la situation du n° 234.

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — Si les fonctions $P(y)$ et $Q(x)$ sont continues et $P(y) \neq 0$, l'équation différentielle à variables séparées

$$P(y) dy = Q(x) dx$$

admet pour intégrales les solutions en y de l'équation

$$(1) \quad F(y) = G(x) + \lambda,$$

où F et G sont des primitives arbitraires de P et Q et λ une constante quelconque.

Ces solutions peuvent se noter

$$y = F^{-1}[G(x) + \lambda].$$

car la fonction F est, d'après l'hypothèse, strictement monotone.

REMARQUE I. — Nous pouvons vérifier le théorème général d'existence du n° 231 : étant donné le point (x_0, y_0) de $]x_1, x_2[\times]y_1, y_2[$, il existe une seule solution de (E) qui prend la valeur y_0 pour $x = x_0$; elle s'écrit

$$\int_{y_0}^y P(t) dt = \int_{x_0}^x Q(t) dt,$$

ce qui se retient aisément en adoptant l'écriture différentielle de (E) :

$$P(y) dy = Q(x) dx.$$

Cette écriture justifie le nom traditionnel d'équation « à variables séparables ».

REMARQUE II. — Les solutions de l'équation différentielle

$$f(x) y' = g(y)$$

sont les fonctions constantes $y = b$, où b est un zéro de la fonction g , et les fonctions

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x \frac{dt}{f(t)},$$

x et y variant dans des intervalles où les fonctions f et g sont continues et ne prennent pas la valeur zéro.

EXEMPLE. — Intégrer l'équation : $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$. (E)

Les intégrales de (E) ne peuvent exister que si $\frac{1-y^2}{1-x^2}$ est positif, et dans un intervalle où $1-x^2$ ne s'annule pas. Par suite nous aurons à chercher ces intégrales :

1° lorsque $x \in]-1, +1[$, et alors $|y| \leq 1$,

2° lorsque $x \in]-\infty, -1[$ ou $x \in]1, +\infty[$ et alors $|y| > 1$.

Observons dès maintenant que l'une et l'autre des fonctions constantes $y = 1$, $y = -1$ sont des solutions de E sur chacun des intervalles

$$]-\infty, -1[, \quad]-1, +1[, \quad]+1, +\infty[.$$

Géométriquement si ABCD est le carré (fig. 81) dont les sommets ont pour coordonnées ± 1 , les droites AB et CD sont des courbes intégrales (il faut enlever de ces droites les points A et B d'une part, C et D d'autre part)

Nous continuerons l'étude en nous plaçant successivement dans les deux hypothèses du début.

I. — Recherche des intégrales pour $|x| < 1$ et $|y| < 1$.

Les variables se séparent sous la forme

$$(1) \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

puisque $1-x^2$ et $1-y^2$ sont séparément positifs.

On peut faire le changement de variables

$$x = \sin \theta, \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[; \quad y = \sin \varphi, \quad \varphi \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[.$$

L'équation (1) donne (puisque $\cos \theta > 0$ et $\cos \varphi > 0$).

$$d\theta = d\varphi \quad \text{d'où} \quad \varphi = \theta + \lambda,$$

λ étant une constante; θ ne peut varier qu'entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et de façon telle que $\theta + \lambda$ varie aussi entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; le graphique ci-contre (fig. 80). montre que si $\lambda > 0$, θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2} - \lambda$; le point

(2) $M[x = \sin \theta, y = \sin(\theta + \lambda)]$ décrit l'arc FG (fig. 81).

θ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2} - \lambda$
x	-1	0	$\cos \lambda$
y	$-\cos \lambda$	$\sin \lambda$	1

En F la tangente est la droite BC; en G, la tangente est la droite AB. A deux points (θ, φ) du graphique auxiliaire symétriques par rapport à la seconde bissectrice des axes $\Omega\varphi, \Omega\theta$ correspondent deux points de l'arc FG symétriques par

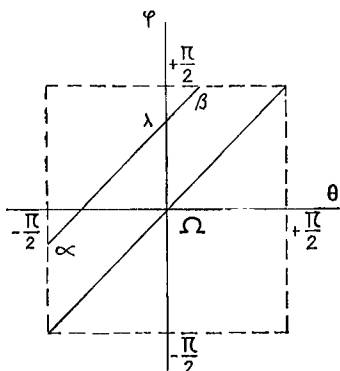


FIG. 80.

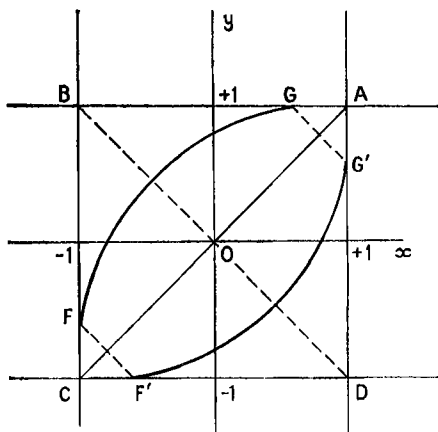


FIG. 81.

rapport à la seconde bissectrice des axes Ox, Oy . [$\theta_1 = -\varphi$; $\varphi_1 = -\theta$ donnant $x_1 = -y$ et $y_1 = -x$].

Pour $\lambda = 0$, on obtient la portion AC de la première bissectrice.

Le cas $\lambda < 0$ se ramène au précédent en observant que le changement de λ en $-\lambda$ et de θ en $-\theta$ change x et y en $-x$ et $-y$; l'arc $F'G'$ est symétrique de l'arc FG par rapport à O.

On peut éliminer θ entre les équations

$$\begin{cases} x = \sin \theta \\ y = \sin \theta \cos \lambda + \cos \theta \sin \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin \theta \\ y = x \cos \lambda + \cos \theta \sin \lambda \end{cases}$$

ce qui donne

$$(3) \quad \left(\frac{y - x \cos \lambda}{\sin \lambda} \right)^2 + x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2xy \cos \lambda = \sin^2 \lambda.$$

Les arcs FG et $F'G'$ appartiennent à la même ellipse car l'équation (3) est invariante quand on remplace λ par son opposé; cette ellipse est symétrique par rapport aux bissectrices des axes; elle est inscrite dans le carré ABCD.

II. — Recherche des intégrales pour $|x| > 1$ et $|y| > 1$.

Les variables se séparent alors sous la forme

$$(4) \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

puisque $x^2 - 1$ et $y^2 - 1$ sont séparément positifs.

On peut faire le changement de variables

$$\begin{cases} x = \varepsilon \operatorname{ch} \theta, \\ \theta > 0, \varepsilon = \pm 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{sh} \theta \end{cases} \quad \begin{cases} y = \varepsilon' \operatorname{ch} \varphi \\ \varphi > 0, \varepsilon' = \pm 1. \\ \sqrt{y^2 - 1} = \operatorname{sh} \varphi. \end{cases}$$

et l'équation (4) devient

$$\varepsilon d\theta = \varepsilon' d\varphi \quad \text{d'où} \quad \varphi = \varepsilon \varepsilon' (\theta + \lambda)$$

λ étant une constante; θ ne peut prendre que des valeurs positives telles que $\varepsilon \varepsilon' (\theta + \lambda)$ soit positif, et la courbe intégrale est décrite par le point

$$(5) \quad N[x = \varepsilon \operatorname{ch} \theta; \quad y = \varepsilon' \operatorname{ch} (\theta + \lambda)].$$

Dans tous les cas changer ε en $-\varepsilon$ et ε' en $-\varepsilon'$ remplace N par son symétrique par rapport à O .

Si ε et ε' sont de même signe, on peut supposer $\varepsilon = 1$; $\varepsilon' = 1$.

$\lambda > 0$	θ	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\begin{cases} x = \operatorname{ch} \theta \\ y = \operatorname{ch} (\theta + \lambda) \end{cases}$
	x	1	$\nearrow$	$+\infty$	
	y	$\operatorname{ch} \lambda$	$\nearrow$	$+\infty$	

$\begin{cases} \theta > 0 \\ \varphi = \theta + \lambda > 0 \end{cases}$

$\lambda < 0$	θ	$-\lambda$	$\nearrow$	$+\infty$	$\begin{cases} \theta > 0 \\ \varphi = \theta + \lambda > 0 \end{cases}$
	x	$\operatorname{ch} \lambda$	$\nearrow$	$+\infty$	
	y	1	$\nearrow$	$+\infty$	

Pour $\lambda = 0$, on obtient la portion de la première bissectrice extérieure au segment AC.

Les arcs HK et H'K' associés à deux valeurs opposées de λ sont symétriques par rapport à la première bissectrice; ces arcs sont tangents en H à AD et en H' à AB (fig. 82).

Si ε et ε' sont de signes contraires, supposons $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = -1$.

θ	0	$\nearrow$	$-\lambda$	$\begin{cases} x = \operatorname{ch} \theta \\ y = -\operatorname{ch} (\theta + \lambda) \end{cases}$
x	1	$\nearrow$	$\operatorname{ch} \lambda$	
y	$-\operatorname{ch} \lambda$	$\nearrow$	-1	

$\begin{cases} \theta > 0 \\ \varphi = -(\theta + \lambda) > 0, \\ \text{nécessairement } \lambda < 0. \end{cases}$

On obtient l'arc IJ (fig. 82), tangent en I à AD, en J à CD, symétrique par rapport à la seconde bissectrice, car on peut écrire $x = \operatorname{ch} (\varphi + \lambda)$, $y = -\operatorname{ch} \varphi$.

On ne peut dans ce cas donner à λ la valeur 0.

On peut éliminer θ entre les équations

$$\begin{cases} x = \varepsilon \operatorname{ch} \theta \\ y = \varepsilon' (\operatorname{ch} \theta \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \theta \operatorname{sh} \lambda) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \varepsilon \operatorname{ch} \theta \\ y = \varepsilon \varepsilon' x \operatorname{ch} \lambda + \varepsilon' \operatorname{sh} \theta \operatorname{sh} \lambda \end{cases}$$

ce qui donne

$$(6) \quad x^2 - \left(\frac{y - \varepsilon \varepsilon' x \operatorname{ch} \lambda}{\varepsilon' \operatorname{sh} \lambda} \right)^2 = 1 \quad \text{ou} \quad y^2 + x^2 - 2 \varepsilon \varepsilon' xy \operatorname{ch} \lambda = -\operatorname{sh}^2 \lambda.$$

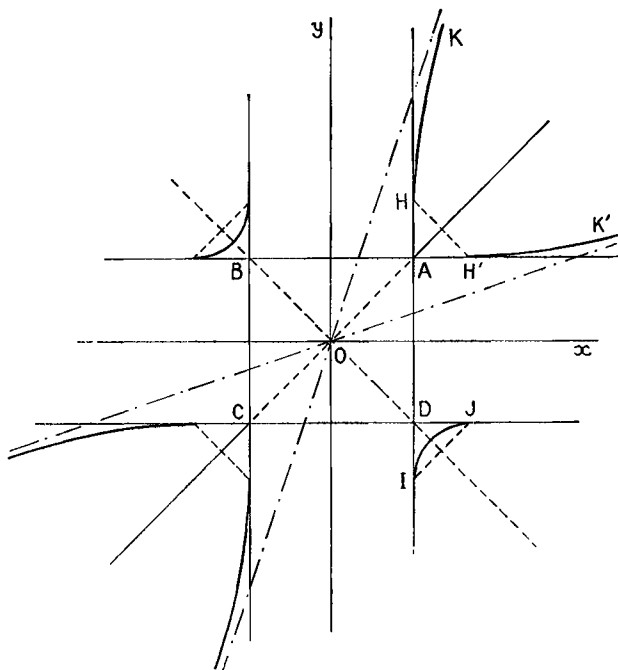


FIG. 82.

Les arcs HK et H'K' ainsi que leurs symétriques par rapport à O appartiennent à la même hyperbole ($\epsilon\epsilon' = +1$); les arcs IJ et leurs symétriques par rapport à O appartiennent à la même hyperbole ($\epsilon\epsilon' = -1$). Ces hyperboles sont tangentes aux prolongements des côtés du carré ABCD.

REMARQUE. — Dans tous les cas, les courbes intégrales sont des arcs des coniques que peut représenter l'équation

$$(7) \quad x^2 + y^2 - 2\mu xy = 1 - \mu^2$$

qui rassemble à la fois l'équation (3) ($|\mu| < 1$) et l'équation (6) ($|\mu| > 1$); ces arcs sont ceux aux points desquels le coefficient directeur de la tangente est positif.

Les courbes représentées par l'équation (7) ont pour enveloppe l'ensemble des droites qui supportent les côtés du carré ABCD. Les solutions $y = \pm 1$, signalées au début, sont donc singulières.

236. Équations différentielles incomplètes. — On appelle équation différentielle incomplète, du premier ordre, une équation où figurent seulement les variables x et y' , ou y et y' , soit

$$(1) \quad f(x, y') = 0 \quad | \quad f(y, y') = 0 \quad (2)$$

Si l'on sait exprimer les deux variables en fonction d'un paramètre t , par exemple si la relation $f(u, v) = 0$ étant algébrique en u et v représente une courbe unicursale, l'intégration se ramène aux quadratures.

Supposons que les relations

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

équivalent à l'équation (1).

$$dy = \psi(t) dx$$

or $dx = \varphi'(t) dt$

par suite $dy = \psi(t) \varphi'(t) dt$

les courbes intégrales sont

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int_{t_0}^t \psi(u) \varphi'(u) du + \lambda \end{cases}$$

Supposons que les relations

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

équivalent à l'équation (2).

$$dy = \psi(t) dx$$

or $dy = \varphi'(t) dt$

par suite $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt$

les courbes intégrales sont

$$\begin{cases} x = \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)} du + \lambda \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

Par exemple, soit à intégrer $y^3 + y'^3 - 3yy' = 0$; la courbe représentée par $u^3 + v^3 - 3uv = 0$ est un folium de Descartes dont nous savons trouver une représentation paramétrique rationnelle. Nous pouvons poser $\frac{dy}{dx} = \frac{3t}{1+t^3}$ et $y = \frac{3t^3}{1+t^3}$, et poursuivre comme nous l'avons indiqué : les courbes intégrales admettent pour représentation paramétrique

$$x = -t + \text{Log}|1+t| - \frac{1}{2} \text{Log}(t^2-t+1) + \sqrt{3} \text{Arc tg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + \lambda, \quad y = \frac{3t^3}{1+t^3}.$$

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES HOMOGÈNES

237. Équations différentielles homogènes. — DÉFINITION. — 1° On dit qu'une équation différentielle du premier ordre est homogène si, résolue par rapport à y' , elle s'écrit

$$(E) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1)$$

Pour tout point $M(x, y)$ de la droite D issue de O , de coefficient directeur l ($y = lx$), l'élément de contact associé comporte la droite MT dont le coefficient directeur est $m = f(l)$; toutes ces droites MT sont parallèles entre elles (fig. 83).

L'isocline associée à la direction de coefficient directeur m comporte toutes les droites D issues de O dont le coefficient directeur l est solution de l'équation

$$m = f(l).$$

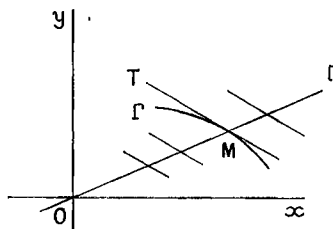


FIG. 83.

Si une courbe Γ est une intégrale de (E), toute courbe déduite de Γ par une homothétie de centre O est encore une courbe intégrale.

2° Plus généralement une équation différentielle du premier ordre

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

est homogène lorsque la fonction Φ est homogène par rapport aux variables x et y ; le changement simultané de x et y en λx et λy , λ étant une constante, laisse y' invariant, et comme $\Phi(\lambda x, \lambda y, y') = \lambda^n \Phi(x, y, y')$, l'équation (2) reste invariante.

Il résulte de la théorie des fonctions homogènes (149) que l'équation (2) peut prendre la forme

$$(3) \quad F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0,$$

et, résolue en y' , la forme (1).

238. Intégration de l'équation différentielle homogène. — 1° Une courbe intégrale Γ de l'équation

$$(E) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

admet, au point M situé sur la droite $D(y = tx)$, une tangente dont le coefficient directeur est $f(t)$.

C'est au moyen du paramètre t que nous allons essayer de représenter paramétriquement Γ .

Le point courant M a ainsi pour coordonnées

$$x(t), \quad y = t \cdot x(t).$$

$$\text{L'équation (E) devient} \quad \frac{dy}{dt} = f(t) \cdot \frac{dx}{dt};$$

la fonction inconnue $x(t)$ vérifie l'équation à variables séparables

$$t \cdot \frac{dx}{dt} + x = f(t) \frac{dx}{dt}.$$

$$\text{ou} \quad x = [f(t) - t] \frac{dx}{dt} \quad \text{ou enfin} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}.$$

a) Si t_0 est un zéro de la fonction $f(t) - t$, la droite $D_0(y = t_0 x)$ est une intégrale de (E) : en tout point de D_0 , l'élément de contact associé est précisément porté par D_0 (fig. 84).

b) Pour toute valeur de t n'annulant pas $f(t) - t$, on a successivement, en désignant par $H(t)$ une primitive arbitraire de $\frac{1}{f(t) - t}$,

$$\text{Log } |x| = H(t) + C;$$

d'où, comme on a vu précédemment

$$\Gamma \begin{cases} x = \lambda e^{H(t)} \\ y = \lambda t e^{H(t)}. \end{cases}$$

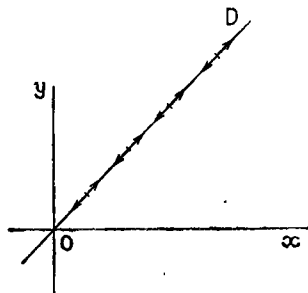


FIG. 84.

On obtient bien, comme il était prévu, des courbes deux à deux homothétiques par rapport au point O.

En résumé, l'utilisation de la nouvelle fonction inconnue x de la nouvelle variable $t = \frac{y}{x}$ ramène l'équation différentielle homogène à une équation à variables séparables.

EXEMPLE. — Intégrer l'équation différentielle

$$(E) \quad xy'(2y - x) = y^2.$$

On l'écrit $y' = \frac{y^2}{x(2y - x)}$ ou, avec $y = tx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2}{2t - 1}$.

$$t + x \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{t^2}{2t - 1}$$

d'où $x \frac{dt}{dx} = \frac{t - t^2}{2t - 1} \quad (1) \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{2t - 1}{t^2 - t} dt. \quad (2)$

a) Si $t = 0$ ou $t = 1$, l'équation (1) est vérifiée; les droites $y = 0$, et $y = x$ sont des courbes intégrales de E.

b) Supposons $t(t - 1) \neq 0$; alors (2) s'intègre sous la forme

$$\text{Log } x = -\text{Log}|t^2 - t| + C$$

$$|x||t^2 - t| = e^C$$

et enfin $x = \frac{\lambda}{t^2 - t}$, $\lambda \neq 0$, mais de signe quelconque.

Une courbe intégrale γ_λ a pour représentation paramétrique

$$x = \frac{\lambda}{t^2 - t}, \quad y = \frac{\lambda t}{t^2 - t},$$

et pour équation cartésienne

$$(3) \quad y(y - x) = \lambda x.$$

L'équation (3) n'a été obtenue que si $\lambda \neq 0$; mais si $\lambda = 0$, cette équation redonne les droites $y = 0$ et $y = x$ mises en évidence ci-dessus.

En résumé les courbes intégrales sont toutes données par l'équation (3).

Leur construction est immédiate en écrivant

$$x = \frac{y^2}{y + \lambda} \quad \text{ou} \quad x = y - \lambda + \frac{\lambda^2}{y + \lambda}.$$

Ce sont des hyperboles dont les asymptotes sont mises en évidence ($y = -\lambda$ et $x = y - \lambda$).

2° Méthode d'intégration en coordonnées polaires. — Transfor-

mons $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$\frac{dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta}{dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta} = f(\text{tg } \theta).$$

On peut résoudre par rapport à $\frac{dr}{r}$, et obtenir une équation à variables séparées :

$$\frac{dr}{r} = F(\theta) d\theta.$$

EXEMPLE. — Intégrer l'équation $y' = \frac{x + y}{x - y}$. Passons aux coordonnées polaires; nous

trouvons $\frac{dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta}{dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$, ou encore $\frac{dr}{r} = d\theta$. Les courbes intégrales

sont les spirales logarithmiques représentées par $r = \lambda e^\theta$. Cela s'explique géométriquement : on peut poser $y' = \operatorname{tg} \varphi$, φ étant un angle polaire de la tangente à une courbe intégrale; d'autre part $\frac{y+x}{x-y} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)$; l'équation proposée équivaut à $\varphi = \frac{\pi}{4} + \theta + k\pi$, ou encore à

$$V = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

V désignant l'angle du rayon vecteur avec la tangente; cet angle est constant (tome IV).

239. Équation homogène non résolue en y' . — 1° **Intégration dans un cas particulier.** — Soit l'équation

$$(E) \quad F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0;$$

montrons qu'on saura la ramener aux quadratures si l'on connaît une représentation paramétrique de la courbe représentée par l'équation

$$F(\xi, \eta) = 0, \quad \text{soit} \quad \xi = \varphi(u), \quad \eta = \psi(u).$$

Posons donc
$$\frac{y}{x} = \varphi(u) \quad y' = \psi(u).$$

$$y = x\varphi(u) \implies dy = \varphi(u) dx + x\varphi'(u) du$$

or
$$dy = \psi(u) dx$$

finalment on obtient $[\psi(u) - \varphi'(u)] dx = x\varphi'(u) du$. (1)

a) si u_0 est une racine de $\psi(u) - \varphi'(u) = 0$, $u = u_0$ est une intégrale de l'équation (1),

et
$$y = \varphi(u_0)x$$

est l'équation d'une intégrale rectiligne de (E)

b) si $\psi(u) - \varphi'(u) \neq 0$, on sépare les variables de l'équation (1) :

$$\frac{dx}{x} = \frac{\varphi'(u)}{\psi(u) - \varphi'(u)} du.$$

EXEMPLE. — Intégrer l'équation $x^3(y + 3xy') = (y + xy')^3$. On peut l'écrire

$$\frac{y}{x} + 3y' = \left(\frac{y}{x} + y'\right)^3$$

et on obtient une représentation paramétrique des valeurs associées en posant

$$\frac{y}{x} + y' = u \quad \text{d'où} \quad \frac{y}{x} + 3y' = u^3$$

et
$$y = x \left(\frac{3u - u^3}{2} \right), \quad y' = \frac{u^3 - u}{2}.$$

En égalant les deux expressions de dy , on obtient

$$2u(u^2 - 2) dx = 3x(1 - u^2) du.$$

a) $u = 0$, $u = \pm \sqrt{2}$ donnent des intégrales rectilignes

$$y = 0, \quad y = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

b) Ces cas écartés, les variables se séparent

$$\frac{dx}{x} = \frac{3}{2} \frac{1-u^2}{u(u^2-2)} du \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{3}{4} \frac{du}{u} - \frac{3}{4} \frac{u du}{u^2-2}$$

$$\text{Log}|x| = -\frac{3}{4} \text{Log}|u| - \frac{3}{8} \text{Log}|u^2-2| + C.$$

$$x = \frac{\lambda}{|u|^{\frac{3}{4}} |u^2-2|^{\frac{3}{8}}} \quad y = \frac{3}{2} \frac{u-u^3}{u^2-2} \cdot x.$$

2° Usage des coordonnées polaires. — Les coordonnées polaires peuvent aussi parfois se prêter à l'intégration d'une équation différentielle homogène non résolue en y' .

Soit par exemple à intégrer

$$(E) \quad (xy' - y)^2 = k^2(x^2 + y^2).$$

On peut écrire (E) sous la forme $(xdy - ydx)^2 = k^2(x^2 + y^2)dx^2$. En passant en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$xdy - ydx = r^2 d\theta, \quad (E) \implies r^2 d\theta^2 = k^2 dx^2 \quad \text{ou} \quad r d\theta = \varepsilon k dx.$$

La relation obtenue renferme les trois variables r , θ , x liées par $x = r \cos \theta$; nous remplacerons r par $\frac{x}{\cos \theta}$ pour garder les variables θ et x qui figurent par leurs différentielles; d'où

$$\frac{d\theta}{\cos \theta} = \varepsilon k \frac{dx}{x} \quad \text{et} \quad x = \lambda \left| \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|^{\frac{\varepsilon}{k}}.$$

Les intégrales sont définies en coordonnées polaires par

$$r = \frac{\lambda}{\cos \theta} \left| \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|^{\frac{\varepsilon}{k}},$$

ou encore, en prenant pour nouvel axe polaire l'axe OX tel que $(Ox, OX) = -\frac{\pi}{2}$, et en posant

$$\omega = \frac{\pi}{2} + \theta$$

$$r = \frac{\lambda}{\sin \omega} \left| \text{tg} \frac{\omega}{2} \right|^{\frac{\varepsilon}{k}}.$$

3° REMARQUE. — On ramène de même aux quadratures

$$a) \text{ l'équation homogène en } y \text{ et } y' : f\left(x, \frac{y'}{y}\right) = 0,$$

$$b) \text{ l'équation homogène en } x \text{ et } y' : f\left(y, \frac{y'}{x}\right) = 0$$

lorsqu'on sait représenter paramétriquement la courbe d'équation $f(\xi, \eta) = 0$.

Dans le premier cas, en posant $z = \text{Log}|y|$, $z' = \frac{y'}{y}$, on est ramené à l'équation

$$f(x, z') = 0$$

étudiée plus haut

Dans le deuxième cas, on observe que $\frac{y'}{x} = \frac{dy}{x dy}$, et on fait le changement de variable indépendante

$$x^2 = u, \quad \text{ce qui donne} \quad f\left(y, 2 \frac{dy}{du}\right) = 0,$$

et ramène à une équation vue précédemment.

V. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

240. — Équation différentielle linéaire du premier ordre. —

1^o DÉFINITION. — On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation différentielle de la forme

$$(E) \quad y' + a(x)y = g(x)$$

a et g étant deux fonctions réelles (resp. complexes) de la variable réelle, données, définies et continues sur un même intervalle I .

Le premier membre de (E) est une forme linéaire en y et y' ; l'équation est dite *sans second membre* lorsque g est la fonction nulle sur I , que nous désignerons par (0), soit

$$(e) \quad y' + a(x)y = (0).$$

Nous dirons encore que (e) est *linéaire et homogène* ⁽¹⁾.

Une solution de (E), [resp. (e)], sera ici toute fonction $x \mapsto \psi(x)$, dérivable sur I , vérifiant l'égalité, entre fonctions définies sur I ,

$$\psi' + a\psi = g \quad [\text{resp. } \psi' + a\psi = (0)].$$

REMARQUE I. — L'équation différentielle (e) admet pour solution la fonction (0).

REMARQUE II. — Nous pourrions être amenés à étudier successivement plusieurs intervalles I et, s'il y a lieu, à faire la synthèse des diverses études (cf. exemples du 7^o).

REMARQUE III. — L'équation : $(E_1) \quad A(x)y' + B(x)y = C(x)$

se ramène à la forme (E), en désignant par I un intervalle sur lequel les trois fonctions A , B , C sont continues et la fonction A ne prend pas la valeur 0.

2^o L'application linéaire $\mathcal{F}(y) = y' + ay$. — a) Soit Φ l'ensemble des fonctions réelles (resp. complexes) d'une variable réelle qui sont définies et continues sur l'intervalle I ; soit Φ' le sous-ensemble de Φ dont les éléments sont les fonctions dérivables sur I ; nous savons que Φ et Φ' sont deux espaces vectoriels sur le corps K des réels (resp. des complexes).

Désignons par $\mathcal{F}$ l'application de Φ' dans Φ telle que

$$y \xrightarrow{\mathcal{F}} y' + ay.$$

(1) Pour certains auteurs l'équation (E) est dite affine si $g \neq (0)$, linéaire si $g = (0)$.

Il s'agit d'une application linéaire. En effet (I, 161)

$$\begin{aligned} (\forall y_1, y_2 \in \Phi'), \quad & \mathcal{F}(y_1 + y_2) = \mathcal{F}(y_1) + \mathcal{F}(y_2) \\ (\forall y \in \Phi', \quad \forall \lambda \in K), \quad & \mathcal{F}(\lambda y) = \lambda \mathcal{F}(y). \end{aligned}$$

b) Les solutions de l'équation différentielle (E) constituent l'image réciproque, $\mathcal{F}^{-1}(g)$, de l'élément donné g de Φ par l'application linéaire $\mathcal{F}$. En particulier les solutions de (e) constituent le noyau de $\mathcal{F}$; elles forment donc un sous-espace vectoriel, $\mathcal{E}$, de Φ' .

Les deux problèmes des intégrations de (E) et de (e) sont liés, tout comme sont liés les problèmes des résolutions d'un système d'équations linéaires et du système homogène associé (I, 210). En effet, Y_0 désignant une solution particulière, arbitrairement choisie, de (E), les égalités

$$\mathcal{F}(Y_0) = g \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(y - Y_0) = \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(Y_0)$$

conduisent à l'équivalence logique

$$\mathcal{F}(y) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}(y - Y_0) = (0)$$

et permettent d'énoncer :

THÉORÈME. — Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre

$$(E) \quad y' + a(x)y = g(x).$$

Sur un intervalle I , sur lequel les fonctions a et g sont continues, on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à l'une d'entre elles, arbitrairement choisie, toutes les solutions de l'équation homogène associée.

Ayant muni l'espace vectoriel Φ' de sa structure affine canonique (III, 49), nous pourrions dire que l'ensemble des solutions de (E) est une variété linéaire affine dont la direction est l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (e).

Il résulte de cette étude que l'on saura intégrer (E) si l'on sait intégrer (e) et trouver une solution particulière de (E).

3° Problème I : Intégration de (e). — L'objet de ce 3° est de démontrer que l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ formé, (2°, a et b), par les solutions de (e) admet la dimension 1.

a) *Analyse.* — Supposons qu'il existe une solution y de (e) qui ne prend la valeur 0 en aucun point de I :

$$\mathcal{F}(y) = (0) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -a. \quad (1)$$

S'il s'agit de fonctions à valeurs réelles, (1) s'écrit

$$(\text{Log } |y|)' = -a$$

d'où

$$\text{Log } |y| = -A + C$$

A désignant une primitive arbitraire de a sur I et C une constante. On en

déduit $|y| = e^c e^{-\Lambda}$ et enfin $y = \lambda e^{-\Lambda}$, λ désignant une constante de signe quelconque.

Synthèse. — Toute fonction

$$x \mapsto \lambda e^{-\Lambda(x)} \quad (\lambda \neq 0) \quad (2)$$

α) ne prend la valeur 0 en aucun point de I;

β) est solution de (e).

En résumé, (2) fournit les solutions de (e) ne prenant pas la valeur 0 en un point de I.

Le même résultat a lieu dans le cas de fonctions à valeurs complexes.

b) Cherchons s'il existe des solutions de (e) prenant la valeur 0 en un point de I, au moins.

Soit y une solution quelconque de (e), et y_1 une des solutions obtenues en a). Nous avons les égalités sur I (entre fonctions)

$$y' + ay = (0) \quad y_1' + ay_1 = (0)$$

on en déduit l'égalité sur I

$$y_1 y' - y y_1' = (0),$$

et comme, sur I, y_1 ne prend pas la valeur 0,

$$\frac{y_1 y' - y y_1'}{y_1^2} = (0) \quad \text{et enfin} \quad \left(\frac{y}{y_1}\right)' = (0)$$

Il existe donc une constante μ assurant l'égalité (entre fonctions de Φ'),

$$(3) \quad y = \mu y_1.$$

En comparant avec l'égalité (2) qui donne les solutions de (e) ne prenant pas la valeur (0) en un point de I, on constate que l'égalité (3) ne fournit pas d'autre solution de (e), sinon la fonction (0), obtenue pour $\mu = 0$.

En résumé, il n'existe pas, en dehors de la solution triviale (0), de solution de (e) qui prenne la valeur 0 en un point de I. La méthode d'intégration suivie en a) donne toutes les solutions de (e).

c) On peut donc énoncer :

THÉORÈME. — Soit l'équation différentielle linéaire et homogène, du premier ordre,

$$(e) \quad y' + a(x)y = 0.$$

Sur un intervalle I sur lequel la fonction a est continue, les solutions de (e) forment un sous-espace vectoriel de dimension 1 de l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur I. Si y_1 est l'une d'entre elles, ($y_1 \neq (0)$) toute autre solution peut s'écrire μy_1 , μ étant une constante.

Les solutions de (e) sont les fonctions

$$x \mapsto \psi_\lambda(x) = \lambda e^{-A(x)}$$

où A désigne une primitive, arbitrairement choisie, de a sur I, et λ une constante réelle quelconque.

Étant donné $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, une, et une seule solution prend la valeur y_0 pour $x = x_0$. C'est (1)

$$x \longrightarrow y_0 \times \exp \left(\int_{x_0}^x -a(t) dt \right).$$

Le théorème d'existence du n° 231 se trouve ici démontré de façon directe.

4° Problème II : recherche d'une solution particulière de (E). —

a) *Superposition des solutions.* — Nous supposons ici que le second membre g de l'équation (E) est la somme de n fonctions continues sur I , g_i , ($i = 1, \dots, n$); nous supposons d'autre part que nous connaissons une solution particulière, ψ_i , de chacune des n équations différentielles auxiliaires

$$(E_i) \quad y' + a(x)y = g_i(x).$$

De $\mathcal{F}(\psi_i) = g_i$, ($i = 1, \dots, n$), nous déduisons, du fait de la linéarité de $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} \left(\sum_{i=1}^n \psi_i \right) = \sum_{i=1}^n g_i.$$

Autrement dit la fonction $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i$ est une solution particulière de (E).

b) *Cas particulier* : a est une constante et $g(x) = \sum e^{m_i x} f_i(x)$, m_i étant une constante et f_i un polynôme. La question est traitée au n° 251.

c) *Cas général.* Il n'existe pas de méthode permettant d'obtenir sans quadrature une solution particulière de (E) et il faut recourir à la méthode de la « variation de la constante » que nous allons exposer maintenant.

5° Intégration de (E) par variation de la constante. — Nous supposons que (e) a été intégrée (cf. 3°); nous disposons donc de solutions de (e) qui ne prennent la valeur 0 en aucun point de (I). Soit y_1 l'une d'elles, arbitrairement choisie.

A toute fonction $y \in \Phi'$ on peut associer une, et une seule, fonction $u \in \Phi'$ telle que

$$y = uy_1.$$

La fonction y est solution de (E) si, et seulement si la fonction associée u vérifie l'égalité (entre fonctions de Φ)

$$(u'y_1 + uy_1') + auy_1 = g$$

(1) Au tableau ou sur le cahier, on pourra utiliser la notation où e est élevé à la puissance

$$\int_{x_0}^x -a(t) dt.$$

qui, compte tenu de $\mathcal{F}(y_1) = (0)$, s'écrit : $u'y_1 = g$, ou encore d'après l'hypothèse faite sur y_1 ,

$$u' = \frac{g}{y_1} \quad \Longleftrightarrow \quad u(x) = G(x) + C,$$

en désignant par C une constante quelconque et par G une primitive, arbitrairement choisie, de $\frac{g}{y_1}$.

La solution générale de (E) est ainsi la famille de fonctions, dépendant du paramètre C :

$$(4) \quad y = Gy_1 + Cy_1,$$

ce qui permet de retrouver la structure de variété linéaire affine annoncée au 2°, b).

Le nom de *variation de la constante*, attribué à la méthode, provient de ce que l'on passe de λy_1 , qui est la solution générale de (e), à $u y_1$, dont on veut faire la solution générale de (E), en remplaçant la constante λ par la fonction inconnue u .

REMARQUE I. — La solution générale de (E) s'écrivant

$$y = Y + Cy_1$$

où Y est une solution particulière de (E), on vérifie qu'il existe une seule solution satisfaisant aux conditions de Cauchy (conditions initiales données (x_0, y_0))

$$\text{En effet} \quad y(x_0) = y_0 \quad \Longleftrightarrow \quad Y(x_0) + Cy_1(x_0) = y_0$$

détermine C puisque, quel que soit $x_0 \in I$, $y_1(x_0) \neq 0$.

REMARQUE II. — En tenant compte de l'expression obtenue au 3° pour la solution générale de (e), la solution générale de (E) peut se mettre sous la forme

$$x \longmapsto \exp \left(\int^x a(t) dt \right) \times \left[C + \int_{x_0}^x g(u) \exp \left(\int_{x_0}^u a(t) dt \right) du \right].$$

On constate sur la forme précédente que l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre nécessite deux quadratures. Naturellement si on connaît une solution particulière de (E) on n'a à effectuer que la seule quadrature qui intervient dans l'intégration de (e).

Si on connaît deux solutions particulières, Y_1 et Y_2 , de (E), il résulte de (4) que $Y_2 - Y_1$ est une solution particulière de (e); il en résulte que l'on est dispensé de toute quadrature, les solutions générales de (e) et (E) s'écrivant respectivement

$$\lambda(Y_2 - Y_1) \quad \text{et} \quad \lambda(Y_2 - Y_1) + Y_1$$

6° Propriétés des courbes intégrales. — Si Γ_1 et Γ_2 sont les courbes représentatives des fonctions Y_1 et Y_2 intégrales particulières de l'équation avec second membre, si Γ est une courbe intégrale quelconque de cette équation,

tion, une parallèle Δ à l'axe Oy rencontre ces courbes en des points M_1, M_2, M d'ordonnés Y_1, Y_2, y et l'on vient de voir (5° Rq II) qu'il existe une constante λ telle que

$$\frac{y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \lambda,$$

ou

$$\frac{\overline{M_1 M}}{\overline{M_1 M_2}} = \lambda.$$

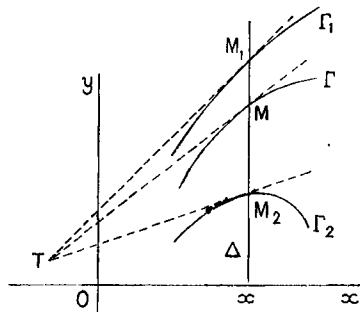


FIG. 85.

M partage le segment $M_1 M_2$ dans un rapport constant (fig. 85). On remarquera que les tangentes en M_1, M_2, M aux courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ concourent en un point T ; cette propriété peut se déduire, soit de la relation précédente, soit de l'équation différentielle en remarquant que la droite D qui porte

l'élément de contact que l'équation différentielle associe au point (x, y) du plan a pour équation $Y - y = m(X - x)$, où m est défini par $m + a(x)y = g(x)$; pour x fixé, l'équation de cette droite dépend de y au premier degré, par suite D passe par un point fixe T .

CAS PARTICULIER. — Soit $\psi(x)$ une solution de l'équation sans second membre (e); on peut écrire $-\frac{\psi(x)}{\psi'(x)} = \frac{1}{a}$ en un point pour lequel ni ψ' , ni a ne sont nuls. La sous-tangente cartésienne des courbes intégrales est donc la même, en tous les points d'une droite Δ d'abscisse x (fig. 86).

Ce résultat est lié au fait que, dans ce cas, les courbes intégrales sont deux à deux homologues dans des affinités d'axe Ox .

7° EXEMPLE I. — Intégrer l'équation (e) $xy' = ny$ (n entier positif).

Ce serait une faute que d'écrire trop rapidement

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x} \implies y = \lambda x^n.$$

En effet le coefficient de y' prenant la valeur 0 pour $x = 0$, les solutions de (e) seront, au début, recherchées séparément sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} \text{sur }]-\infty, 0[& y = \mu_1 x^n, \\ \text{sur }]0, +\infty[& y = \mu_2 x^n, \end{cases}$$

μ_1 et μ_2 étant deux constantes qui n'ont aucun lien l'une avec l'autre.

On peut se demander si la fonction ψ déterminée sur $]-\infty, +\infty[$ par

$$\psi(x) = \mu_1 x^n \text{ si } x \leq 0, \text{ et } \psi(x) = \mu_2 x^n \text{ si } x \geq 0$$

est une solution de (e) sur $]-\infty, +\infty[$. Il est pour cela nécessaire que cette fonction soit dérivable au point 0; si $n = 1$, cela exige $\mu_1 = \mu_2$; si $n \geq 2$, cela est vérifié pour tout couple (μ_1, μ_2) . Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante.

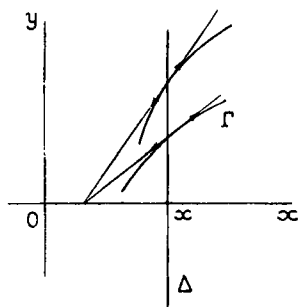


FIG. 86.

EXEMPLE II. — Intégrer l'équation (E) : $(1 - x^2)y' - xy = 1$. Le coefficient de y' prenant la valeur 0 pour $x = 1$ et $x = -1$, les solutions de (E) ne seront recherchées initialement que sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $-1, +1[$, $+1, +\infty[$.

Commençons par intégrer l'équation sans second membre

$$(e) \quad (1 - x^2)y' - xy = 0.$$

Sur chacun des intervalles précédents, on peut séparer les variables sous la forme

$$\frac{dy}{y} - \frac{xdx}{1 - x^2} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \text{Log } |y| + \frac{1}{2} \text{Log } |1 - x^2| = \mu$$

et finalement,

$$\text{si } |x| < 1, \quad y = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{si } |x| > 1, \quad y = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

1° $|x| < 1$; on fait le changement de fonction inconnue $y = \frac{z}{\sqrt{1 - x^2}}$; en portant dans l'équation proposée, il ne reste plus au premier membre que le terme en z' :

$$\text{d'où} \quad \begin{aligned} z' \sqrt{1 - x^2} &= 1, \\ z &= \text{Arc sin } x + \mu, \end{aligned}$$

μ étant quelconque. L'intégrale générale de l'équation E est donc

$$(1) \quad y = \frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2° $|x| > 1$; on fait le changement de fonction inconnue $y = \frac{z}{\sqrt{x^2 - 1}}$; en portant dans l'équation proposée, il vient

$$\text{d'où} \quad \begin{aligned} -z' \sqrt{x^2 - 1} &= 1 \\ z &= -\text{Log} |x + \sqrt{x^2 - 1}| + \mu, \end{aligned}$$

μ étant quelconque, et l'intégrale générale de l'équation E s'écrit

$$(2) \quad y = -\frac{\text{Log} |x + \sqrt{x^2 - 1}|}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{\mu}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Représentation paramétrique des intégrales. — Dans le premier cas, $|x| < 1$, nous pouvons poser $x = \cos \varphi$ ou $x = \sin \varphi$; comme dans le second cas, $|x| > 1$, nous devrons poser $x = \varepsilon \text{ch } \theta$ ($\varepsilon = \pm 1$), nous choisissons de préférence, pour la formule (1)

$$x = \cos \varphi, \quad \varphi \in]0, \pi[, \quad \sqrt{1 - x^2} = \sin \varphi, \quad \text{Arc sin } x = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

finalment (3) $x = \cos \varphi$, $y = \frac{-\varphi + C}{\sin \varphi}$, C étant une constante quelconque.

Pour la formule (2),

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \text{ch } \theta, \quad \theta > 0, \quad \sqrt{x^2 - 1} = \text{sh } \theta, \quad x + \sqrt{x^2 - 1} = \varepsilon [\text{ch } \theta + \text{sh } \theta] = \varepsilon e^\theta \\ \text{Log} |x + \sqrt{x^2 - 1}| &= \varepsilon \theta \end{aligned}$$

finalment (4) $x = \varepsilon \text{ch } \theta$, $y = \frac{-\varepsilon \theta + C_1}{\text{sh } \theta}$, C_1 étant une constante quelconque.

Symétrie de l'ensemble des intégrales. — Le changement simultané de x et y en $-x$ et $-y$ laisse invariante l'équation (E); il en résulte que la symétrie par rapport à O d'une courbe intégrale est encore une courbe intégrale.

Courbe intégrale passant par le point A(1, -1). — Il n'existe pas de courbe intégrale passant par un point arbitraire de la droite $D(x = 1)$; mais au point $A(1, -1)$ l'équation (E) en y' est totalement indéterminée.

Cela s'explique de la façon suivante :

Si $\varphi \rightarrow 0$, les formules (3) donnent $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow \infty$ si $C \neq 0$

mais si $C = 0$, $y = \frac{-\varphi}{\sin \varphi} \rightarrow -1$;

la courbe correspondante γ admet une tangente en A car $\frac{y+1}{x-1} \rightarrow \frac{1}{3}$, lorsque $\varphi \rightarrow 0$.

De même si $\theta \rightarrow 0$, $x = \text{ch } \theta \rightarrow 1$, et $y \rightarrow \infty$ si $C_1 \neq 0$

mais si $C_1 = 0$, $y = \frac{-\theta}{\text{sh } \theta} \rightarrow -1$;

la courbe correspondante γ' , admet une tangente en A car $\frac{y+1}{x-1} \rightarrow \frac{1}{3}$ lorsque $\theta \rightarrow 0$.

Comme la tangente en A a même coefficient angulaire pour γ et γ' on peut dire que l'ensemble de ces deux courbes est une courbe intégrale unique, définie dans $] -1, +\infty[$; autrement dit, il existe une fonction $f(x)$, intégrale de (E), définie continue et dérivable sur $] -1, +\infty[$;

$$\text{si } -1 < x < 1, \quad f(\cos \varphi) = \frac{-\varphi}{\sin \varphi}$$

$$\text{si } x > 1, \quad f(\text{ch } \theta) = \frac{-\theta}{\text{sh } \theta}.$$

241. Équation de Bernoulli. — 1° DÉFINITION. — On appelle équation de Bernoulli toute équation qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^n = 0$$

où n est un exposant arbitraire.

2° **Intégration.** — Écartant la fonction nulle, qui est solution pour $n > 0$, divisons tous les termes par y^n .

$$\frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{n-1}} P(x) + Q(x) = 0,$$

et faisons le changement de fonction inconnue

$$u = \frac{1}{y^{n-1}}.$$

L'équation devient

$$\frac{1}{n-1} \frac{du}{dx} + uP(x) + Q(x) = 0.$$

L'intégration est ramenée à celle d'une équation linéaire par rapport à u .

3° **EXEMPLE.** — Intégrer l'équation (E) $y' - y = xy^3$.

Divisons par y^3 les deux membres : $\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y} = x$ en écartant la solution banale $y = 0$,

et posons $u = \frac{1}{y}$; il vient $-u' - u = x$.

L'équation sans second membre associée $U' + U = 0$ a pour intégrale générale $U = \lambda e^{-x}$; on obtient une intégrale particulière de l'équation complète soit par le changement de fonction inconnue $u = ze^{-x}$, soit par identification, en cherchant une intégrale particulière de la forme $\alpha x + \beta$, α et β étant deux constantes, comme nous le verrons plus loin (251).

On obtient ainsi

$$u = 1 - x + \lambda e^{-x}$$

et

$$y = \frac{1}{1 - x + \lambda e^{-x}}.$$

242. Équation de Riccati. — 1° DÉFINITION. — On appelle équation de Riccati toute équation de la forme

$$(E) \quad y' = Ay^2 + By + C$$

où A, B, C sont des fonctions données de la variable x .

2° Cas où l'on connaît une intégrale particulière. — Montrons que, si l'on connaît une intégrale particulière de l'équation (E), on ramène son intégration à celle d'une équation linéaire.

Soit $y_1(x)$ une fonction telle que

$$y_1' = Ay_1^2 + By_1 + C.$$

Faisons le changement de fonction inconnue

$$\begin{aligned} y &= y_1 + z \\ y_1' + z' &= A(y_1 + z)^2 + B(y_1 + z) + C \end{aligned}$$

il reste finalement

$$z' = (2Ay_1 + B)z + Az^2$$

c'est-à-dire une équation de Bernoulli, qui se ramène à une équation linéaire lorsqu'on pose $u = \frac{1}{z}$.

L'intégrale générale de l'équation linéaire étant de la forme $\lambda f(x) + g(x)$ où λ est une constante, l'intégrale générale de l'équation de Bernoulli en z est

$$z = \frac{1}{\lambda f(x) + g(x)},$$

et l'intégrale générale de l'équation de Riccati est

$$y = y_1(x) + \frac{1}{\lambda f(x) + g(x)};$$

y est une fonction homographique de la constante d'intégration (cf. n° 246, 2°).

La solution particulière y_1 de (E), qui correspond à la solution nulle de l'équation de Bernoulli, est fournie par la valeur ∞ de la constante λ .

3° EXEMPLE. — Intégrer l'équation différentielle

$$(1 - x^3)y' + x^2y + y^3 - 2x = 0$$

sachant que x^2 est une intégrale particulière.

Posons
on obtient
et avec
en écrivant
on a immédiatement
et finalement

$$\begin{aligned} y &= x^2 + z \\ (1 - x^2)z' + 3x^2z + z^2 &= 0 \\ u = \frac{1}{z} \quad (1 - x^2)u' - 3x^2u - 1 &= 0, \\ [(1 - x^2)u]' &= 1 \\ (1 - x^2)u &= x + \lambda. \\ y &= \frac{\lambda x^2 + 1}{x + \lambda}. \end{aligned}$$

VI. ÉQUATIONS A ISOCLINES RECTILIGNES

243. Équations à isoclines rectilignes (Équations de Lagrange).

— 1° Si l'isocline relative à la direction de coefficient directeur m est une droite, c'est que l'équation différentielle considérée du premier ordre est du premier degré en x et y , autrement dit est de la forme

$$(E) \quad y = x f(y') + g(y'),$$

où f et g sont deux fonctions quelconques. Une telle équation est dite encore *équation de Lagrange*. L'isocline relative à la direction de coefficient directeur m est la droite

$$(J_m) \quad y = x f(m) + g(m) \quad (1)$$

de coefficient directeur $f(m)$.

On intègre (E) en représentant paramétriquement une intégrale en fonction de m .

Sur l'isocline J_m marquons un point M dont l'abscisse est une fonction $x(m)$ quelconque; M décrit une courbe Γ

$$x = x(m) \quad y = f(m) \cdot x(m) + g(m).$$

Pour que Γ soit une courbe intégrale, il faut et il suffit que la tangente en M à Γ ait pour coefficient directeur m , c'est-à-dire que

$$dy = f(m) dx + [x f'(m) + g'(m)] dm$$

ne soit autre que $m dx$, d'où l'équation linéaire où $x(m)$ est la fonction inconnue

$$[m - f(m)] \frac{dx}{dm} = x f'(m) + g'(m). \quad (2)$$

REMARQUE. — Une équation homogène résoluble par rapport à $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{y}{x} = f(y')$$

est une équation de Lagrange particulière.

Soit par exemple $\frac{y}{x} = y' + \frac{1}{y'}$;
posons $y' = m$; d'une part $dy = m dx$
d'autre part $y = \left(m + \frac{1}{m}\right)x.$

En égalant les deux expressions possibles de dy on obtient finalement

$$\frac{dx}{x} = \left(-m + \frac{1}{m}\right) dm.$$

Les intégrales sont représentées, en fonction de m , par les formules

$$x = \lambda m e^{-\frac{m^2}{2}} \quad y = \lambda(m^2 + 1)e^{-\frac{m^2}{2}}.$$

2° ENVELOPPE DES ISOCLINES. — Le point caractéristique μ de la droite variable $\mathfrak{J}_m$ vérifie

$$y = xf(m) + g(m) \quad \text{et} \quad 0 = xf'(m) + g'(m);$$

il a donc pour coordonnées

$$x = -\frac{g'(m)}{f'(m)}$$

$$y = -\frac{f(m)g'(m)}{f'(m)} + g(m)$$

et il décrit une courbe Γ (fig. 87).

Si une courbe intégrale passe en ce point μ , le coefficient directeur de sa tangente est m , mais si $f(m) \neq m$, $\frac{dx}{dm}$, fourni par (2), est nul, et donc aussi $\frac{dy}{dm} = m \cdot \frac{dx}{dm}$.

Le point μ est stationnaire pour cette courbe intégrale.

L'enveloppe des isoclines rectilignes d'une équation de Lagrange est en général [$f(m) \neq m$] un lieu de rebroussement des courbes intégrales.

Le cas particulier où $f(m) = m$ va conduire à l'équation de Clairaut

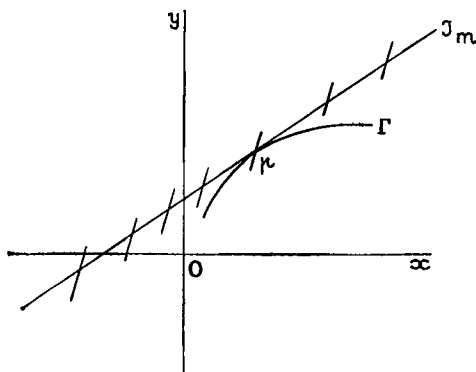


FIG. 87.

3° Équation de Clairaut. — L'équation différentielle de Clairaut est une équation de Lagrange particulière pour laquelle l'isocline associée à la direction m a précisément m pour coefficient directeur; dans l'étude précédente, $f(m) = m$. Nous écrivons donc

$$(\mathfrak{J}_m) \quad y = mx + g(m),$$

$$(E) \quad y = xy' + g(y')$$

On constate immédiatement que la fonction affine représentée par l'isocline $(\mathfrak{J}_m)$ est une solution de (E), quel que soit m , ce que montre immédiatement l'interprétation géométrique (fig. 88).

Cherchons si, m étant une variable, il existe une solution de (E) pour laquelle

$$y = mx + g(m) \quad y' = m,$$

$$\frac{dy}{dm} = m \frac{dx}{dm} \quad \text{et d'autre part}$$

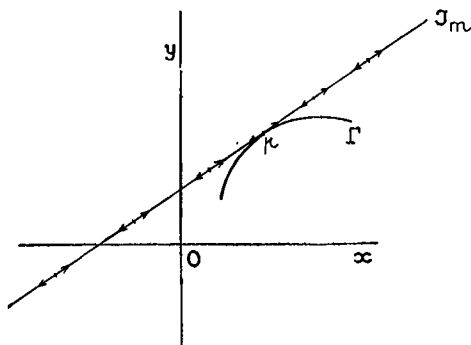


FIG. 88.

$$\frac{dy}{dm} = x + m \frac{dx}{dm} + g'(m)$$

on obtient

$$x = -g'(m)$$

et par suite

$$y = -mg'(m) + g(m).$$

Les équations précédentes représentent paramétriquement l'enveloppe Γ des droites déjà trouvées comme courbes intégrales de l'équation (E); Γ représente donc une solution singulière de (E).

REMARQUE. — On arrive à une équation de Clairaut chaque fois qu'on se propose de trouver une courbe plane définie par une propriété de la tangente ne faisant pas intervenir le point de contact. En effet la tangente au point (x, y) a pour équation $Y = y'X + (y - xy')$ et la condition imposée se traduit par une relation entre y' et $y - xy'$, soit

$$y - xy' = g(y').$$

Les droites, intégrales de cette équation, constituent des solutions peu intéressantes au point de vue géométrique; c'est l'intégrale singulière qui donnera au contraire la solution intéressante.

Dans la pratique, il vaut mieux chercher l'équation tangentielle de la courbe et revenir s'il en est besoin, de l'équation tangentielle à l'équation ponctuelle.

244. Observation générale sur l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. — Le lecteur retiendra les quatre familles d'équations différentielles qu'il a appris à intégrer en les ramenant aux quadratures :

1° les équations $U'_x dx + U'_y dy = 0$ et les équations à variables séparables;

2° les équations homogènes;

3° les équations linéaires et les équations qui s'y ramènent (Bernoulli; Riccati);

4° les équations à isoclines rectilignes.

Si l'on est en présence d'une équation différentielle qui n'est pas de l'une des familles précédentes, on examine si elle se ramène à l'un de ces types par un changement de variables, par un changement d'axes de coordonnées, par le passage aux coordonnées polaires, etc.... Cet examen sera souvent facilité quand on aura fait usage de la notation différentielle.

EXEMPLE. — Intégrer l'équation :

$$(E) \quad (1 + y'^2)xy = (x^2 + y^2 - a^2)y'.$$

(E) s'écrit encore $(dx^2 + dy^2)xy = (x^2 + y^2 - a^2)dx dy$. Sous cette forme l'équation est invariante par la transposition de x et de y . On va donc prendre pour nouveaux axes les bissectrices OX et OY des anciens axes Ox, Oy supposés rectangulaires.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) & dx^2 + dy^2 = dX^2 + dY^2 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) & dx dy = \frac{1}{2}(dX^2 - dY^2) \end{cases}$$

et la nouvelle équation (E') est ainsi

$$(dX^2 + dY^2)(X^2 - Y^2) = (X^2 + Y^2 - a^2)(dX^2 - dY^2)$$

et finalement

$$\frac{dX^2}{a^2 - 2X^2} = \frac{dY^2}{a^2 - 2Y^2};$$

les variables sont séparées, et l'on achèvera comme pour l'exemple du n° 235.

VII. ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES GÉNÉRAUX LIÉS A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

245. Quand on étudie les solutions d'une équation différentielle du premier ordre, on a souvent intérêt à utiliser l'équation elle-même pour obtenir certains renseignements relatifs à ces solutions ou aux lignes intégrales.

1° Signe de la dérivée. — Reprenons par exemple l'équation

$$(1 - x^2)y' = 1 + xy$$

étudiée au n° 240, 7°. Le signe de y' est celui de $\frac{1 + xy}{1 - x^2}$, on sait donc régionner le plan et indiquer dans chacune des régions le signe de y' .

2° Recherche des dérivées successives d'une intégrale en un point.

— Soit

$$(E) \quad y' = \varphi(x, y) \quad (1)$$

une équation différentielle, la fonction $\varphi(x, y)$ ayant des dérivées partielles successives sur un champ $\mathcal{C}$. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$ et soit $y = \psi(x)$ l'équation d'une courbe intégrale passant par M_0 ; nous supposons donc

$$y_0 = \psi(x_0), \quad y'_0 = \psi'(x_0) = \varphi(x_0, y_0).$$

$$\text{Puisque} \quad (2) \quad \psi'(x) = \varphi[x, \psi(x)] \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C},$$

$$\text{on a aussi} \quad (3) \quad \psi''(x) = \varphi'_x(x, \psi) + \varphi'_y(x, \psi) \psi'(x)$$

$$\text{et} \quad y''_0 = \psi''(x_0) = \varphi'_x(x_0, y_0) + \varphi'_y(x_0, y_0) \varphi(x_0, y_0).$$

$\psi''(x_0)$ est déterminée par la donnée du point M_0 .

En particulier, en tout point de la courbe

$$(K) \quad \varphi'_x(x, y) + \varphi'_y(x, y) \varphi(x, y) = 0, \quad \psi''(x) = 0,$$

c'est-à-dire que les points d'inflexion des courbes intégrales de l'équation (E) appartiennent à la ligne (K).

En dérivant par rapport à x les deux membres de l'égalité (3), on montrerait que $\psi'''(x_0)$ est déterminée; d'une façon générale les valeurs $y'_0, y''_0, y'''_0, \dots, y^{(n)}_0 \dots$ des dérivées successives, pour x_0 , de l'intégrale $y = \psi(x)$ passant en M_0 sont toutes déterminées en fonction de x_0, y_0 .

3° Lieu des points d'inflexion des courbes intégrales de l'équation (E) : $F(x, y, y') = 0$. — Si $y = \psi(x)$ est une intégrale Γ de (E), on a,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{C} \quad F[x, \psi(x), \psi'(x)] = 0$$

et par suite $F'_x[x, \psi, \psi'] + \psi'(x) F'_y[x, \psi, \psi'] + \psi''(x) F'_{yy}(x, \psi, \psi') = 0$.

C'est dire que toute intégrale de (E) est aussi une intégrale de l'équation

$$(E') \quad F'_x(x, y, y') + y' F'_{yy}(x, y, y') + y'' F'_{yy'}(x, y, y') = 0.$$

En un point d'inflexion d'une courbe intégrale Γ , $\psi''(x) = 0$, et par suite l'élément de contact associé vérifie le système

$$(I) \begin{cases} (E) & F(x, y, y') = 0 \\ (E_1) & F'_x(x, y, y') + y' F'_{yy}(x, y, y') = 0. \end{cases}$$

Inversement, si (I) est réalisé, (E) $\implies$ (E') et

$$(E') \cup (E_1) \implies y'' F'_{yy'}(x, y, y') = 0.$$

C'est donc qu'en général $[F'_{yy'} \neq 0]$, y'' sera nul en tout point vérifiant (I) : l'élimination de y' entre les équations (I) donne en général le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales.

4° ENVELOPPE DES COURBES ISOCLINES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE QUELCONQUE.
— Généralisons le résultat obtenu précédemment dans le cas de l'équation de Lagrange. Soit une équation différentielle

$$(E) \quad F(x, y, y') = 0.$$

Au point $M(x, y)$ d'un champ $\mathcal{C}$ l'équation (E) associe tous les éléments de contact dont le coefficient directeur est solution de l'équation (en m).

$$F(x, y, m) = 0.$$

Inversement l'équation

$$(\mathfrak{J}_m) \quad F(x, y, m) = 0$$

où m est fixé, où x et y sont les inconnues, est celle d'une courbe isocline; en tout point de cette courbe, l'un des éléments de contact qui lui sont associés par (E) admet m pour coefficient directeur.

Supposons que les courbes $\mathfrak{J}_m$ aient une enveloppe Γ ; un point caractéristique μ de $\mathfrak{J}_m$ vérifie

$$F(x, y, m) = 0 \quad F'_m(x, y, m) = 0.$$

En un tel point, deux des éléments de contact que l'équation (E) associe à tout point du champ $\mathcal{C}$ sont confondus.

En général, m n'est pas le coefficient directeur de la tangente commune en μ à Γ et $\mathfrak{J}_m$: μ est soit un rebroussement d'une courbe intégrale, soit un point de contact de deux courbes intégrales.

Si, en tout point M d'un arc γ de l'enveloppe Γ , la valeur m associée est le coefficient angulaire de la tangente en μ à γ , γ est une courbe intégrale singulière de l'équation E.

On retiendra donc que l'enveloppe des isoclines n'est pas en général une intégrale singulière de l'équation E.

246. Équation différentielle d'une famille de courbes planes. —

1° Recherche de l'équation différentielle. — Considérons une famille de courbes C_λ déterminées par l'équation

$$(1) \quad f(x, y, \lambda) = 0.$$

Par chaque point $M(x, y)$ d'un certain champ $\mathcal{C}$ il passe au moins une courbe (C_λ) , et la tangente en M à C_λ associe à M un élément de contact;

la donnée des C_λ définit donc dans $\mathcal{C}$ un champ d'éléments de contact.

Or le coefficient directeur y' de la tangente considérée est donné par

$$(2) \quad f'_x(x, y, \lambda) + f'_y(x, y, \lambda) y' = 0.$$

Pour que l'ensemble (x, y, y') soit un élément de contact du champ $\mathcal{C}$, il faut et il suffit qu'il existe une valeur de λ telle que les équations (1) et (2) soient simultanément vérifiées en λ , pour cet ensemble (x, y, y') .

En éliminant λ entre les équations (1) et (2) on obtient une relation

$$(3) \quad F(x, y, y') = 0,$$

qui définit les éléments de contact du champ $\mathcal{C}$. Cette relation est une équation différentielle du premier ordre; on dit que c'est l'équation différentielle de la famille des courbes C_λ ; les courbes C_λ sont des courbes intégrales de l'équation (3); il peut se faire que l'équation (3) ait des courbes intégrales n'appartenant pas à la famille C_λ (voir le 3° de ce paragraphe)

2° EXEMPLES. — I. Si l'équation générale des courbes C_λ est résolue en λ , soit

$$H(x, y) = \lambda$$

l'équation différentielle de ces courbes est

$$H'_x(x, y) + H'_y(x, y) y' = 0.$$

II. Soit $y = \lambda \varphi(x) + \psi(x)$ l'équation générale des courbes C_λ associées à une famille de fonctions dépendant linéairement d'un paramètre.

$$y' = \lambda \varphi'(x) + \psi'(x);$$

la compatibilité en λ s'exprime par la nullité d'un déterminant.

$$\begin{vmatrix} y - \psi(x) & \varphi(x) \\ y' - \psi'(x) & \varphi'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation obtenue est linéaire.

III. Cherchons l'équation générale des courbes C_λ homothétiques de la courbe $C[y = f(x)]$ dans les homothéties $\mathcal{H}(O, \lambda)$.

$$\begin{array}{ccc} M(x, y) \in C_\lambda & \Longleftrightarrow & M_1(x_1, y_1) \in C \\ & & y_1 = f(x_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{H} \\ M_1 \xrightarrow{\quad} M \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda x_1 \\ y = \lambda y_1 \end{array} \right. \end{array}$$

La courbe C_λ est donc définie par $y = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

$$y' = f'\left(\frac{x}{\lambda}\right) \Longleftrightarrow \frac{x}{\lambda} = \psi(y').$$

d'où

$$y = \frac{x}{\psi(y')} f[\psi(y')].$$

L'équation différentielle des courbes C_λ est

$$\frac{y}{x} = \frac{f[\psi(y')]}{\psi(y')}.$$

c'est une équation homogène en x et y .

IV. Soit enfin l'équation $y = \frac{\lambda \varphi + \psi}{\lambda u + v}$, où le second membre est une fonction homographique de λ ; φ, ψ, u, v sont des fonctions connues de x .

On peut mettre l'équation précédente sous la forme

$$\lambda = H(x) + \frac{K(x)}{y + L(x)},$$

et en dérivant par rapport à x on obtient immédiatement l'équation différentielle à laquelle satisfont toutes les fonctions y :

$$H'(y + L)^2 + (y + L) K' - K(y' + L') = 0$$

c'est une équation de Riccati.

Les exemples précédents constituent les réciproques des résultats obtenus respectivement aux numéros 234, 240, 237, 242.

3^e EXERCICE. — Appelons C_λ les courbes représentées par

$$(1) \quad y = \lambda x - (1 + \lambda^2)x^2,$$

et cherchons leur équation différentielle.

$$(2) \quad y' = \lambda - 2(1 + \lambda^2)x.$$

On élimine λ entre (1) et (2) en résolvant d'abord ces équations par rapport à λ et $1 + \lambda^2$:

$$\lambda x = 2y - xy'$$

$$(1 + \lambda^2)x^2 = y - xy'$$

$$d'où \quad (E) \quad y - xy' = x^2 + (2y - xy')^2.$$

Les courbes C_λ sont des intégrales de (E); mais nous ne pouvons affirmer que les C_λ soient les seules intégrales de (E).

Cherchons donc toutes les solutions de (E). Écrivons (E) sous la forme

$$(2y - xy')^2 + y + x^2 = 2y - xy'.$$

On peut obtenir une représentation paramétrique de (E) en posant

$$\left. \begin{aligned} (3) \quad 2y - xy' &= u \\ d'où \quad (4) \quad y + x^2 &= u - u^2. \end{aligned} \right\}$$

$$(4) \Rightarrow (5) \quad y' + 2x = (1 - 2u) \frac{du}{dx}.$$

En portant dans (3) les valeurs de y et de y' données par (4) et (5) on trouve

$$(6) \quad u(1 - 2u) - x(1 - 2u) \frac{du}{dx} = 0;$$

$$1^\circ \text{ ou bien } u = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{4} - x^2 \text{ est une intégrale de (E)}$$

2^o ou bien

$$u \neq \frac{1}{2}, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow u = \lambda x$$

et les intégrales correspondantes de (E) sont

$$y = \lambda x - (1 + \lambda^2)x^2$$

c'est-à-dire les C_λ .

On retrouve le résultat du n^o 231, 3^o : les paraboles C_λ dépendant du paramètre λ au second degré ont une enveloppe Π :

$$1 - 4(y + x^2) = 0$$

qui est une intégrale singulière de (E) (fig. 89).

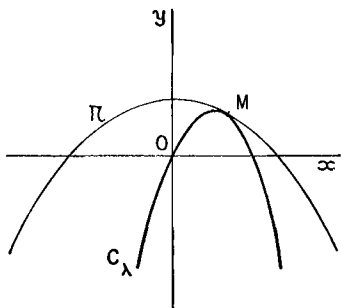


FIG. 89.

4° **Usage des coordonnées polaires.** — Nous n'avons considéré que des courbes définies en coordonnées cartésiennes; les mêmes procédés permettraient d'obtenir l'équation différentielle d'une famille de courbes définies en coordonnées polaires $F(\theta, \rho, \lambda) = 0$.

EXERCICES

1. — Intégrer les équations différentielles

$$\begin{aligned} \text{Arc tg} \frac{y}{x} dx + \text{Log} \sqrt{x^2 + y^2} dy &= 0; & \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - x^2}} &= \frac{dy}{\sqrt{a + 2by - y^2}} \\ y' &= e^{x+y}; & y'^2 &= \frac{1+y^2}{1+x^2}; & x+y &= \left(\frac{y'-1}{y'+1} \right)^2 \\ (y^3 + y - 2)dx + xydy - 5ydy &= 0; & xy' + y &= \frac{a^2}{x^2y^2}; & y'\sqrt{x^2 + y^2} &= y \\ 4y^2y' + (x-y)^2 &= 0; & y - xy' + x \cos \frac{y}{x} &= 0; & xyy' - y^2 &= (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} \\ x y'(-x^3 + 2y^3 + xy^3) + y(2x^3 + x^2y - y^3) &= 0; \\ [abx - (3a - 2b)y]dx + [y + (2a - 3b)x]dy &= 0 \\ x - \frac{y}{y'} &= \sqrt{x^2 + y^2}; & 4x^2y(xy' - y) + x^4 - y^4 &= 0; & y^3dy + x(3y^2 + 2x^2)dx &= 0 \\ y^3 + x^3y'^3 - 3xyy' &= 0; & (x-y')^3 + y'(x-y') + 1 &= 0; & xy' - y &= y^2 - x^2; \\ (x^3 - 1)y' - xy + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0; & (1-x^2)y' + xy &= ax; & \sqrt{1-x^2}y' - xy &= x\sqrt{1-x^2} \\ y' - y \text{tg} x + \cos^2 x &= 0; & y' - \frac{1+3x^2}{x(1+x^2)}y &= x \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ y' - \frac{y}{x} &= \sqrt{1 + \text{Log} x}; & y' \cos x + y \sin x &= \cos x + x \sin x; & y' - xy &= x \sin x^2 \\ y'\sqrt{x} - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} &= 0; & 3(x^2 - 1)y' - y &= \frac{xy^4}{x^3 + 1}; & y' + y \text{tg} x - y^3 &= 0 \\ y' - y &= x\sqrt{y}; & y' + y^3 - \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} &= 0; & (1+x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 &= 0 \\ y'(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x &= 0; & y' &= \frac{2y}{2x - ny^{n-1}(x-y)^2} \\ \frac{y}{x} &= \frac{3y' - y'^2}{1 - 3y'^2}; & y(1 + y'^2) &= 2xy'; & x &= y'e^{2y'} \\ x &= \frac{y'^3}{1 + y'^2}; & 2y - xy' &= xy'^2; & (xy' - y)(1 + y'^2) + 1 &= 0 \\ yy' &= y'^2 + e^x \text{ (poser } e^x = t); & y'^2 - xy' - y &= 0; & x + y &= y'^3 \\ (xy' - y)(x^2 + y^2) &= \alpha^2(xy' + y); & (x^3 + y^2 - 1)(xy' - y) &= x + yy'. \end{aligned}$$

2. — Intégrer

$$(x^2 - k)y' - xy = -k; \quad x(1-y)y' - y(1+x) = 0.$$

Construire les courbes intégrales.

3. — On donne l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right).$$

a) Si $ab' - a'b \neq 0$, le changement de variables

$$u = ax + by + c \quad v = a'x + b'y + c'$$

permet de ramener l'intégration de l'équation (E) à celle d'une équation à variables

séparées. Intégrer ainsi l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y - 5}{3x - 2y + 1}.$$

b) Si $ab' - a'b = 0$, il existe des nombres α et β tels que

$$ax + by + c = \alpha(a'x + b'y + c') + \beta$$

et, en posant $u = a'x + b'y + c'$, l'intégration de l'équation (E) se ramène à celle d'une équation de la forme $dx = \varphi(u)du$.

*4. — Intégrer l'équation différentielle

$$x(1 - y'^2) + 2yy' - a(1 + y'^2) = 0$$

en regardant les courbes intégrales comme enveloppes d'une droite représentée par $y = ux + v$ et en prenant u et v comme nouvelle variable et nouvelle fonction. Trouver la courbe intégrale tangente à une droite donnée D et le lieu du point de contact avec D quand cette droite se déplace en conservant la même direction. Lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

5. — Montrer que la courbe définie paramétriquement par les équations

$$x = a \sin t (3 - \sin^2 t), \quad y = -a \cos^3 t$$

est une courbe intégrale d'une équation différentielle (E) de la forme

$$x + y \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Après avoir formé l'équation (E) on l'intégrera et on donnera une définition géométrique des courbes intégrales.

6. — a) Construire les courbes intégrales C de l'équation différentielle

$$xy' - y = 3x^2(x^2 - 1).$$

b) Former l'équation de la courbe I, lieu des points où les courbes C ont une tangente dont le coefficient directeur est m . Former l'équation différentielle dont les courbes l' dépendant du paramètre m sont les courbes intégrales.

7. — Former une équation différentielle du premier ordre (E), homogène, admettant pour courbe intégrale

$$(I') \quad (x + y)^2 - 2(x - y) = 0.$$

Intégrer (E).

8. — On considère (E) $(x^2 + 1)y' = 4xy^2 + ay + b$.

Déterminer a et b pour que (E) admette pour intégrales particulières

$$y_1 = -x^2 - 1 \quad \text{et} \quad y_2 = -x^2 - \frac{1}{2}.$$

Achever l'intégration.

9. — On considère (E) $y' = y^2 + a(x)y + b(x)$.

Déterminer $a(x)$ et $b(x)$ pour que (E) admette pour intégrales particulières

$$y_1 = x \quad \text{et} \quad y_2 = x^m.$$

Achever l'intégration.

10. — Les fonctions f , g , h étant données, former une équation différentielle du premier ordre (E), vérifiée pour toute valeur de λ par

$$y = f(x) + \frac{g(x)}{\lambda + h(x)}.$$

Intégrer (E).

11. — Montrer que l'équation différentielle

$$y\sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy')$$

admet des cercles pour courbes intégrales; trouver l'enveloppe de ces cercles.

Montrer de même que les courbes intégrales de l'équation

$$x - \frac{y}{2y'} = f(yy')$$

sont des paraboles; trouver l'enveloppe de ces courbes.

*12. — Étude graphique de l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

a) Isoclines.

b) Lieu des points d'inflexion et enveloppe des tangentes d'inflexion des courbes intégrales.

c) Lieu des centres de courbure aux courbes intégrales aux points où ces courbes rencontrent une isocline donnée.

d) Tracé des courbes intégrales.

13. — Montrer que l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + 2xy$$

s'écrit

$$y = \lambda e^{x^2} + e^{x^2} \varphi(x).$$

Développer en série entière les fonctions $\varphi(x)$ et $e^{x^2} \varphi(x)$.

14. — a) Intégrer l'équation différentielle

$$2xy' + y = \frac{1}{1-x}$$

et montrer qu'il existe une intégrale et une seule qui soit définie, continue, et admette une dérivée pour toute valeur de x inférieure à 1; construire la courbe représentative de cette fonction.

b) Former une série entière qui vérifie l'équation proposée, comparer les résultats.

15. — a) Indiquer, avant toute intégration, dans quelles régions du plan peuvent se trouver les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$2y' + \pi \sqrt{\frac{1-y^2}{x}} = 0.$$

b) Intégrer l'équation (E). Pour certaines valeurs de la constante d'intégration la fonction correspondante conserve une valeur réelle sur $]-\infty, +\infty[$; combien existe-t-il de telles fonctions?

c) Construire la courbe représentant celle de ces fonctions qui prend la valeur $+1$ pour $x=0$. Tracer sur la même figure la courbe représentant la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ par la série entière à laquelle est égale le quotient $\frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}}$ quand x est positif.

16. — f et g étant deux fonctions de trois variables, à tout élément de contact (x, y, y') d'une courbe γ les formules

$$X = f(x, y, y') \quad Y = g(x, y, y')$$

associent un point (X, Y) d'une courbe Γ . A quelle condition la transformation conserve-t-elle les contacts.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

I. ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE SE RAMENANT AU PREMIER ORDRE

247. Équations différentielles incomplètes du second ordre. —

L'intégration des équations du second ordre où soit x , soit y ne figurent pas explicitement peut se ramener à celles d'équations du premier ordre.

1° Soit $f(x, y', y'') = 0$. En posant $y' = z$, on est ramené à l'intégration d'une équation du premier ordre $f(x, z, z') = 0$ où z est la fonction inconnue. Si l'on connaît l'intégrale générale $z = \varphi(x, \lambda)$, y est donné par une quadrature qui introduit une seconde constante arbitraire.

2° Soit $f(y, y', y'') = 0$. On prend y comme nouvelle variable, et on va chercher à déterminer, en fonction de y , la nouvelle fonction inconnue

$$p(y) = \frac{dy}{dx} \quad \text{ou } y';$$

$$y'' = \frac{dp}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dy} \times \frac{dy}{dx}, \text{ c'est-à-dire } y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

L'équation proposée prend la forme

$$f\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Si on connaît l'intégrale générale $p = \varphi(y, \lambda)$ de l'équation précédente, on achève par une quadrature

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, \lambda) \implies x = \Phi(y, \lambda) + \mu,$$

$\Phi(y, \lambda)$ étant une primitive de $\frac{1}{\varphi(y, \lambda)}$.

REMARQUE. — Si l'on s'était borné à intervertir le rôle des variables, et à chercher x comme fonction inconnue de y , les résultats obtenus au n° 165, 1°, c) auraient permis d'obtenir l'équation

$$f\left(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}\right) = 0$$

où x' et x'' désignent des dérivées par rapport à y ; on serait ramené au 1^o, donc à prendre x comme fonction inconnue de y ; comme x'_y ne figure que par son inverse, il vaudrait mieux prendre $\frac{1}{x'}$, c'est-à-dire y'_x , d'où la méthode pratique indiquée ci-dessus.

EXEMPLE. — Intégrer l'équation différentielle (1) $1 + y'^2 + yy'' = 0$.
Avec les notations précédentes, cette équation devient

$$(2) \quad 1 + p^2 + yp \frac{dp}{dy} = 0,$$

or $p dp = \frac{1}{2} d(p^2 + 1)$; en posant $p^2 + 1 = u$, on obtient l'équation (3) $u + \frac{y}{2} \cdot \frac{du}{dy} = 0$, à variables séparables; d'où l'intégrale générale (4) $p^2 + 1 = \frac{\lambda}{y^2}$.

Cherchons maintenant x en fonction de y ; (4) donne $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\lambda - y^2}{y^2}$

ou
$$\frac{y dy}{\varepsilon \sqrt{\lambda - y^2}} = dx \Rightarrow x - \mu = -\varepsilon \sqrt{\lambda - y^2};$$

finalement les lignes intégrales de (1) sont données par

$$(x - \mu)^2 + y^2 = \lambda$$

ce sont tous les cercles centrés sur Ox .

248. Équation homogène en y, y', y'' . — On sait aussi ramener à une équation du premier ordre l'équation différentielle

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

homogène en y, y', y'' . Cette équation peut en effet se mettre sous la forme

$$f\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0.$$

Nous prenons $\frac{y'}{y} = p$ comme nouvelle fonction inconnue; en effet,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2}$$

et l'équation proposée devient

$$f\left(x, p, p^2 + \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

249. Équation différentielle linéaire du second ordre. — 1^o DÉFINITION. — On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation différentielle de la forme

$$(E) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$$

a, b, g étant trois fonctions réelles (resp. complexes) de la variable réelle, données, définies et continues sur un même intervalle I .

L'équation est dite *homogène* ou *sans second membre* lorsque g est la fonction nulle sur I , que nous désignerons par (0) , soit

$$(e) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = (0).$$

Nous appellerons solution de (E), [resp. (e)], toute fonction $x \mapsto \psi(x)$, deux fois dérivable sur I , vérifiant l'égalité, entre fonctions définies sur I ,

$$\psi'' + a\psi' + b\psi = g \quad [\text{resp. } \psi'' + a\psi' + b\psi = (0)].$$

Les trois remarques qui ont été faites au n° 240 s'étendent sans difficulté.

2° **L'application linéaire** $\mathcal{F}(y) = y'' + ay' + by$. — Tout ce qui a été dit au n° 240, 2° reste valable; mais ici Φ' sera l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur I , et $\mathcal{F}$ sera l'application de Φ' dans Φ déterminée par

$$y \mapsto y'' + ay' + by.$$

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre, avec second membre,

$$(E) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

Sur un intervalle I , sur lequel les fonctions a , b et g sont continues, on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à l'une d'entre elles, arbitrairement choisie, toutes les solutions de l'équation homogène associée

$$(e) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

3° **Problème I : intégration de (e).** — L'ensemble, $\mathcal{E}$, des solutions de (e) est le noyau de l'application linéaire $\mathcal{F}$ du 2°. $\mathcal{E}$ est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$); l'objet de ce 3° est de démontrer que $\mathcal{E}$ est de dimension 2.

a) **Wronskien.** — I. Supposons le système $\{y_1, y_2\}$ lié; il existe deux constantes, λ_1 et λ_2 , dont une au moins n'est pas nulle, telles que

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = (0), \quad \text{ce qui entraîne} \quad \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' = (0).$$

C'est donc que, pour tout point x de I , le système des deux équations linéaires et homogènes, aux inconnues u et v ,

$$\begin{cases} uy_1(x) + vy_2(x) = 0 \\ uy_1'(x) + vy_2'(x) = 0 \end{cases}$$

admet une solution $u = \lambda_1$, $v = \lambda_2$ autre que la solution triviale, ce qui exige que le déterminant

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

prenne la valeur 0 au point x .

Nous appellerons *wronskien* d'un système $\{y_1, y_2\}$ la fonction

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Nous pouvons énoncer :

Si le système $\{y_1, y_2\}$ est lié, son wronskien est la fonction nulle sur I.

II. Lorsque $w(x_0) \neq 0$, ($x_0 \in I$), le système $\{y_1, y_2\}$ est libre : en effet s'il était lié (cf. partie I) son wronskien serait la fonction nulle sur I, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

III. Étudions le wronskien de deux solutions quelconques de (e).

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \text{ est dérivable sur I}$$

$$w' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -ay_1' - by_1 & -ay_2' - by_2 \end{vmatrix} = -aw$$

w est donc une solution de l'équation différentielle

$$z' + az = (0).$$

D'après l'étude du n° 240, 3°, on a, en désignant par x_0 un point arbitrairement choisi de l'intervalle I,

$$w(x) = w(x_0) \times \exp\left(\int_{x_0}^x -a(t) dt\right)$$

ce qui montre qu'il suffit que le wronskien w ne prenne pas la valeur 0 en un point donné de I pour qu'il ne prenne la valeur 0 en aucun point de I.

b) Intégration de (e) quand on connaît une solution particulière, y_1 , qui ne prend la valeur 0 en aucun point de I. — On est alors en droit d'effectuer le changement de fonction inconnue : $y = y_1 z$.

L'intégration de (e) se ramène à celle de l'équation différentielle

$$y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z'' + a(y_1' z + y_1 z') + b y_1 z = (0)$$

qui, compte-tenu de $\mathcal{F}(y_1) = (0)$, se réduit à

$$(1) \quad z'' + \left[2 \frac{y_1'}{y_1} + a\right] z' = (0).$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire et homogène, du premier ordre, par rapport à la fonction inconnue z' , dont la solution générale s'obtient par la méthode exposée au n° 240, 3°, ce qui revient dans la pratique, à écrire

$$\frac{z''}{z'} + 2 \frac{y_1'}{y_1} + a = (0) \quad \text{ou} \quad (\text{Log} |z'|)' + (\text{Log } y_1^2)' + a = (0).$$

En désignant par A une primitive, arbitrairement choisie, de a , et λ une constante quelconque, on a

$$z' = \lambda h \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{1}{[y_1(x)]^2} e^{-A(x)}, \quad \text{d'où} \quad z = \lambda H + \mu$$

H désignant une primitive, arbitrairement choisie, de h , et μ une constante

quelconque. La solution générale de (e) est ainsi l'ensemble des fonctions, dépendant des deux paramètres λ et μ ,

$$y = \lambda(Hy_1) + \mu y_1.$$

Autrement dit, l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des solutions de (e) admet le système générateur $\{y_1, y_2 = Hy_1\}$. Le wronskien de ce système est

$$y_1(H'y_1 + Hy_1') - y_1'Hy_1 \quad \text{ou} \quad y_1^2H' \quad \text{ou} \quad y_1^2h \quad \text{ou enfin} \quad e^{-A}.$$

Ce wronskien n'est pas la fonction (0); le système $\{y_1, Hy_1\}$ est libre; c'est donc une base de $\mathcal{E}$, qui est, ainsi, de dimension 2.

c) THÉORÈME. — Soit l'équation différentielle linéaire et homogène, du second ordre,

$$(e) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Sur un intervalle I sur lequel les fonctions a et b sont continues, les solutions de (e) forment un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur I .

En d'autres termes, si y_1 et y_2 sont deux solutions de (e), formant un système libre, l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (e) est l'ensemble des fonctions

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

λ_1 et λ_2 étant deux constantes quelconques.

Ces constantes sont réelles si a et b sont des fonctions réelles; $\mathcal{E}$ est alors un espace vectoriel $\mathcal{E}_R$ sur R .

Ces constantes sont complexes si a et b sont des fonctions complexes; $\mathcal{E}$ est alors un espace vectoriel $\mathcal{E}_C$ sur C .

La démonstration générale du théorème précédent n'est pas au programme des classes de Spéciales.

Nous avons cependant démontré ce théorème en b) dans le cas particulier où l'on connaît *a priori* l'existence d'une solution qui ne prend la valeur 0 en aucun point de I .

Nous verrons au 5° une démonstration valable dans un second cas particulier, celui où l'on connaît *a priori* l'existence de deux solutions formant un système dont le wronskien n'est pas la fonction nulle.

* Dans le cas général, le théorème précédent se déduit du théorème d'existence que nous avons admis au n° 231 par la démonstration suivante qui peut être laissée de côté en première lecture.

Fixons un point x_0 de I et désignons par φ l'application de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ dans l'espace vectoriel K^2 , ($K = R$ ou $K = C$), telle que

$$y \xrightarrow{\varphi} Y = (y(x_0), y'(x_0)).$$

Il s'agit d'une bijection. En effet, (α_1, α_2) étant un élément donné de K^2 , l'équation différentielle (e), qui s'écrit

$$y'' = \varphi(x, y, y') \quad \text{avec} \quad \varphi(x, y, y') = -a(x)y' - b(x)y,$$

vérifie les hypothèses (H₁) et (H₂) du n° 231 en ce qui concerne le point (x₀, α₁, α₂) de I × K²; il existe donc une, et une seule solution, ψ, de (e) telle que

$$\psi(x_0) = \alpha_1, \quad \psi'(x_0) = \alpha_2,$$

(il est possible de démontrer ⁽¹⁾ que cette solution est définie sur I tout entier).

On constate que :

$$\begin{array}{lll} \varphi(y) = Y & \text{et} & \varphi(y_1) = Y_1 \implies \varphi(y + y_1) = Y + Y_1 \\ \varphi(y) = Y & \text{et} & \lambda \in K \implies \varphi(\lambda y) = \lambda Y. \end{array}$$

φ est donc une application linéaire bijective, c'est-à-dire un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur l'espace vectoriel K²; on sait (I, 168) que, dans ce cas

$$\dim \mathcal{E} = \dim K^2 \quad \text{ou} \quad \dim \mathcal{E} = 2.$$

4° Problème II : recherche d'une solution particulière de (E). —

a) *Superposition des solutions.* — La théorie est celle du n° 240, 4°.

b) Dans le cas particulier où a et b sont des constantes et où le second membre est $g(x) = \sum e^{m_i x} f_i(x)$, m_i étant une constante et f_i un polynôme, on se reportera au n° 251.

c) Dans le cas général, il faut recourir à la méthode de la « variation des constantes » que nous allons exposer maintenant.

5° Intégration de (E) par variation des constantes. — Nous supposons que (e) a été intégrée (cf. 3°) et que nous connaissons un système {y₁, y₂} de deux solutions de (e) dont le wronskien, $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, ne prend pas la valeur 0 en un point arbitrairement choisi de I, ce qui implique (cf. 3°) que {y₁, y₂} est un système libre de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des solutions de (e).

A toute fonction $y \in \Phi'$ on peut associer un, et un seul, couple {u, v} de fonctions dérivables sur I vérifiant le système des deux égalités entre fonctions de Φ

$$(2) \quad y = uy_1 + vy_2 \quad y' = uy_1' + vy_2';$$

(1) Soit I' un intervalle fermé contenu dans I. Pour tout r > 0 la fonction

$$(x, y, z) \longmapsto -a(x)y - b(x)z$$

est continue sur la boule fermée : $x \in I', |y - \alpha_1| \leq r, |z - \alpha_2| \leq r$; elle admet des dérivées partielles continues, donc bornées, par rapport à y et z; elle est majorée, en valeur absolue, par

$$k \times (|\alpha_1| + |\alpha_2| + 2r) \quad \text{avec} \quad k = \sup_{x \in I'} (|a(x)| + |b(x)|)$$

et a fortiori par M = 3kr, à condition de choisir r assez grand, ce qui est possible.

La solution ψ est donc définie au moins sur I' ∩ [x₀ - β, x₀ + β], avec $\beta = \frac{r}{M}$.

Comme $\beta = \frac{1}{3k}$ ne dépend pas du triplet (x₀, α₁, α₂), on peut recommencer avec les triplets

$$(x_0 + \beta, \psi(x_0 + \beta), \psi'(x_0 + \beta)) \quad \text{et} \quad (x_0 - \beta, \psi(x_0 - \beta), \psi'(x_0 - \beta))$$

ce qui montre que ψ est défini au moins sur I' ∩ [x₀ - 2β, x₀ + 2β] et, finalement, sur I'. Enfin ψ étant définie sur tout intervalle fermé contenu dans I, ψ est définie sur I.

la non nullité de $w(x)$ en tout point x de I assure en effet l'existence et l'unicité du couple $\{u(x), v(x)\}$ en tout point de I (1).

Mais en dérivant la première de ces égalités, on trouve que le système (2) est équivalent au système

$$(3) \quad y = uy_1 + vy_2 \quad (0) = u'y_1 + v'y_2.$$

Ainsi intégrer (E), c'est chercher les couples $\{u, v\}$ de fonctions dérivables sur I qui vérifient le système

$$(4) \quad (0) = u'y_1 + v'y_2, \quad \mathcal{F}(uy_1 + vy_2) = g.$$

La première des équations (4) a pour conséquences :

$$(uy_1 + vy_2)' = uy_1' + vy_2', \quad (uy_1 + vy_2)'' = uy_1'' + vy_2'' + u'y_1' + v'y_2'$$

et, compte-tenu de $\mathcal{F}(y_1) = (0)$ et $\mathcal{F}(y_2) = (0)$:

$$\mathcal{F}(uy_1 + vy_2) = u'y_1' + v'y_2'.$$

Il en résulte que :

$$(4) \iff (5) \quad \begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = (0) \\ u'y_1' + v'y_2' = g \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u' = -\frac{1}{w}gy_2 \\ v' = \frac{1}{w}gy_1. \end{cases}$$

Enfin toutes les fonctions u et v répondant à la question sont

$$u = U + C_1, \quad U \text{ primitive arbitrairement choisie de } -\frac{1}{w}gy_2$$

$$v = V + C_2, \quad V \text{ primitive arbitrairement choisie de } \frac{1}{w}gy_1$$

C_1 et C_2 étant deux constantes quelconques.

La solution générale de (E) est la famille des fonctions

$$(6) \quad y = (Uy_1 + Vy_2) + C_1y_1 + C_2y_2.$$

REMARQUE I. — Si $g = (0)$, on peut choisir pour U et V la fonction (0); et l'étude précédente démontre que si l'on connaît *a priori* l'existence de deux solutions de l'équation (e), y_1 et y_2 , formant un système à wronskien non nul, toutes les solutions de (e) sont les fonctions

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

C_1 et C_2 étant deux constantes quelconques. C_1 et C_2 sont réelles ou complexes suivant que l'on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (e) comme espace vectoriel sur le corps des réels ou celui des complexes.

Le système $\{y_1, y_2\}$ étant à la fois libre et générateur pour $\mathcal{E}$, le théorème énoncé au 3°, c) est démontré dans le cas particulier qui nous occupe.

REMARQUE II. — On retrouve sur la formule (6) que l'ensemble des solu-

(1) On pourrait expliciter : $u = \frac{1}{w}(yy_2' - y'y_2)$, $v = \frac{1}{w}(-yy_1' + y'y_1)$.

tions de (E) est une variété linéaire affine dont la direction est l'ensemble $\mathfrak{L}$ des solutions de (e).

REMARQUE III. — La solution générale de (E) s'écrivant

$$y = Y + C_1 y_1 + C_2 y_2$$

où Y est une solution particulière de (E), on vérifie qu'il existe une seule solution satisfaisant aux conditions de Cauchy (conditions initiales données (x_0, y_0, y'_0)) :

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 &\iff Y(x_0) + C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 &\iff Y'(x_0) + C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_0. \end{aligned}$$

Les constantes C_1 et C_2 sont données par un système de Cramer car le déterminant du système précédent est la valeur $w(x_0)$ du wronskien w du système $\{y_1, y_2\}$ au point x_0 , qui n'est pas nulle par hypothèse.

6° EXEMPLE. — Soit à intégrer l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$$

a) On sait que $\cos x$ et $\sin x$ sont deux solutions de l'équation homogène associée

$$(e) \quad y'' + y = (0).$$

Comme ces solutions forment un système à wronskien non nul :

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1,$$

la solution générale de (e) est

$$y = \lambda \cos x + \mu \sin x,$$

λ et μ étant deux constantes quelconques.

b) Il suffit maintenant, par application du théorème du n° 249, 2°, de chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$(7) \quad y = u \cos x + v \sin x$$

u et v étant deux fonctions inconnues.

$$(8) \quad y' = -u \sin x + v \cos x, \quad \text{en posant} \quad u' \cos x + v' \sin x = 0.$$

$$\text{Alors} \quad y'' + y = -u' \sin x + v' \cos x.$$

Pour que (7) donne une solution de (E), il faut et il suffit que u et v vérifient

$$\begin{aligned} \begin{cases} u' \cos x + v' \sin x = 0 \\ -u' \sin x + v' \cos x = \operatorname{tg}^2 x \end{cases} &\implies \begin{cases} u' = -\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \\ v' = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \end{cases} \\ u' = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} d(\cos x) &\implies u = -\frac{1 + \cos^2 x}{\cos x} \\ v' = \frac{1}{\cos x} - \cos x &\implies v = \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x. \end{aligned}$$

Une intégrale particulière de (E) est ainsi

$$-(1 + \cos^2 x) + \sin x \left[\operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x \right]$$

et l'intégrale générale est enfin

$$\lambda \cos x + \mu \sin x - 2 + \sin x \cdot \text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

250. Équation linéaire du second ordre, sans second membre, à coefficients constants. — Soit à intégrer l'équation

$$(1) \quad ay'' + by' + cy = (0)$$

où a, b, c sont les constantes réelles, $a \neq 0$.

Comme au n° 249, 2°, posons

$$\mathcal{F}(y) = ay'' + by' + cy.$$

Si r est une constante, réelle ou complexe

$$\mathcal{F}(e^{rx}) = (ar^2 + br + c) e^{rx}.$$

La fonction e^{rx} est donc solution de (1) si, et seulement si, r est racine de l'équation

$$(2) \quad ar^2 + br + c = 0.$$

L'équation algébrique (2) est dite *équation caractéristique* relative à l'équation différentielle (1).

1° L'équation caractéristique admet deux racines distinctes ($b^2 - 4ac \neq 0$). Appelons r_1 et r_2 ces deux racines; elles sont réelles ou complexes conjuguées.

$$\text{Les fonctions} \quad y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{et} \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

sont deux solutions particulières de l'équation (1), définies sur $] -\infty, +\infty [$.

Le wronskien du système $\{y_1, y_2\}$ est égal à $w(x) = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x}$; il ne prend la valeur 0 en aucun point de $] -\infty, +\infty [$; d'après le n° 249, 3°, le système $\{y_1, y_2\}$ constitue une base de l'espace vectoriel des solutions de (1).

I. Supposons les racines r_1 et r_2 distinctes et réelles.

Les solutions de (1), fonctions réelles d'une variable réelle, forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{E}_R$, dont $\{y_1, y_2\}$ est une base.

Toutes ces solutions sont définies par

$$(3) \quad y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

λ_1 et λ_2 étant deux constantes réelles quelconques.

II. Supposons les racines r_1 et r_2 imaginaires conjuguées.

Les solutions de (1), fonctions complexes d'une variable réelle, engendrent un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{E}_C$, dont $\{y_1, y_2\}$ est une base.

Toutes ces solutions sont définies par la formule (3), λ_1 et λ_2 étant alors deux constantes complexes, quelconques.

On peut poser

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0.$$

$$e^{rx} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x), \quad e^{r^*x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} & \text{ou} & Y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} & \text{ou} & Y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{cases}$$

$$\{Y_1, Y_2\} \text{ est une base de } \mathcal{E}_c \text{ car } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Mais comme Y_1 et Y_2 sont des fonctions réelles de la variable réelle x , $\{Y_1, Y_2\}$ est également une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_R$ des solutions de (1), fonctions réelles de x .

Toutes ces solutions sont définies par

$$(4) \quad y = \mu_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + \mu_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

μ_1 et μ_2 étant deux constantes réelles quelconques, ou encore par

$$(4') \quad y = e^{\alpha x} (\mu_1 \cos \beta x + \mu_2 \sin \beta x).$$

L'expression (4') peut se mettre sous la forme

$$y = A e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi)$$

A et φ étant des constantes réelles quelconques.

REMARQUE. — Dans le cas I, les racines r_1 et r_2 peuvent s'écrire $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$, α et β étant réels ($\beta \neq 0$), et les solutions fournies par la formule (3) peuvent se mettre sous la forme

$$e^{\alpha x} (\mu_1 \operatorname{ch} \beta x + \mu_2 \operatorname{sh} \beta x),$$

μ_1 et μ_2 étant deux constantes quelconques (réelles si on ne s'intéresse qu'aux solutions réelles de l'équation (1)).

2° L'équation caractéristique a une racine double ($b^2 - 4ac = 0$).

Si l'on appelle r la racine double de l'équation (2), on a, par hypothèse,

$$(5) \quad ar^2 + br + c = 0, \quad 2ar + b = 0.$$

Nous ne connaissons maintenant qu'une seule solution particulière de (1), e^{rx} ; comme cette solution ne prend la valeur 0 en aucun point de $] -\infty, +\infty [$, nous pouvons (249, 3°, b) faire le changement de fonction inconnue

$$y = e^{rx} z.$$

$$\mathcal{F}(e^{rx} z) = ae^{rx}(z'' + 2rz' + r^2 z) + be^{rx}(z' + rz) + ce^{rx} z$$

se réduit à $ae^{rx} z''$ en tenant compte de (5).

L'équation transformée de (1) est donc $z'' = 0$, et la solution générale en est $z = \lambda x + \mu$, λ et μ étant deux constantes réelles quelconques. Toutes les solutions de (1), fonctions réelles de la variable x , sont donc définies par

$$y = e^{rx} (\lambda x + \mu),$$

λ et μ étant deux constantes réelles quelconques.

On observera que la fonction xe^{rx} est une solution particulière de l'équation (1) lorsque l'équation caractéristique admet la racine double r .

CAS PARTICULIERS. — 1° $y'' + \omega^2 y = 0$. L'équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ a pour racines $\pm i\omega$, l'intégrale générale est $\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$, ce qu'on peut écrire $A \cos(\omega x - \varphi)$.

2° $y'' - \omega^2 y = 0$. L'équation caractéristique $r^2 - \omega^2 = 0$ a pour racines $\pm \omega$, donc l'intégrale générale est $\lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x}$, ou encore $A \cosh \omega x + B \sinh \omega x$.

Remarque sur l'équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre. — L'équation

$$ay' + by = 0$$

où a et b sont deux constantes réelles ($a \neq 0$) admet une intégrale particulière de la forme e^{rx} , où r est une constante, racine de l'équation caractéristique

$$ar + b = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc

$$y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x}.$$

251. Recherche directe d'une intégrale particulière d'une équation linéaire, à coefficients constants, lorsque le second membre est de la forme $\Sigma e^{mx} f(x)$, m étant une constante, $f(x)$ un polynôme de la variable x . — 1° Nous allons considérer des équations linéaires, du premier ou du deuxième ordre, à coefficients constants, et avec second membre

$$(1) \quad ay'' + by' + cy = g(x)$$

$$(2) \quad ay' + by = g(x),$$

Nous poserons, pour simplifier,

$$\mathcal{F}(y) = ay'' + by' + cy$$

$$\mathcal{G}(y) = ay' + by.$$

Dans chaque cas, puisqu'on sait trouver l'intégrale générale de l'équation sans second membre associée, la méthode de « variation des constantes » permettra d'obtenir une intégrale particulière de l'équation avec second membre, et donc d'écrire l'intégrale générale de l'équation proposée.

Nous nous proposons de montrer que, lorsque le second membre est un polynôme en x , ou le produit d'une exponentielle e^{mx} par un polynôme, ou une somme de telles fonctions, on peut trouver plus rapidement des intégrales particulières de l'équation avec second membre. (De tels seconds membres se rencontrent souvent en Physique.)

REMARQUE. — Les considérations qui vont suivre peuvent s'appliquer à une équation différentielle linéaire d'ordre n , pourvue d'un second membre de la même nature que ceux qui viennent d'être signalés.

2° Le second membre est un polynôme

$$g(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n.$$

Une solution particulière des équations étudiées est alors un polynôme qu'on détermine par identification :

$$\text{I. Soit } ay' + by = g(x) \quad (2) \quad a \neq 0.$$

Si $b \neq 0$, une solution particulière est un polynôme de même degré que $g(x)$, soit

$$u(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1} x + B_n;$$

déterminons en effet les coefficients inconnus $B_0, \dots, B_n$ en écrivant que le polynôme $au' + bu$ est égal au polynôme g :

$$(3) \quad \begin{cases} bB_0 & = A_0 \\ bB_1 + naB_0 & = A_1 \\ \dots & \dots \\ bB_p + (n - p + 1) aB_{p-1} & = A_p \\ \dots & \dots \\ bB_n + aB_{n-1} & = A_n. \end{cases}$$

Ces équations sont échelonnées par rapport aux inconnues $B_0, B_1, \dots, B_n$ et déterminent ces inconnues.

Si $b = 0$, on a immédiatement l'intégrale générale de (2) par quadrature.

$$\text{II. Soit } ay'' + by' + cy = g(x) \quad (1) \quad a \neq 0.$$

Si $c \neq 0$, une solution particulière est un polynôme de même degré que $g(x)$, soit $u(x)$; les relations d'identification de $au'' + bu' + cu$ et de $g(x)$ sont les suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} cB_0 & = A_0 \\ cB_1 + b n B_0 & = A_1 \\ \dots & \dots \\ cB_p + b(n - p + 1)B_{p-1} + a(n - p + 2)(n - p + 1)B_{p-2} & = A_p \\ \dots & \dots \\ cB_n + b B_{n-1} + 2 a B_{n-2} & = A_n. \end{cases}$$

Ces équations sont échelonnées par rapport aux inconnues $B_0, \dots, B_n$ et déterminent ces inconnues.

Si $c = 0$, $b \neq 0$, en posant $y' = z$, on est ramené au problème précédent pour une équation linéaire du premier ordre.

Si $c = 0$, $b = 0$, on obtient immédiatement l'intégrale générale de l'équation (1) par deux quadratures successives.

3° Le second membre est $e^{mx} f(x)$, produit d'une exponentielle par un polynôme $f(x)$. — On cherche une intégrale particulière des équations étudiées sous la forme

$$u(x) = e^{mx}.z, \text{ où } z \text{ est une fonction inconnue.}$$

I. — Soit $ay' + by = e^{mx}f(x)$ (2)

on a successivement $a(e^{mx}z' + me^{mx}z) + be^{mx}z = e^{mx}f(x)$
 $az' + (am + b)z = f(x)$

et on est ainsi ramené à un problème précédent.

II. Soit $ay'' + by' + cy = e^{mx}f(x)$ (1)

on a successivement

$$ae^{mx}(z'' + 2mz' + m^2z) + be^{mx}(z' + mz) + ce^{mx}z = e^{mx}f(x),$$

$$az'' + (2am + b)z' + (am^2 + bm + c)z = f(x),$$

et on est encore ramené à un problème précédent.

Si m n'est pas racine de l'équation caractéristique relative à l'équation sans second membre associée à l'équation (1), on peut prendre pour z un polynôme de même degré que $f(x)$.

Si m est racine simple de cette équation caractéristique, on peut prendre pour z le produit par x d'un polynôme de même degré que $f(x)$.

Si m est racine double de l'équation caractéristique, on peut prendre pour z le produit par x^2 d'un polynôme de même degré que $f(x)$.

Cas particulier. — Si le polynôme $f(x)$ se réduit à une constante, c'est-à-dire si le second membre de l'équation (1) est de la forme Ae^{mx} , A étant une constante, une intégrale particulière de l'équation (1) est λe^{mx} , $\lambda x e^{mx}$, $\lambda x^2 e^{mx}$, suivant que m n'est pas racine, est racine simple ou est racine double de l'équation caractéristique, λ étant une constante qu'on détermine par identification.

4^e EXEMPLE I. — Soit à intégrer $y' - y = x^2 \operatorname{sh} x$.

L'intégrale générale de l'équation sans second membre associée est λe^x .

Le second membre s'écrit $\frac{x^2}{2}e^x - \frac{x^2}{2}e^{-x}$.

Une intégrale particulière de $y' - y = \frac{x^2}{2}e^x$ s'obtient en posant $y = e^x z$, ce qui donne

$$z' = \frac{x^2}{2}.$$

d'où l'intégrale particulière

$$u_1 = \frac{x^3}{6}e^x.$$

Une intégrale particulière de $y' - y = -\frac{x^2}{2}e^{-x}$ s'obtient en posant $y = e^{-x}z$, ce qui donne

$$z' - 2z = -\frac{x^2}{2}.$$

Une intégrale particulière de cette équation s'obtient en posant $z = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, les coefficients inconnus α , β , γ se déterminant par identification, ce qui donne

$$-2\alpha = -\frac{1}{2}; \quad 2\alpha - 2\beta = 0; \quad \beta - 2\gamma = 0$$

d'où la seconde intégrale particulière $u_2 = \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right)e^{-x}$.

L'intégrale générale de l'équation initiale est

$$y = \lambda e^x + \frac{x^3}{6}e^x + \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right)e^{-x}.$$

EXEMPLE II. — Intégrer

$$y'' + \omega^2 y = x \sin 2x.$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre associée est $\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$, λ et μ désignant deux constantes quelconques. Le second membre s'écrit

$$x \sin 2x = e^{2ix} \frac{x}{2i} + e^{-2ix} \frac{x}{-2i}.$$

Il suffit de chercher une intégrale particulière u_1 de l'équation

$$(5) \quad y'' + \omega^2 y = e^{2ix} \frac{x}{2i}.$$

En changeant i en $-i$, on en déduira une intégrale particulière u_2 de l'équation

$$y'' + \omega^2 y = e^{-2ix} \frac{x}{-2i}.$$

La somme $u_1 + u_2$ est une intégrale particulière de l'équation proposée.

Pour trouver u_1 faisons dans l'équation (5) la changement de fonction inconnue

$$y = e^{2ix} z;$$

l'équation transformée est

$$(6) \quad z'' + 4iz' + (\omega^2 - 4)z = \frac{x}{2i}.$$

1° $\omega^2 - 4 \neq 0$. Nous prendrons pour intégrale particulière de l'équation (6) un polynôme du premier degré, soit $z = \alpha x + \beta$, que nous déterminerons par identification :

$$4i\alpha + (\omega^2 - 4)(\alpha x + \beta) = \frac{x}{2i}.$$

$$\text{Nous trouvons} \quad \alpha = \frac{1}{2i(\omega^2 - 4)}, \quad \beta = \frac{-2}{(\omega^2 - 4)^2}.$$

On peut donc prendre

$$u_1(x) = e^{2ix} \left[\frac{x}{2i(\omega^2 - 4)} - \frac{2}{(\omega^2 - 4)^2} \right], \quad u_2(x) = e^{-2ix} \left[\frac{x}{-2i(\omega^2 - 4)} - \frac{2}{(\omega^2 - 4)^2} \right]$$

d'où

$$u_1 + u_2 = \frac{x}{\omega^2 - 4} \sin 2x - \frac{4 \cos 2x}{(\omega^2 - 4)^2}.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc, si ω^2 est différent de 4,

$$y = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x + \frac{x \sin 2x}{\omega^2 - 4} - \frac{4 \cos 2x}{(\omega^2 - 4)^2}.$$

2° $\omega^2 = 4$. Une intégrale particulière de l'équation (6) s'obtient en prenant pour z' un polynôme du premier degré en x , soit $z' = \alpha x + \beta$, qu'on détermine par identification :

$$\alpha + 4i(\alpha x + \beta) = \frac{x}{2i}.$$

On trouve

$$\alpha = -\frac{1}{8}, \quad \beta = -\frac{i}{32},$$

et par suite

$$z' = -\frac{x}{8} - \frac{i}{32}.$$

On peut prendre pour z le polynôme $-\frac{x^2}{16} - \frac{ix}{32}$,

$$u_1(x) = e^{2ix} \left(-\frac{x^2}{16} - \frac{ix}{32} \right), \quad u_2(x) = e^{-2ix} \left(-\frac{x^2}{16} + \frac{ix}{32} \right)$$

et

$$u_1 + u_2 = -\frac{x^2}{8} \cos 2x + \frac{x}{16} \sin 2x.$$

L'intégrale générale de l'équation $y'' + 4y = x \sin 2x$ est donc

$$y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x - \frac{x^2}{8} \cos 2x + \frac{x}{16} \sin 2x.$$

EXEMPLE III. — Intégrer $y'' - 2y' + y = e^x(x^2 + 1)$.

L'équation sans second membre associée a pour équation caractéristique l'équation $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet la racine double $r = 1$; son intégrale générale est $e^x(\lambda x + \mu)$, λ et μ étant deux constantes quelconques.

Pour trouver une intégrale particulière de l'équation avec second membre, on fait le changement de fonction inconnue $y = e^{xz}$. L'équation transformée est $z'' = x^2 + 1$, elle admet pour intégrale particulière $z = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}$. L'intégrale générale de l'équation proposée est

$$y = e^x \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu \right).$$

252. Système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. — La diagonalisation et, si nécessaire, la triangularisation des matrices (tome I, nos 233 et suivants) vont nous permettre de donner une méthode générale d'intégration du système différentiel de n équations aux n fonctions inconnues y_i de la variable x :

$$(1) \quad y_i' = a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dans lequel les coefficients a_{ij} sont des constantes réelles.

Nous condenserons (1) sous la forme matricielle

$$(1') \quad Y' = AY \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}$$

A la matrice Y on peut associer un vecteur $\vec{Y}$ dans un espace vectoriel E rapporté à une base $\mathcal{U} = \{ \vec{u}_i \}$; à la matrice A on associe un endomorphisme f de E

$$\vec{Y} \xrightarrow{\circ} f(\vec{Y}) \iff Y \xrightarrow{\circ} AY.$$

Intégrer (1), c'est chercher les vecteurs $\vec{Y}$, fonctions de la variable x , tels que

$$(1'') \quad \vec{Y}' = f(\vec{Y}).$$

On facilite l'intégration de (1'') en traduisant l'endomorphisme f dans la base la plus avantageuse.

L'écriture (1'') du problème posé montre immédiatement que l'ensemble des solutions de (1'') constitue un espace vectoriel.

1^{er} Cas. — La matrice A est diagonalisable. — Il existe une matrice régulière P , d'ordre n , telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale B , dont les éléments diagonaux, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sont les valeurs propres, distinctes ou confondues, de A .

Dans (1) faisons le changement de fonctions inconnues : $Y = PZ$, soit :

$$(2) \quad y_i = p_{i1}z_1 + \dots + p_{in}z_n \quad (i = 1, \dots, n)$$

ce qui donne, par dérivation,

$$y_i' = p_{i1}z_1' + \dots + p_{in}z_n' \quad \text{ou} \quad Y' = PZ'$$

Le système (1') devient : $PZ' = APZ$ et, après multiplication par P^{-1}

$$Z' = P^{-1}APZ \quad \text{ou} \quad Z' = BZ.$$

En explicitant, nous obtenons :

$$(3) \quad \begin{cases} z'_1 = \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ z'_n = \lambda_n z_n \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \begin{cases} z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ z_n = C_n e^{\lambda_n x} \end{cases}$$

relations dans lesquelles $C_1, \dots, C_n$ désignent des constantes réelles.

Finalement :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

EXEMPLE :

$$(4) \quad \begin{cases} y'_1 = 5y_1 + y_2 - y_3 \\ y'_2 = 2y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ y'_3 = y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

La diagonalisation de la matrice A a été étudiée au n° 233 du tome I. Nous avons obtenu

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

La solution générale du système différentiel (4) est donc

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{2x} \\ C_2 e^{4x} \\ C_3 e^{6x} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y_1 = C_2 e^{4x} + C_3 e^{6x} \\ y_2 = C_1 e^{2x} + C_3 e^{6x} \\ y_3 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} \end{cases}$$

2° Cas. — La matrice A n'est pas diagonalisable. — Il existe cependant une matrice régulière P , d'ordre n telle que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire B dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A .

La méthode employée au 1° conduit cette fois au système

$$(3) \quad \begin{cases} z'_1 = \lambda_1 z_1 + b_{12} z_2 + \dots + b_{1n} z_n \\ \vdots \\ z'_{n-1} = \lambda_{n-1} z_{n-1} + b_{n-1n} z_n \\ z'_n = \lambda_n z_n \end{cases}$$

On en déduit, successivement, $z_n, z_{n-1}, \dots, z_1$.

$$\text{EXEMPLE :} \quad \begin{cases} y'_1 = 4y_1 + y_2 - y_3 \\ y'_2 = -6y_1 - y_2 + 2y_3 \\ y'_3 = 2y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le lecteur vérifiera que la matrice A admet une valeur propre simple $\lambda_1 = 2$ et une valeur propre double, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, à laquelle correspond un sous-espace propre de dimension 1, ce qui fait (I, 234) que A n'est pas diagonalisable. La méthode de triangulation exposée au n° 235 du tome I conduit, entre autres solutions, à la suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} z_3 = C_1 e^t \\ z_2 = (2t C_1 + C_2) e^t \\ z_1 = -C_1 e^t + C_3 e^{2t} \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = (2t C_1 + C_2) e^t + C_3 e^{2t} \\ y_2 = (2 C_1 - 4t C_1 - 2 C_2) e^t - 2 C_3 e^{2t} \\ y_3 = (2t C_1 + C_2) e^t \end{cases}$$

III. ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES GÉNÉRAUX LIÉS A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

253. Recherche des dérivées successives en un point d'une intégrale déterminée par des conditions initiales. — Soit

$$(E) \quad y'' = \varphi(x, y, y'), \quad (1)$$

une équation différentielle résolue par rapport à y'' , la fonction $\varphi(x, y, y')$ ayant des dérivées partielles successives sur un champ $\mathcal{C}$. Soit (x_0, y_0, y'_0) un point de $\mathcal{C}$, et soit $y = \psi(x)$ l'équation d'une courbe intégrale telle que

$$y_0 = \psi(x_0), \quad y'_0 = \psi'(x_0).$$

Puisque $\psi''(x) = \varphi[x, \psi(x), \psi'(x)]$, $\forall x \in \mathcal{C}$, (2)
on a aussi $y''_0 = \psi''(x_0) = \varphi[x_0, y_0, y'_0]$ pour $x = x_0$,
et $\psi'''(x) = \varphi'_x(x, \psi, \psi') + \varphi'_y(x, \psi, \psi') \cdot \psi'(x) + \varphi'_{y'}(x, \psi, \psi') \cdot \psi''(x)$
d'où $\psi'''(x_0) = \varphi'_x(x_0, y_0, y'_0) + \varphi'_y(x_0, y_0, y'_0) y'_0 + \varphi'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) y''_0$, etc....

D'une façon générale les valeurs $y''_0, y'''_0, \dots, y^{(n)}_0, \dots$ des dérivées successives, pour x_0 , de l'intégrale $y = \psi(x)$ sont toutes déterminées en fonction de x_0, y_0, y'_0 .

Par conséquent, si $\psi(x)$ est, dans un voisinage de x_0 , développable en série de Taylor, ce développement est nécessairement

$$\psi(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y^{(n)}_0 + \dots$$

254. Séries entières dont la somme est solution d'une équation différentielle linéaire. — 1° **Intégration d'une équation linéaire par des séries entières.** — On peut dans bien des cas rechercher par la méthode des coefficients indéterminés, les séries entières

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

dont la somme peut vérifier une équation différentielle linéaire (E).

Ayant obtenu la loi de formation du coefficient général a_n , on cherche le rayon de convergence de ces séries entières; s'il en existe un, non nul, la somme de chacune de ces séries entières est une solution de (E).

EXEMPLE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$(E) \quad (1 - x^2)y' - xy = 1$$

au moyen des séries entières.

II. On part du développement

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

a_0 et a_1 ayant les valeurs déjà connues, et on l'astreint à vérifier formellement (E).

Si $f(x)$ est paire (resp. impaire), on cherche seulement les séries entières paires (resp. impaires) dont la somme peut vérifier (E).

III. On cherche le rayon de convergence de la série précédente, soit R , supposé non nul. La somme $\varphi(x)$ de cette série est, pour $|x| < R$, une fonction qui satisfait aux conditions α) et β); $\varphi(x)$ coïncide donc avec $f(x)$.

EXEMPLE. — Le point de vue adopté ici n'est pas celui qui sera adopté au n° 278, puisqu'alors $\cos x$ sera défini comme somme d'une série entière.

Soit $f(x) = \cos x$; on sait que cette fonction est une intégrale de l'équation

$$(E) \quad y'' + y = 0.$$

L'intégrale générale de (E) est $y = \lambda \cos x + \mu \sin x$.

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & y(0) = 1, \quad \lambda = 1 \\ & y'(0) = 0, \quad \mu = 0. \end{array}$$

si

Par suite $\cos x$ est la seule intégrale de (E) qui, pour $x = 0$, prend la valeur 1, tandis que sa dérivée prend la valeur 0.

Comme la fonction $\cos x$ est paire, nous poserons

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + a_2 x^2 + \dots + a_{2p} x^{2p} + \dots \\ \varphi''(x) &= 2a_2 + \dots + 2p(2p-1)a_{2p} x^{2p-2} + \dots \end{aligned}$$

En exprimant que les sommes de ces deux séries sont opposées, nous obtenons

$$\left. \begin{array}{l} 2.1 a_2 = -1 \dots \\ 4.3 a_4 = -a_2 \\ \dots \dots \dots \\ 2p(2p-1)a_{2p} = -a_{2p-2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_2 = -\frac{1}{1.2} \\ a_4 = -\frac{1}{1.2.3.4} \\ \dots \dots \dots \\ a_{2p} = \frac{(-1)^p}{1.2 \dots 2p} \end{array} \right.$$

La série entière

$$\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \dots$$

est convergente quel que soit x ; et comme $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, nécessairement $\varphi(x) = \cos x$.

Le développement de $\sin x$ s'obtiendrait de même à partir de

$$\psi(x) = x + a_3 x^3 + \dots + a_{2p+1} x^{2p+1} + \dots$$

puisque la fonction $\sin x$ est la seule des intégrales de (E) qui, pour $x = 0$, prend la valeur 0, tandis que sa dérivée prend la valeur 1.

255. Équation différentielle d'une famille de courbes planes dépendant de deux paramètres. — 1° Considérons d'abord les courbes $C_{\lambda, \mu}$ qui représentent une famille de fonctions de x

$$y = f(x, \lambda, \mu) \quad (1)$$

dépendant des deux paramètres λ et μ

$$(2) \quad y' = f'_x(x, \lambda, \mu) \quad y'' = f''_{x^2}(x, \lambda, \mu) \quad (3)$$

Pour une valeur donnée de x , on ne peut choisir arbitrairement y, y', y'' puisque les relations (1), (2), (3) doivent être compatibles en λ et μ . Exprimons donc qu'il existe un couple (λ, μ) vérifiant à la fois (1), (2), (3) pour x, y, y', y'' donnés; nous obtenons une relation

$$(4) \quad F(x, y, y', y'') = 0$$

liant ces quatre variables. L'équation (4) est une équation différentielle du second ordre dont les courbes $C_{\lambda, \mu}$ sont des courbes intégrales.

EXEMPLE. — Si l'on donne la famille des courbes représentatives des fonctions

$$\begin{aligned} y &= \lambda \varphi(x) + \mu \psi(x) + \theta(x), \\ y' &= \lambda \varphi'(x) + \mu \psi'(x) + \theta'(x), \\ y'' &= \lambda \varphi''(x) + \mu \psi''(x) + \theta''(x), \end{aligned}$$

d'où l'équation différentielle de cette famille

$$\begin{vmatrix} y - \theta(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ y' - \theta'(x) & \varphi'(x) & \psi'(x) \\ y'' - \theta''(x) & \varphi''(x) & \psi''(x) \end{vmatrix} = 0;$$

c'est une équation linéaire du second ordre. L'étude antérieurement faite (249, 3^e) permet d'affirmer que cette équation différentielle n'admet pas d'autres intégrales que les fonctions initialement données.

2^o Plus généralement, si la famille $C_{\mu, \lambda}$ est définie par

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0,$$

on élimine λ et μ entre l'équation précédente et les équations

$$\begin{aligned} f'_x + f'_y \cdot y' &= 0 \\ f''_{x^2} + 2 y' f''_{xy} + y'^2 f''_{y^2} + y'' f'_y &= 0. \end{aligned}$$

EXERCICES

1. — Intégrer les équations différentielles

$$yy'' = y'^2 - y^3; \quad y'' - y'^2 + yy'^3 = 0; \quad 2yy'' + y''^2 - y'^2 = 0; \quad y'^4 + y'^2 - 2yy'' = 0; \\ y^3y'' + y^4 - a^4 = 0; \quad y'' \cos y + 2y' \sin y + \sin y \cos^2 y = 0; \quad 2yy'' = y'^2(1 + y'^2);$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d^2y}{dx^2}; \quad \frac{d^2x}{dy^2} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^2x}{dy^2} \times \frac{d^2y}{dx^2} = 1;$$

$$y'' + 4y' + 5y = \operatorname{ch} 2x \cos x; \quad y'' - 6y' + 9y = \operatorname{sh}^3 x; \quad y'' - 3y' + 2y = x \operatorname{ch} x;$$

$$y'' - 2y' + 2y = x \cos x \operatorname{ch} x; \quad y'' + y = \cos^3 x;$$

$$y'' - 2y' + y = x^2 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x; \quad y'' - y + 1 = e^x$$

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}; \quad y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

2. — Étude de l'équation, dite d'Euler,

$$(E) \quad ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

où a, b, c sont des constantes données.

1^{re} Méthode : transformer (E) en une équation linéaire à coefficients constants par le changement de variable $t = \text{Log} |x|$.

2^e Méthode : chercher si (E) admet des intégrales particulières de la forme x^r , où r est une constante.

Application. Intégrer

$$\begin{aligned} x^2 y'' + 4xy' + 2y &= \text{Log}(1+x); & x^2 y'' + 3xy' + y &= 1+x^2 \\ x^2 y'' + xy' + y &= \cos(x \text{ Log } x); & x^2 y'' - 2xy' + 2y &= 2+2x^3 \sin 2x. \end{aligned}$$

3. — Intégrer l'équation d'Euler

$$x^2 y'' + xy' + y = 0.$$

Vérifier que les tangentes à une courbe intégrale aux points sur Ox passent par l'un ou l'autre de deux points fixes. En appelant a_n l'aire algébrique du n° arceau d'une courbe intégrale, étudier la série qui a pour terme général $\frac{1}{a_n}$.

4. — a) Soit l'équation différentielle (dans laquelle a est une constante donnée)

$$(E) \quad (1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0.$$

Former les séries entières dont les sommes satisfont à cette équation; quel est leur intervalle de convergence? Pour quelles valeurs de la constante a l'équation (E) admet-elle, parmi ses intégrales, des polynômes?

b) Trouver les changements de variables $x = \varphi(t)$ qui transforment l'équation (E) en une équation ne contenant pas $\frac{dy}{dt}$; utiliser un tel changement de variable pour former l'intégrale générale de l'équation (E).

c) Traiter les questions analogues pour l'équation

$$(1+x^2)y'' + xy' - a^2y = 0.$$

d) Appliquer la méthode indiquée en b) à l'intégration de :

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + a^2y = 0; \quad (1-x^2)^2 y'' - 2x(1-x^2)y' - a^2y = 0.$$

5. — On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + p(x).y' + q(x).y = 0.$$

Quelle relation doit lier les fonctions p et q pour que (E) admette deux intégrales u et v telles que :

$$a) \quad u^2 + v^2 = 1; \quad b) \quad uv = 1; \quad c) \quad u = xv; \quad d) \quad v = u^2; \quad e) \quad v = \text{Log } u.$$

Appliquer respectivement b) et c) à l'intégration de :

$$(1 - \cos 4x)y'' + 2y' \sin 4x - 8y = 0; \quad y'' + y' \text{tg } x + \frac{y}{4}(2 + 3 \text{tg}^2 x) = 0.$$

6. — On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + p(x).y' + q(x).y = 0.$$

Quelle relation doit lier les fonctions p et q pour qu'il existe un changement de variable $t = \varphi(x)$ qui transforme (E) en une équation linéaire à coefficients constants. En particulier, trouver $q(x)$ sachant que $p(x) = \frac{2}{x}$; achever dans ce cas l'intégration.

7. — Trouver quelle relation doivent vérifier les fonctions p , q , p_1 et q_1 pour que les équations

$$y'' + py' + qy = 0; \quad y'' + p_1y' + q_1y = 0$$

aient une intégrale commune.

8. — Former l'équation différentielle du second ordre (E), linéaire, à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $(r - 3)^2 = 0$ et dont une intégrale particulière est $u = (3x + 1)e^x$. Intégrer (E).

*9. — Développer pour les équations différentielles linéaires d'ordre n :

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y = B$$

une théorie analogue à celle qui a été faite pour les équations linéaires du second ordre, et examiner le cas où $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont des constantes

Intégrer les équations différentielles

$$y'' - y = xe^x; \quad y'' - 6y' + 21y - 26y = e^{2x} \cos 3x; \quad y^{(4)} + y = 0; \quad y^{(4)} - y = 0.$$

10. — Trouver tous les cas où l'équation différentielle

$$(a_1 x^2 + b_1 x + c_1) y'' + (a_2 x^2 + b_2 x + c_2) y' + (a_3 x^2 + b_3 x + c_3) y = 0$$

admet une solution polynôme.

$$11. \text{ — Intégrer (E)} \quad 4xy'' + 2y' - y = 0$$

en cherchant, pour commencer, une intégrale particulière sous la forme d'une série entière (que l'on sommerait).

Même question pour

$$x(x^2 + 1)y'' - 2(x^2 + 1)y' + 2xy = 0; \quad (x^2 + 1)y'' - (2x - 1)xy' + n^2 y = 0 \quad (n \text{ naturel}).$$

12. — Trouver les fonctions développables en série entière qui vérifient l'équation

$$(E) \quad xy'' - y' + 4x^2 y = 0.$$

Intégrer l'équation (E) en utilisant le changement de variable $x^2 = t$. Représenter graphiquement celle des intégrales qui prend la valeur 1 pour $x = 0$ et la valeur 2 pour $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

13. — Trouver les fonctions f telles que, quels que soient x et y ,

$$f(x + y) \cdot f(x - y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2.$$

14. — Trouver les fonctions f telles que, quel que soit x ,

$$f'(x) = kf(\lambda - x),$$

k et λ désignant des constantes convenablement choisies.

15. — Trouver les fonctions f pour lesquelles le nombre θ qui figure dans la formule des accroissements finis

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$$

est indépendant de x . Même question pour la formule de Taylor

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h).$$

(On pourra poser $\theta h = y$ et exprimer que y ne dépend pas de x .)

16. — Former l'équation différentielle des cercles du plan, des paraboles du plan, des coniques du plan, des hyperboles du plan dont les asymptotes sont parallèles aux axes des coordonnées.

$$17. \text{ — Intégrer} \quad yy''(x^2 + y^2) + (y - xy')^2 = 0.$$

(On pourra introduire des coordonnées polaires.)

$$18. \text{ — Intégrer : (E)} \quad (y - xy')^2 + x^2 yy'' = 0,$$

en se ramenant à une équation de Riccati, par rapport à $z = \frac{y'}{y}$.

19. — Soit B l'opérateur différentiel qui transforme toute fonction réelle, dérivable, $y(x)$, en

$$By = xy + \frac{dy}{dx}.$$

On pose $B^2y = B(By) \dots$

a) En désignant par $v(x)$ la solution de l'équation différentielle $By = 0$ qui vérifie $v(0) = 1$, montrer que, si on pose $y = zv$, on a

$$B^n y = z^{(n)} v.$$

b) Utiliser la forme explicite de B^2y pour intégrer l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0.$$

20. $u(x)$ étant une fonction dérivable donnée, on considère l'opérateur différentiel B qui transforme toute fonction dérivable $y(x)$ en

$$By = uy + y'.$$

a) En désignant par $v(x)$ une solution quelconque de $By = 0$, montrer que, si on pose $y = zv$, on a

$$By = z'v \quad \text{et} \quad B^2y = z''v.$$

b) Ramener l'intégration de

$$y'' + (u' - u^2)y = 0$$

à des quadratures.

21. — Intégrer les systèmes différentiels

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ \frac{dy}{dt} = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ \frac{dx}{dt} = 4x - 3y + 9z \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 4y - 9z \\ \frac{dz}{dt} = -3x + 3y - 8z \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 4x + 6y = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - 2x + 4y = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\frac{dy}{dx} = 6y - 3z + 2e^x \\ \frac{dz}{dx} = 4y - 2z - e^{2x} \\ \frac{dx}{dt} = qz - ry \\ \frac{dy}{dt} = rx - pz \quad (p, q, r \text{ constantes}) \\ \frac{dz}{dt} = py - qx \\ \frac{d^2x}{dt^2} = 23x + 18y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -36x - 28y \end{array} \right.$$

*22. — Transformation de Legendre. Étant donné une équation différentielle (e), on transforme les courbes intégrales γ de (e) par polaires réciproques par rapport à la parabole qui a pour équation $x^2 - 2y = 0$. On obtient ainsi des courbes Γ et on désigne par (E) l'équation différentielle vérifiée par ces courbes. On associe (e) et (E). Montrer que :

$$(e) \quad f(x, y, y') \quad \longleftrightarrow \quad f(Y', XY' - Y, X) = 0 \quad (E)$$

$$(e) \quad f(x, y, y', y'') \quad \longleftrightarrow \quad f\left(Y', XY' - Y, X, \frac{1}{Y''}\right) = 0 \quad (E)$$

Appliquer cette transformation à l'intégration de

$$(e) \quad 2y'^2(xy' - y) - y''(1 + y^2) = 0.$$

(On constatera que les courbes Γ sont des coniques, que l'on pourra représenter à l'aide du paramètre $XY' - Y$; des Γ on déduira les γ .)

CHAPITRE XX

CALCUL NUMÉRIQUE

I. ERREURS

Dans ce chapitre il ne sera question que de nombres réels et de fonctions réelles de la variable réelle; nous supposons que ces fonctions sont pourvues de dérivées successives.

Par abus de langage, nous appellerons majorant d'une erreur tout majorant de la valeur absolue de cette erreur.

256. Erreur absolue et erreur relative. — 1° **Erreur absolue.** —

DÉFINITION. — L'erreur absolue commise sur le nombre x quand on lui substitue une valeur approchée $\bar{x}$ est la différence $\Delta x = x - \bar{x}$.

Dans la pratique on connaît $\bar{x}$ et, non pas l'erreur, mais seulement un majorant ϵ de cette erreur, autrement dit on est en mesure d'affirmer que x satisfait à la double inégalité

$$\bar{x} - \epsilon < x < \bar{x} + \epsilon.$$

On exprime cet encadrement en disant que $\bar{x}$ est une valeur approchée de x avec une erreur inférieure à ϵ , ou avec une incertitude égale à ϵ .

Dire que $\bar{x}$ est une valeur approchée par défaut de x , l'erreur étant inférieure à ϵ , c'est dire que x satisfait à la double inégalité : $\bar{x} < x < \bar{x} + \epsilon$.

Dire que $\bar{x}$ est une valeur approchée par excès de x , l'erreur étant inférieure à ϵ , c'est dire que x satisfait à la double inégalité : $\bar{x} - \epsilon < x < \bar{x}$.

2° **Erreur relative.** — DÉFINITION. — L'erreur relative commise sur le nombre x quand on lui substitue une valeur approchée $\bar{x}$ est le quotient $\frac{\Delta x}{x} = \frac{x - \bar{x}}{x}$ de l'erreur absolue Δx par la valeur exacte x .

De l'encadrement

$$0 < |\bar{x}| - \epsilon < |x| < |\bar{x}| + \epsilon$$

ou déduit $\frac{|\Delta x|}{|x|} < \frac{\epsilon}{|\bar{x}| - \epsilon}$; il en résulte que $\frac{\epsilon}{|\bar{x}| - \epsilon}$ est un majorant de l'erreur relative.

REMARQUE : $\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x}{\bar{x}} = \Delta x \times \frac{\bar{x} - x}{x\bar{x}} = -\frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\bar{x}}$, ce qui montre que pour $\left| \frac{\Delta x}{x} \right|$ voisin de 10^{-n} (n entier naturel), $\left| \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right|$ est voisin de 10^{-2n} . Comme il est manifeste que l'erreur relative n'a d'intérêt que si $|\Delta x|$ est petit par rapport à $|x|$, on peut, dans la pratique, substituer à l'erreur relative $\frac{\Delta x}{x}$ la valeur approchée $\frac{\Delta x}{\bar{x}}$ de cette erreur.

257. Premier problème de la théorie des erreurs. — Les données d'un calcul étant entachées d'erreurs dont on connaît des majorants, trouver un majorant de l'erreur que l'on commet sur le résultat en remplaçant les données par leurs valeurs approchées.

1° Erreur systématique et erreur due au calcul. f étant une fonction donnée (de trois variables pour fixer les idées), et $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ étant des valeurs approchées des nombres x, y, z , quand nous prenons $\bar{\omega} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pour valeur approchée du nombre $\omega = f(x, y, z)$ nous commettons une erreur, dite *erreur systématique*, $e_1 = \omega - \bar{\omega}$.

Pour diverses raisons (utilisation de tables forcément imparfaites, suppression de décimales en cours de calcul, ...) il arrive souvent que l'on ne sache pas calculer exactement $\bar{\omega}$ et que l'on doive se contenter d'une valeur approchée ω^* de ce nombre. La différence $e_2 = \bar{\omega} - \omega^*$ est dite *erreur due au calcul*.

L'erreur totale commise en substituant ω^* à ω s'écrit

$$e = (\omega - \bar{\omega}) + (\bar{\omega} - \omega^*) = e_1 + e_2.$$

On en déduit : $|e| \leq |e_1| + |e_2|$. Si nous savons calculer un majorant α_1 de $|e_1|$ et un majorant α_2 de $|e_2|$, nous pouvons affirmer que $\alpha_1 + \alpha_2$ est un majorant de $|e|$.

Il n'existe pas de méthode générale pour majorer l'erreur due au calcul : en revanche nous allons montrer que la formule des accroissements finis permet de majorer l'erreur systématique.

2° Erreur systématique sur le calcul du nombre $\omega = f(x)$. — a) La formule des accroissements finis, appliquée à la fonction f sur $[x, \bar{x}]$, donne

$$f(x) - f(\bar{x}) = (x - \bar{x})f'(\xi); \quad \xi \in]x, \bar{x}[$$

$$\text{et} \quad |\omega - \bar{\omega}| = |x - \bar{x}| |f'(\xi)|.$$

On en déduit que l'on obtient un majorant ε_ω de $|\omega - \bar{\omega}|$ en multipliant un majorant ε_x de $|x - \bar{x}|$ par un majorant de $|f'(\xi)|$; d'où la formule

$$(1) \quad \varepsilon_\omega = A \varepsilon_x,$$

dans laquelle A désigne un majorant de $|f'(x)|$ sur un champ qui contient $]x, \bar{x}[$.

EXEMPLE. — Soit à calculer une valeur approchée de $\sin 31^\circ$. En n'oubliant pas que la dérivée de $\sin x$ est $\frac{\pi}{180} \cos x$ si x est exprimé en degrés, nous avons

$$\sin 31^\circ - \sin 30^\circ = \frac{\pi}{180} \cos \xi; \quad \bar{x} = 30^\circ < \xi < 31^\circ = x.$$

On a $0 < \cos \xi < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il résulte de là que si l'on prend 0,5 comme valeur approchée de $\sin 31^\circ$ on commet une erreur inférieure à $\frac{\pi}{180} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, et *a fortiori* inférieure à 0,016; $\sin 31^\circ$ est compris entre 0,5 et 0,516.

Notons que, dans cet exemple, la différence $\Delta x = x - \bar{x}$ est connue sans erreur.

b) Plus généralement la formule de Taylor montre que, si on prend pour valeur approchée du nombre $f(x) = f(\bar{x} + \Delta x)$ la somme suivante :

$$\overline{f(x)} = f(\bar{x}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(\bar{x}) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(\bar{x}),$$

on commet une erreur qui a pour expression $\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$, $\xi \in]x, \bar{x}[$.

Si on connaît un majorant A de $|f^{(n+1)}(x)|$ sur un champ qui contient $]x, \bar{x}[$, on peut affirmer que la valeur absolue de l'erreur est inférieure à

$$\frac{A |\Delta x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

EXEMPLE. — En substituant à $\sin 31^\circ$ la somme

$$\sin 30^\circ + \frac{\pi}{180} \cos 30^\circ - \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \frac{1}{2!} \sin 30^\circ$$

qui en est une valeur approchée par excès, on commet une erreur qui a pour expression $\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \frac{\cos \xi}{3!}$, ξ étant compris entre 30° et 31° ; cette erreur est inférieure à 10^{-6} comme on s'en assure aisément.

3° Erreur systématique sur le calcul du nombre $\omega = f(x, y, z)$. —

La formule des accroissements finis s'écrit, en désignant par M et $\bar{M}$ les points (x, y, z) et $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$,

$$f(M) - f(\bar{M}) = (x - \bar{x}) f'_x(P) + (y - \bar{y}) f'_y(P) + (z - \bar{z}) f'_z(P),$$

P désignant un point du segment de droite $M\bar{M}$.

On en déduit

$$|\omega - \bar{\omega}| \leq |x - \bar{x}| |f'_x(P)| + |y - \bar{y}| |f'_y(P)| + |z - \bar{z}| |f'_z(P)|$$

ce qui montre que si $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ désignent respectivement des majorants de $|x - \bar{x}|, |y - \bar{y}|, |z - \bar{z}|$ un majorant ε_ω de $|\omega - \bar{\omega}|$ est fourni par la formule

$$(2) \quad \varepsilon_\omega = A \varepsilon_x + B \varepsilon_y + C \varepsilon_z$$

dans laquelle A, B, C désignent respectivement des majorants de $|f'_x(x, y, z)|, |f'_y(x, y, z)|, |f'_z(x, y, z)|$ sur un champ qui contient le segment de droite défini par les points $M(x, y, z)$ et $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Remarque sur l'indépendance des variables. — La formule (2) fournit une majoration de l'erreur commise sur $\omega = f(x, y, z)$ aussi bien si x, y, z sont des variables indépendantes que si ce sont des fonctions d'une même variable t . Montrons que, dans ce dernier cas, on obtient une meilleure majoration de l'erreur (c'est-à-dire un majorant plus petit) en appliquant la formule (1) à $\omega = f[x(t), y(t), z(t)] = g(t)$.

La formule (1) donne en effet, pour majorant de $|\omega - \bar{\omega}|$, le nombre

$$\epsilon'_\omega = \sup |g'(t)| \times \epsilon_t \quad \text{c'est-à-dire} \\ \epsilon'_\omega = \sup |f'_x \times x'(t) + f'_y \times y'(t) + f'_z \times z'(t)| \times \epsilon_t$$

alors que la formule (2) donne, en tenant compte de $\epsilon_x = |x'(t)| \epsilon_t \dots$, un majorant

$$\epsilon''_\omega \geq \sup (|f'_x \times x'(t)| + |f'_y \times y'(t)| + |f'_z \times z'(t)|) \times \epsilon_t.$$

EXEMPLE : $x = t, y = t^2, \omega = x - y, \bar{\omega} = 0,527, \epsilon_t = 10^{-3}$.

La formule (1) donne pour majorant de $|\omega - \bar{\omega}|$

$$\epsilon'_\omega = \sup |1 - 2t| \epsilon_t = (2 \times 0,528 - 1) \epsilon_t < 6 \cdot 10^{-5}.$$

La formule (2) donne pour majorant de $|\omega - \bar{\omega}|$

$$\epsilon''_\omega = \epsilon_t + \sup |2t| \epsilon_t = (1 + 2 \times 0,528) \epsilon_t > 2 \cdot 10^{-3}.$$

4° A partir de fonctions $f(x, y, z)$ convenablement choisies, la formule (2) va nous permettre de majorer les erreurs systématiques commises dans les opérations les plus souvent utilisées.

a) Somme : $\omega = x + y \Rightarrow A = B = 1 \Rightarrow \boxed{\epsilon_\omega = \epsilon_x + \epsilon_y} \quad (3)$

relation qui s'étend de proche en proche au cas de la somme d'un nombre quelconque de termes.

b) Différence : $\omega = x - y \Rightarrow A = B = 1 \Rightarrow \boxed{\epsilon_\omega = \epsilon_x + \epsilon_y} \quad (4)$

Nous retiendrons les formules (3) et (4) sous la forme suivante :

RÈGLE. — On obtient un majorant de l'erreur absolue commise sur une somme ou sur une différence en additionnant des majorants des erreurs absolues commises sur les termes.

c) Produit : $\omega = xy \Rightarrow A = \sup |y|, B = \sup |x|$ et

$$(5) \quad \boxed{\epsilon_\omega = \sup |y| \times \epsilon_x + \sup |x| \times \epsilon_y}$$

Comme $\sup |y| \leq |y| + \epsilon_y$ et $\sup |x| \leq |x| + \epsilon_x$, on commet une erreur au plus égale à $2 \epsilon_x \epsilon_y$, donc négligeable dans la pratique, en écrivant

$$\epsilon_\omega = |y| \times \epsilon_x + |x| \times \epsilon_y.$$

On en déduit, en divisant les deux membres par $|\omega| = |x| \times |y|$, la formule pratique

$$(6) \quad \boxed{\frac{\epsilon_\omega}{|\omega|} = \frac{\epsilon_x}{|x|} + \frac{\epsilon_y}{|y|}}$$

relation qui s'étend de proche en proche au cas du produit d'un nombre quelconque de facteurs.

d) Quotient :

$$\omega = \frac{x}{y} \Rightarrow A = \sup \left| \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{\inf |y|}; \quad B = \sup \left| \frac{x}{y^2} \right| \leq \frac{\sup |x|}{\inf y^2} \quad \text{et}$$

$$(7) \quad \boxed{\varepsilon_{\omega} = \frac{1}{\inf |y|} \times \varepsilon_x + \frac{\sup |x|}{\inf y^2} \times \varepsilon_y}$$

Dans la pratique on commet une erreur négligeable en écrivant

$$\varepsilon_{\omega} = \frac{1}{|y|} \times \varepsilon_x + \frac{|x|}{y^2} \times \varepsilon_y.$$

On en déduit, en divisant les deux membres par $|\omega| = \frac{|x|}{|y|}$, la formule pratique

$$(8) \quad \boxed{\frac{\varepsilon_{\omega}}{|\omega|} = \frac{\varepsilon_x}{|x|} + \frac{\varepsilon_y}{|y|}}$$

Nous retiendrons les formules (6) et (8) sous la forme suivante :

RÈGLE. — Dans la pratique, on obtient un majorant de l'erreur relative commise sur un produit ou sur un quotient en additionnant des majorants des erreurs relatives commises sur les termes.

$$e) \quad \Omega = \text{Log } X \Rightarrow A = \frac{1}{\inf |X|} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\Omega} = \frac{1}{\inf |X|} \times \varepsilon_X.$$

Dans la pratique nous écrirons

$$\boxed{\varepsilon_{\Omega} = \frac{\varepsilon_X}{|X|}} \quad (9)$$

Considérons alors une expression de la forme $\omega = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$, dans laquelle α, β, γ sont des nombres réels, de signes quelconques. Écrivons

$$\text{Log } \omega = \alpha \text{Log } x + \beta \text{Log } y + \gamma \text{Log } z.$$

En appliquant les formules (3) et (9) nous obtenons la formule pratique

$$\left| \frac{\varepsilon_{\omega}}{\omega} \right| = |\alpha| \left| \frac{\varepsilon_x}{x} \right| + |\beta| \left| \frac{\varepsilon_y}{y} \right| + |\gamma| \left| \frac{\varepsilon_z}{z} \right|.$$

EXEMPLE. — Calcul de la période d'un pendule.

La formule utilisée est $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. On donne, en unités M. K. S.,

$$l = 1 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}; \quad g = 9,81 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

En considérant que 6,2832 est une valeur approchée de 2π à 10^{-4} près, nous pouvons considérer que $\bar{T} = \frac{6,2832}{\sqrt{9,81}}$ est une valeur approchée de T, l'erreur relative systématique étant majorée par

$$\frac{10^{-4}}{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{10^{-3}}{1} + \frac{1}{2} \frac{10^{-3}}{9,81} < 2 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-4} + 53 \cdot 10^{-6} = 105 \cdot 10^{-6}.$$

Une table fournit 3,132 09 pour valeur approchée de $\sqrt{9,81}$, l'erreur absolue étant inférieure à $5 \cdot 10^{-6}$.

$T^* = \frac{6,283\ 2}{3,132\ 09}$ est donc une valeur approchée de $\bar{T}$ avec une erreur relative due au calcul inférieure à $\frac{5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{9,81}}$ et *a fortiori* inférieure à $2 \cdot 10^{-6}$. On en déduit que T^* est une valeur

approchée de T avec une erreur relative ρ inférieure à la somme de l'erreur relative systématique et de l'erreur relative due au calcul, c'est-à-dire

$$\rho < 105 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6} < 106 \cdot 10^{-5}.$$

En effectuant la division on trouve $T^* = 2,0060 \dots$. Il en résulte que l'erreur absolue $|T - T^*|$ est inférieure au produit d'un majorant de ρ par un majorant de T , soit

$$106 \cdot 10^{-5} \times 2,007 < 22 \cdot 10^{-4},$$

d'où l'encadrement

$$2,0060 - 22 \cdot 10^{-4} < T < 2,0061 + 22 \cdot 10^{-4}$$

ou

$$2,0038 < T < 2,0083.$$

258. Deuxième problème de la théorie des erreurs. — Avec quelle approximation suffit-il de connaître les données d'un calcul pour en déduire le résultat de ce calcul avec une erreur inférieure à un nombre donné α ?

Reprenons la notation du n° 257, 1°. Nous cherchons des majorants ε_x , ε_y , ε_z de $|x - \bar{x}|$, $|y - \bar{y}|$, $|z - \bar{z}|$ tels que, en calculant une valeur approchée ω^* de $\bar{\omega} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, nous obtenions une valeur approchée de $\omega = f(x, y, z)$ avec une erreur inférieure à α .

1° De l'erreur tolérée α , faisons deux parts. L'une α_2 est consacrée à l'erreur due au calcul $|\bar{\omega} - \omega^*|$, l'autre α_1 est consacrée à l'erreur systématique $|\omega - \bar{\omega}|$ qui, rappelons-le, vérifie

$$|\omega - \bar{\omega}| \leq A \varepsilon_x + B \varepsilon_y + C \varepsilon_z.$$

2° Calculons un majorant A de $|f'_x(x, y, z)|$, assez largement pour qu'il convienne sur le segment de droite défini par les deux points (x, y, z) et $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, bien que ce segment ne soit connu que d'une manière approximative. Calculons de même des majorants B et C de $|f'_y(x, y, z)|$ et de $|f'_z(x, y, z)|$.

3° A , B , C et α_1 étant connus, il nous reste à choisir trois nombres positifs ε_x , ε_y , ε_z vérifiant la condition $A \varepsilon_x + B \varepsilon_y + C \varepsilon_z \leq \alpha_1$.

REMARQUE. — Il n'est pas nécessaire que les deux parts α_1 et α_2 de α soient égales. Si $\bar{\omega} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ peut être calculé exactement, on prendra $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_2 = 0$. Au contraire, si x , y , z peuvent être obtenus avec une grande précision, mais si le calcul de $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est laborieux, on pourra être conduit à prendre, par exemple, $\alpha_1 = \frac{\alpha}{10}$ et $\alpha_2 = \frac{9\alpha}{10}$.

EXEMPLE. — Avec quelle approximation suffit-il de connaître les nombres $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3}$ et $z = \pi$ pour calculer le nombre $\omega = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\pi}$ avec une erreur inférieure à 10^{-4} ?

Ici $f(x, y, z) = \frac{x-y}{z}$; $f'_x = \frac{1}{z}$; $f'_y = -\frac{1}{z}$; $f'_z = \frac{x-y}{z^2}$. On en déduit

$$A = B = \frac{1}{\inf |z|}; \quad C = \frac{\sup |x-y|}{\inf z^2}.$$

Comme $\pi > 3$, nous pouvons prendre $A = B = \frac{1}{3}$.

Comme $\sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,4$ (ce qui résulte de $\sqrt{3} < 1,8$ et $\sqrt{2} > 1,4$) nous pouvons prendre $C = \frac{0,4}{9}$.

L'erreur systématique est donc inférieure à

$$\frac{1}{3} \varepsilon_x + \frac{1}{3} \varepsilon_y + \frac{0,4}{9} \varepsilon_z \quad \text{et a fortiori à} \quad 0,4 \varepsilon_x + 0,4 \varepsilon_y + 0,05 \varepsilon_z.$$

De l'erreur tolérée $\alpha = 10^{-4}$ nous ferons deux parts égales. Autrement dit nous choisissons $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ de façon que

$$0,4 (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 0,05 \varepsilon_z < 5 \cdot 10^{-5}$$

et nous ferons la division avec une erreur inférieure à $5 \cdot 10^{-5}$.

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 5 \cdot 10^{-5}$ conviennent visiblement. Autrement dit, nous pouvons utiliser les valeurs approchées $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ de $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \pi$ données par une table à quatre décimales, soit

$$\bar{x} = 1,7321; \quad \bar{y} = 1,4142; \quad \bar{z} = 3,1416.$$

$$\text{Calculons} \quad \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\bar{z}} = \frac{0,3179}{3,1416} = 0,10119 \dots$$

Le nombre $\omega^* = 0,1012$ est une valeur approchée du nombre $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\pi}$ avec une erreur inférieure à 10^{-4} .

II. USAGE DES TABLES DE VALEURS NUMÉRIQUES

259. Approximation décimale d'un nombre positif. -- 1^o **Principe de l'écriture des nombres.** — On ne doit utiliser ni le point, ni la virgule, pour marquer la séparation en tranches d'un nombre contenant un assez grand nombre de chiffres. Cette séparation doit être marquée par un espace blanc de largeur inférieure ou égale à celle d'un chiffre courant.

On sépare de cette manière les nombres en tranches de trois chiffres, tant pour la partie entière que pour la partie décimale; cependant cette séparation n'est pas nécessaire si le nombre ne comporte pas plus de quatre chiffres à gauche de la virgule, et pas plus de quatre chiffres à droite.

2^o Approximation décimale d'un nombre positif. — Rappelons qu'étant donné un entier naturel n et un nombre positif A , il existe un entier positif ou nul p et un seul tel que

$$p \cdot 10^{-n} \leq A < (p + 1) \cdot 10^{-n}.$$

On dit que $p \cdot 10^{-n}$ est la valeur approchée par défaut de A à 10^{-n} près, et que $(p + 1) \cdot 10^{-n}$ est la valeur approchée par excès de A , à 10^{-n} près.

EXEMPLE : 3,141 et 3,142 sont les valeurs approchées de π , par défaut et par excès, à 10^{-3} près.

3° Valeur approchée avec un nombre donné de décimales. — Étant donné un entier naturel n et un nombre positif A , on appelle *valeur approchée de A avec n décimales* le nombre $\bar{A}$ ainsi obtenu :

- a) on calcule, à $10^{-(n+1)}$ près, la valeur approchée par défaut de A .
- b) si la $(n + 1)$ -ième décimale de A est 0, 1, 2, 3 ou 4 on la supprime; si cette $(n + 1)$ -ième décimale est 5, 6, 7, 8 ou 9 on la supprime et on *force* la n -ième décimale, autrement dit on majore d'une unité cette n -ième décimale s'il ne s'agit pas d'un 9, on la remplace par 0 en forçant la décimale précédente s'il s'agit d'un 9.

REMARQUE. — A' et A'' étant les valeurs approchées de A , à 10^{-n} près, respectivement par défaut ou par excès, deux cas peuvent se présenter :

1^{er} Cas : On a $0 \leq A - A' < 5 \cdot 10^{-(n+1)}$; il en résulte $\bar{A} = A'$.

2^e Cas : On a $5 \cdot 10^{-(n+1)} \leq A - A' < 10^{-n}$; il en résulte $\bar{A} = A''$.

Dans les deux cas, on constate $|A - \bar{A}| \leq 5 \cdot 10^{-(n+1)}$.

260. Tables des valeurs numériques d'une fonction. — 1^o Principe.

— Soit f une fonction continue et monotone. On appelle *table à n décimales* de cette fonction l'ensemble de deux colonnes de nombres. La colonne de gauche est constituée en général par les termes d'une progression arithmétique; à chacun de ces nombres, α , la colonne de droite associe la valeur approchée avec n décimales, $\alpha = \bar{f}(\alpha)$, du nombre $f(\alpha)$.

EXEMPLE. — On lit dans une table à quatre décimales de la fonction sinus hyperbolique

x	$\text{sh } x$
....	
1,23	1,5645
....	

Cela signifie que l'on dispose de l'encadrement :

$$1,564\,45 < \text{sh } 1,23 < 1,564\,55.$$

On appelle *pas* de la table la raison de la progression arithmétique de la colonne de gauche et *étendue* de la table le segment défini par les termes extrêmes de cette progression.

2^o Double entrée de la table. — La fonction f étant continue et monotone, elle admet une fonction inverse, que nous noterons φ . A chacun des nombres, α , de la colonne de droite de la table, la colonne de gauche associe une valeur approchée $\alpha = \bar{\varphi}(\alpha)$ du nombre $\varphi(\alpha)$.

Montrons que la formule des accroissements finis permet de trouver un majorant de l'erreur $\varphi(\alpha) - \alpha$. En appliquant cette formule à la fonction f sur $[\alpha, \varphi(\alpha)]$, nous avons en effet :

$$f(\alpha) - f[\varphi(\alpha)] = [\alpha - \varphi(\alpha)] \cdot f'(c); \quad c \in]\alpha, \varphi(\alpha)[.$$

Or $f[\varphi(\alpha)] = \alpha$ et, d'autre part, d'après la construction de la table

$$|f(a) - \alpha| < 5 \cdot 10^{-(n+1)}.$$

On en déduit

$$|\varphi(\alpha) - a| < \frac{5 \cdot 10^{-(n+1)}}{\inf |f'(x)|},$$

la borne inférieure s'appliquant à $]\alpha, \varphi(\alpha)[$ et, dans la pratique, à tout segment dont on est assuré qu'il contient l'intervalle précédent.

EXEMPLE. — La table de la fonction $f = \text{sh}$ est aussi une table de la fonction $\varphi = \text{Arg sh}$. On a le schéma :

x	$\text{sh } x$
....	
1,23	1,5645
....	
$\text{Arg sh } y$	y

Considérons le couple

$$\alpha = \overline{\varphi(\alpha)} = 1,23; \quad \alpha = \overline{f(a)} = 1,5645.$$

On a ici $f'(x) = \text{ch } x$. En utilisant une table de la fonction ch , on constate $\text{ch } 1,20 > 1,5$, ce qui nous autorise à minorer $\inf |f'(x)|$ par 1,5. Il en résulte que 1,23 est une valeur approchée de $\text{Arg sh } 1,5645$ avec une erreur inférieure à $\frac{5}{1,5} \cdot 10^{-5}$, et *a fortiori* inférieure à $4 \cdot 10^{-5}$.

REMARQUE. — Soit à calculer le cube du nombre 3,947 quand on connaît, pour tout entier $n \in [1, 100]$, d'une part n^3 , d'autre part $\sqrt[3]{n}$. On peut utiliser :

n	n^3	ou	n	$\sqrt[3]{n}$
39	59 319		61	3,936 50
40	64 000		62	3,957 89

La table $n \rightarrow n^3$ donne : $59,319 < (3,947)^3 < 64$

La table $n \rightarrow \sqrt[3]{n}$ donne : $61 < (3,947)^3 < 62$.

Le deuxième encadrement est meilleur que le premier. Cet exemple montre tout le parti que l'on peut tirer de la double entrée des tables.

261. Interpolation linéaire théorique. — 1° **Principe d'une interpolation linéaire.** — Reportons-nous à la figure 90 sur laquelle est tracé le graphe (Γ) de la fonction $y = f(x)$. Désignons par A, B et M les points de (Γ) dont les abscisses sont a , b et $\overline{OM'} = x$, avec $a < x < b$.

Substituer à la valeur exacte $\overline{MM'} = f(x)$, que l'on obtiendrait en utilisant l'arc AB de (Γ) , la valeur approchée

$$\overline{MP} = g(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a} [f(b) - f(a)],$$

obtenue en utilisant le segment de droite AB, c'est faire une *interpolation linéaire*.

2° Erreur systématique due à l'interpolation. — Posons

$$\psi(x) = f(x) - g(x) = \overline{PM}.$$

Il s'agit de trouver un majorant de $|\psi(x)|$, valable pour toute valeur de x comprise entre a et b .

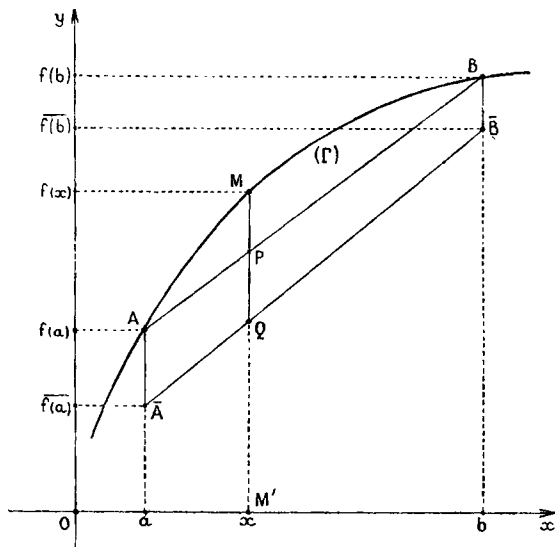


FIG. 90.

Nous supposons que la fonction f est continue sur $[a, b]$ et y admet une dérivée seconde. La fonction ψ possède alors ces mêmes propriétés et on a $\psi''(x) = f''(x)$; de plus $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

La fonction ψ admet sur $[a, b]$ des bornes L et l ; ces bornes sont atteintes. Soit c le point de $[a, b]$ en lequel $\psi(x)$ prend pour valeur le plus grand des deux nombres L et l ; nous pouvons affirmer que le maximum de $|\psi(x)|$ sur $[a, b]$ est $|\psi(c)|$. D'après la démonstration du théorème de Rolle, nous avons $\psi'(c) = 0$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas $c - a \leq b - c$ et appliquons la formule de Taylor à la fonction ψ sur $[a, c]$:

$$\psi(a) = \psi(c) + (a - c) \psi'(c) + \frac{1}{2} (a - c)^2 \psi''(d); \quad d \in]a, c[.$$

En tenant compte de $\psi(a) = 0$, de $\psi'(c) = 0$ et de $\psi''(d) = f''(d)$ nous avons

$$\psi(c) = -\frac{1}{2} (a - c)^2 f''(d).$$

Enfin, puisque $(a - c)^2 \leq \frac{1}{4} (b - a)^2$, nous obtenons la majoration valable sur $[a, b]$

(1)

$$\sup |\psi(x)| \leq \frac{1}{8} (b - a)^2 \sup |f''(x)|$$

Dans le cas $c - a > b - c$, nous aurions obtenu le même résultat en appliquant la formule de Taylor à la fonction ψ sur $[c, b]$.

REMARQUE. — On ne peut trouver de majorant valable pour toute fonction meilleur que celui qui est donné par la formule (1), car ce majorant est atteint dans le cas de

$$f(x) = (x - a)(b - x).$$

En effet $f''(x) = -2$; $\psi(x) = f(x)$; $\sup |\psi(x)| = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{4}(b-a)^2$.

Nous constatons que, pour cette fonction,

$$\sup |\psi(x)| = \frac{1}{8}(b-a)^2 \sup |f''(x)|.$$

262. Interpolation linéaire au moyen d'une table à n décimales de la fonction $y = f(x)$. — 1° **Premier problème.** — x étant un nombre donné, calculer une valeur approchée de $f(x)$.

Soit $a < x < b$, a et b étant deux termes consécutifs de la colonne de gauche de la table. Au graphe (Γ) de la fonction $y = f(x)$ adjoignons (fig. 90) le segment de droite $\overline{A\bar{B}}$ dont les extrémités ont pour coordonnées $(a, \overline{f(a)})$ et $(b, \overline{f(b)})$, $\overline{f(a)}$ et $\overline{f(b)}$ désignant les valeurs approchées de $f(a)$ et $f(b)$ données par la table.

A la valeur exacte $\overline{M'M} = f(x)$, substituons la valeur approchée

$$\overline{f(x)} = \overline{M'Q} = \overline{f(a)} + \frac{x-a}{b-a} [\overline{f(b)} - \overline{f(a)}]$$

obtenue en substituant le segment de droite $\overline{A\bar{B}}$ à l'arc AB de (Γ) dont les extrémités ont pour abscisses a et b .

Nous écrirons
$$\overline{f(x)} = \overline{f(a)} + h D$$

en posant d'une part $h = \frac{x-a}{b-a}$, ce qui entraîne $h \in]0,1[$, et d'autre part $D = \overline{f(b)} - \overline{f(a)}$; le nombre D est dit *différence tabulaire* relative à l'intervalle (a, b) ; dans certaines tables on obtient par lecture directe le produit de D par 10^n .

Majoration de l'erreur. On a (fig. 90)

$$|\overline{f(x)} - f(x)| = QM \leq QP + PM.$$

En considérant que P et Q sont des points du trapèze (éventuellement croisé) $A\bar{A}B\bar{B}$ nous avons

$$QP \leq \sup [\bar{A}\bar{A}, \bar{B}\bar{B}]$$

QP admet donc pour majorant le nombre $e = 5,10^{-(n+1)}$ qui majore $\bar{A}\bar{A}$ et $\bar{B}\bar{B}$. Par ailleurs nous avons montré (261) que PM est majoré par

$$e' = \frac{1}{8}(b-a)^2 \sup |f''(x)|.$$

L'erreur $\overline{f(x)} - f(x)$ est ainsi majorée par la somme $e + e'$.

Dans la pratique le nombre n des décimales de la table a été en général choisi de façon que, quel que soit l'intervalle (a, b) que l'on considère, dans toute l'étendue de la table, l'erreur e' due à l'interpolation linéaire est négligeable devant l'erreur e due à l'imperfection de la table (ce qui signifie que

le quotient $\frac{e'}{e}$ est de l'ordre de 10^{-2} , ou inférieur à 10^{-2}).

On peut donc écrire, en résumé,

$$\overline{f(x)} = \overline{f(a)} + hD; \quad h = \frac{x-a}{b-a}; \quad D = \overline{f(b)} - \overline{f(a)}$$

$$\overline{f(x)} - f(x) \leq 5 \cdot 10^{-(n+1)}.$$

Autrement dit, que l'on obtienne $\overline{f(x)}$ par lecture directe ou par interpolation (selon que x figure ou non dans la colonne de gauche de la table), l'erreur absolue est inférieure à $5 \cdot 10^{-(n+1)}$; il est bien entendu que l'on tiendra éven-

tuellement compte de l'erreur de calcul qu'entraîne le remplacement de hD par une valeur approchée.

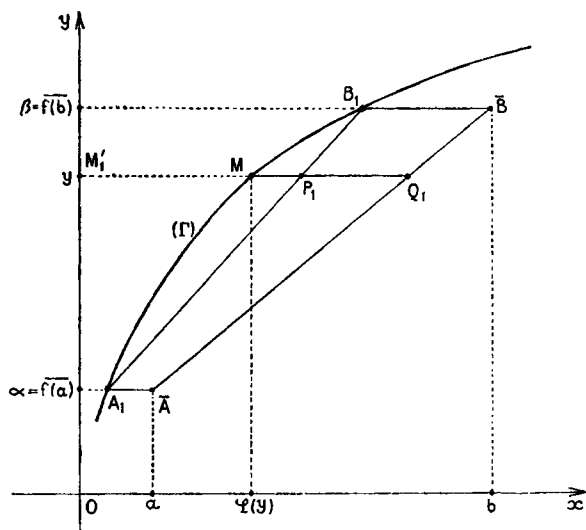


FIG. 91.

tion $y = f(x)$, qui est aussi celui de la fonction inverse $x = \varphi(y)$, et le segment de droite $\overline{AB}$ dont les extrémités ont pour coordonnées $(a, \overline{f(a)})$ et $(b, \overline{f(b)})$, ou encore $(\varphi(\alpha), \alpha)$ et $(\varphi(\beta), \beta)$.

A la valeur exacte $\overline{M_1M} = \varphi(y)$, substituons la valeur approchée

$$\overline{\varphi(y)} = \overline{M_1Q_1} = \overline{\varphi(\alpha)} + \frac{y-\alpha}{\beta-\alpha} [\overline{\varphi(\beta)} - \overline{\varphi(\alpha)}] = \alpha + \frac{y-\overline{f(a)}}{D} (b-a)$$

que l'on obtient en substituant cette fois le segment de droite $\overline{AB}$ (déjà utilisé) à l'arc A_1B_1 du graphe (Γ) dont les extrémités ont pour ordonnées α et β .

Majoration de l'erreur. On a (fig. 91)

$$|\overline{\varphi(y)} - \varphi(y)| = Q_1M \leq Q_1P_1 + P_1M.$$

En considérant que P_1 et Q_1 sont des points du trapèze (éventuellement croisé) $A_1\overline{A} B_1\overline{B}$ nous avons

$$Q_1P_1 \leq \sup [\overline{AA_1}, \overline{BB_1}].$$

2° Deuxième problème. — y étant un nombre donné, calculer une valeur approchée du nombre x défini par $f(x) = y$.

Soit $y \in]\alpha, \beta[$, $\alpha = \overline{f(a)}$ et $\beta = \overline{f(b)}$ étant deux termes consécutifs de la colonne de droite de la table. Reprenons (fig. 91) le graphe (Γ) de la fonction

En utilisant le majorant de $|\overline{\varphi(\alpha)} - \varphi(\alpha)|$ obtenu au n° 260, nous constatons que Q_1P_1 admet pour majorant le nombre $e_1 = \frac{5 \cdot 10^{-(n+1)}}{\inf |f'(x)|}$.

Par ailleurs, en remplaçant la fonction f par la fonction φ dans l'étude de l'interpolation théorique, nous constatons que P_1M est majoré par

$$e'_1 = \frac{1}{8}(\beta - \alpha)^2 \sup |\varphi''(y)|.$$

Montrons que le quotient $\frac{e'_1}{e_1}$ des deux majorants qui interviennent ici est voisin du quotient $\frac{e'}{e}$ des deux majorants que nous avons rencontrés au 1° : en effet nous avons

$$\frac{e'_1}{e_1} : \frac{e'}{e} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{(b - a)^2} \cdot \inf |f'(x)| \cdot \sup |\varphi''(y)| \cdot \frac{1}{\sup |f''(x)|}.$$

Nous pouvons assimiler $|\beta - \alpha|$ à $|f(b) - f(a)|$, la différence entre ces deux nombres étant inférieure à 10^{-n} . Or, d'après la formule des accroissements finis

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c); \quad c \in]a, b[.$$

$$\text{D'autre part :} \quad \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}; \quad \varphi''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

Étant donné que toutes les fonctions qui interviennent sont continues sur des segments, les bornes sont effectivement atteintes et nous avons

$$\frac{e'_1}{e_1} : \frac{e'}{e} = \frac{|f'(c)|^2 \cdot |f'(c_1)|}{|f'(c_2)|^3} \cdot \frac{|f''(c_3)|}{|f''(c_3)|}; \quad c, c_1, c_2, c_3 \in [a, b].$$

Le second membre est voisin de 1 (au moins si on suppose que l'on n'est ni au voisinage d'un point du graphe où la tangente est horizontale, ni au voisinage d'un point d'inflexion).

Retenons de cette étude que, du moment que le nombre n des décimales de la table a été choisi de façon que e' soit négligeable devant e , nous pouvons affirmer que e'_1 est négligeable devant e_1 et écrire, en résumé,

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\varphi(y)} &= a + \frac{k}{D}(b - a); & k &= y - \overline{f(a)}; & D &= \overline{f(b)} - \overline{f(a)} \\ \overline{\varphi(y)} - \varphi(y) &\leq \frac{5 \cdot 10^{-(n+1)}}{\inf |f'(x)|} \end{aligned}}$$

Il est bien entendu que l'on tiendra éventuellement compte de l'erreur due au calcul qu'entraîne le remplacement de $\frac{y - \overline{f(a)}}{D}(b - a)$ par une valeur approchée.

263. Généralités sur les tables de logarithmes décimaux. —
1° Choix du nombre des décimales. — La fonction f est maintenant la fonction « logarithme décimal ». On a :

$$\log x = M \operatorname{Log} x \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{\operatorname{Log} 10} = \log e; \quad 0,434 < M < 0,435.$$

Rappelons que l'intérêt du choix de la base 10 provient de ce que

$$X' = 10^m X \implies \log X' = m + \log X.$$

Nous sommes ainsi conduits à construire une table donnant les logarithmes décimaux approchés des entiers compris entre 10^p et 10^{p+1} , p étant un entier naturel d'autant plus grand que l'on voudra une précision plus grande.

Soit x un nombre compris entre 10^p et 10^{p+1} . On écrit

$$x = a + h; \quad a \text{ entier}; \quad h \in [0,1[$$

(Le nombre b de la théorie générale est ici $b = a + 1$.) On adopte :

$$\overline{\log x} = \overline{\log a} + h D; \quad D = \overline{\log(a+1)} - \overline{\log a}.$$

Il s'agit de savoir quel nombre n de décimales on doit associer à l'entier choisi p pour que (en reprenant la notation du n° 262, 1°)

$$e' = \frac{1}{8}(b-a)^2 \sup |f''(x)| \text{ soit négligeable devant } e = 5 \cdot 10^{-(n+1)}.$$

$$\text{Ici } f(x) = \log x; \quad f'(x) = \frac{M}{x}; \quad f''(x) = -\frac{M}{x^2}; \quad b-a=1.$$

Quel que soit $a \in [10^p, 10^{p+1}[$, nous avons

$$\sup |f''(x)| \leq M \cdot 10^{-2p} < 0,44 \cdot 10^{-2p}.$$

$$\text{Nous en déduisons } e' < 6 \cdot 10^{-(2p+2)} \quad \text{et} \quad \frac{e'}{e} < \frac{6}{5} 10^{-(2p+1-n)}.$$

On adopte dans la pratique $n = 2p - 1$; il en résulte $\frac{e'}{e} < \frac{6}{5} 10^{-2}$, ce qui permet de négliger e' devant e (et par suite de négliger e'_1 devant e_1 dans le problème inverse).

Il existe des tables à 7 décimales, donnant les logarithmes décimaux approchés des entiers compris entre 10^4 et 10^5 ($p = 4$, $n = 7$), mais on utilise surtout les tables à 5 décimales, donnant les logarithmes décimaux approchés des entiers compris entre 10^3 et 10^4 ($p = 3$, $n = 5$).

2° Différences tabulaires dans les tables à 5 décimales. — La dérivée de la fonction $\log x$ est $\frac{M}{x}$. On a donc, par la formule des accroissements finis,

$$\log(a+1) - \log a = \frac{M}{a+\theta}; \quad 0 < \theta < 1; \quad M \simeq 0,434 \, 29.$$

Étant donné $a \in [10^3, 10^4]$, on peut affirmer que $a + \theta \in [10^3, 10^4]$ et

$$4,3 \cdot 10^{-5} < \frac{M}{a + \theta} < 43,5 \cdot 10^{-5}.$$

D'autre part $D = \overline{\log(a + 1)} - \overline{\log a}$ diffère de $\log(a + 1) - \log a$ de moins de 10^{-5} . On a donc

$$3,3 \cdot 10^{-5} < D < 44,5 \cdot 10^{-5},$$

et, comme D est un multiple entier de 10^{-5} ,

$$4 \cdot 10^{-5} \leq D \leq 44 \cdot 10^{-5},$$

ce qu'il est aisé de vérifier dans une table de logarithmes.

264. Usage des tables de logarithmes décimaux à 5 décimales.

— Il s'agit, rappelons-le, de tables donnant pour tout entier $a \in [10^3, 10^4]$ une valeur approchée $\overline{\log a}$ de $\log a$, avec une erreur absolue inférieure à $5 \cdot 10^{-6}$.

1^o Premier problème. — Calcul d'une valeur approchée du logarithme décimal d'un nombre positif donné x .

1^{er} cas : x est compris entre 10^3 et 10^4 . On écrit

$$x = a + h; \quad a \text{ entier}; \quad h \in [0, 1[\quad \text{et on adopte} \\ \overline{\log x} = \overline{\log a} + h D; \quad D = \overline{\log(a + 1)} - \overline{\log a}$$

$\overline{\log a}$ est un nombre dont la partie entière est 3, dont la partie décimale est donnée par la table; D est donné par la table.

L'erreur absolue sur $\log x$ est majorée par $5 \cdot 10^{-6}$, à condition d'utiliser la valeur exacte du produit $h D$. Si on écrit une valeur approchée de $h D$ avec 5 décimales (la dernière étant forcée s'il y a lieu) on risque une erreur supplémentaire de $5 \cdot 10^{-6}$ et on ne dispose que d'une valeur approchée de $\log x$ à 10^{-5} près. *Le plus souvent on écrit $h D$ avec 6 décimales; on obtient ainsi une valeur approchée $\log^* x$ de $\log x$ telle que*

$$|\log^* x - \log x| < 6 \cdot 10^{-6}.$$

EXEMPLE : $x = 2\,603,87$. On écrit, en tenant compte de $D = 17 \cdot 10^{-5}$,

log 2 603	3,415 47
0,8 D	136
0,07 D	11 9
	3,415 617 9

3,415 617 9 est une valeur approchée de $\log x$ à $5 \cdot 10^{-6}$ près.

3,415 618 est une valeur approchée de $\log x$ à $6 \cdot 10^{-6}$ près.

2^e cas : x n'est pas compris entre 10^3 et 10^4 . On peut écrire, d'une façon et d'une seule,

$$x = 10^m x'; \quad m \text{ entier relatif}; \quad x' \in [1, 10[.$$

Il en résulte

$$\log x = m + \log x'; \quad m \text{ entier relatif}; \quad \log x' \in [0, 1[.$$

Les nombres m et $\log x'$ sont respectivement appelés *caractéristique* et *mantisse* de $\log x$. On commence par calculer la caractéristique m . On écrit ensuite

$$\log x = m - 3 + \log x''; \quad x'' = 10^{-m+3}x = 10^3 x'.$$

Le nombre x'' est compris entre 10^3 et 10^4 ; on est ainsi ramené au premier cas.

REMARQUE. — On écrit

$$\begin{array}{lll} \log 0,002 \simeq \bar{3}, 301 \, 03 & \text{au lieu de} & -3 + 0,301 \, 03 \\ \operatorname{colog} x & \text{au lieu de} & -\log x = \log \frac{1}{x}. \end{array}$$

2° Deuxième problème. y étant un nombre donné, calculer une valeur approchée du nombre x défini par $\log x = y$.

1^{er} cas : y est compris entre 3 et 4. La table permet de réaliser, d'une façon et d'une seule, l'encadrement

$$\overline{\log a} \leq y < \overline{\log(a+1)}; \quad a \text{ entier}; \quad a \in [10^3, 10^4[.$$

Une valeur approchée $\bar{x}$ du nombre cherché est donnée par

$$\bar{x} = a + \frac{k}{D}; \quad k = y - \overline{\log a}; \quad D = \overline{\log(a+1)} - \overline{\log a}.$$

Si $\frac{k}{D}$ est calculé exactement, l'erreur absolue $x - \bar{x}$ est majorée par

$$e_1 = \frac{5 \cdot 10^{-(n+1)}}{\inf |f'(x)|}.$$

$$\text{On a } f'(x) = \frac{M}{x} \Rightarrow \inf |f'(x)| > \frac{M}{a+1} \Rightarrow e_1 < \frac{a+1}{M} \times 5 \times 10^{-6}.$$

L'erreur relative $\frac{x - \bar{x}}{x}$ est majorée pratiquement par $\frac{e_1}{a}$. Or

$$\frac{e_1}{a} < \frac{a+1}{a} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{M} < 1,001 \times 2,31 \times 5 \times 10^{-6} < 12 \cdot 10^{-6}.$$

Finalement, x^* étant obtenu en ajoutant à a une valeur approchée de $\frac{k}{D}$, on peut affirmer que

$$|x - x^*| < 12 \cdot 10^{-6} (a+1) + \varepsilon \left(\frac{k}{D} \right),$$

$\varepsilon \left(\frac{k}{D} \right)$ désignant un majorant de l'erreur absolue commise sur $\frac{k}{D}$.

EXEMPLE : Cherchons x tel que $\log x = 3,415\ 62$.

La table donne $\overline{\log 2\ 603} = 3,415\ 47$; $D = 17 \cdot 10^{-4}$.

On calcule $k = 3,415\ 62 - 3,415\ 47 = 15 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \frac{k}{D} = \frac{15}{17} = 0,882\dots$

En adoptant $x^* = 2\ 603,88$

on a $|x - x^*| < 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2\ 604 + 3 \cdot 10^{-3} < 4 \cdot 10^{-2}$.

2^e cas : y n'est pas compris entre 3 et 4. Soit m la caractéristique (connue) de y et $y' \in [0,1[$ la mantisse (connue) de y . On a $y = m + y'$. On pose :

$$y'' = 3 + y' \iff y = y'' + m - 3.$$

y'' est un nombre compris entre 3 et 4; on calcule le nombre x'' défini par $\log x'' = y''$ et on en déduit le nombre cherché x par la relation $x = 10^{m-3} x''$.

3^o **Calcul approché du logarithme népérien d'un nombre donné x .**
— Si on dispose d'une table de la fonction $\text{Log} x$, on utilise la méthode générale qui a été exposée au n^o 262.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où l'on ne dispose que d'une table de logarithmes décimaux, à 5 décimales. Nous avons

$$\text{Log} x = \frac{1}{M} \log x.$$

1^{re} MÉTHODE : On utilise

$$\log |\text{Log} x| = \log \left(\frac{1}{M} \right) + \log |\log x|; \quad \overline{\log \left(\frac{1}{M} \right)} = 0,362\ 22.$$

Le calcul d'erreurs est délicat.

2^e MÉTHODE : La table donne des valeurs approchées à $5 \cdot 10^{-6}$ près de $\frac{\kappa}{M}$ pour $k = 1, 2, \dots, 9$. On peut ainsi effectuer rapidement la multiplication de $\overline{\log x}$ par $\frac{1}{M}$ et obtenir un majorant de l'erreur commise.

EXEMPLE : $x = 2$; $\overline{\log 2} = 0,301\ 03$.

$\frac{1}{M} 0,3$	0,690 776	$5 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{M} 0,001$	0,002 302 6	$5 \cdot 10^{-6}$
$\frac{1}{M} 0,000\ 03$	0,000 069 1	$5 \cdot 10^{-8}$
	0,693 147 7	$6 \cdot 10^{-7}$

Le calcul qui précède nous permet d'affirmer que 0,693 148 est une valeur approchée de $\frac{1}{M} \overline{\log 2}$ avec une erreur inférieure à $3 \cdot 10^{-7} + 6 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$. D'autre part

$$|\log 2 - \overline{\log 2}| < 5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \frac{1}{M} |\log 2 - \overline{\log 2}| = \left| \text{Log} 2 - \frac{1}{M} \overline{\log 2} \right| < 12 \cdot 10^{-6}.$$

Nous retiendrons

$$\overline{\text{Log} 2} = 0,693\ 148; \quad |\text{Log} 2 - \overline{\text{Log} 2}| < 13 \cdot 10^{-6}.$$

5° Erreurs d'interpolation dans le cas des tables des fonctions $\log \sin x$ et $\log \operatorname{tg} x$. — Nous plaçant dans le cas le plus défavorable, qui est celui de la division sexagésimale, considérons des tables à cinq décimales dont le pas est $\frac{1}{60}$ degré, c'est-à-dire, approximativement, 29.10^{-5} radians.

Rappelons que l'erreur due à l'interpolation est majorée par

$$e' = \frac{1}{8}(b-a)^2 \sup |f''(x)|.$$

$$a) \quad f(x) = \log \sin x; \quad f'(x) = M \cot g x; \quad f''(x) = -\frac{M}{\sin^2 x}; \quad \sup |f''(x)| < \frac{0,44}{\sin^2 a}.$$

$$e' < \frac{1}{8} \cdot 9 \cdot 10^{-8} \frac{0,44}{\sin^2 a} \quad \text{et a fortiori} \quad e' < \frac{5 \cdot 10^{-9}}{\sin^2 a}.$$

Lorsque x est supérieur à 10° , on a

$$\sin a > 0,173 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 a} < 34 \Rightarrow e' < 17 \cdot 10^{-8};$$

l'erreur due à l'interpolation est alors négligeable devant l'erreur due à l'imperfection de la table, cette dernière pouvant atteindre $5 \cdot 10^{-6}$.

Au contraire lorsque x est inférieur à 4° on a

$$\sin a < 0,070 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 a} > 200 \Rightarrow \frac{5 \cdot 10^{-9}}{\sin^2 a} > 10^{-6};$$

nous ne sommes plus en mesure d'affirmer que l'erreur due à l'interpolation est négligeable devant l'erreur due à l'imperfection de la table.

Pour les arcs compris entre 0 et 4° , on utilise les formules :

$$\log \sin x = \log x + S; \quad S = \log \frac{\sin x}{x}$$

et les « tables S ».

EXEMPLE. — Calculer $\log \sin 1^\circ 11' 55''$ ou $\log \sin 4315''$.

La table $\log x$ donne :

$$\log 4315 \quad \left| \begin{array}{l} 3,634 \, 98 \\ \hline 6,685 \, 54 \end{array} \right.$$

La table S donne :

$$S \quad \left| \begin{array}{l} 3,634 \, 98 \\ \hline 6,685 \, 54 \end{array} \right.$$

Nous adopterons

$$\log \sin 1^\circ 11' 55'' \approx 2,320 \, 52$$

$$b) \quad f(x) = \log \operatorname{tg} x; \quad f'(x) = \frac{2M}{\sin 2x}; \quad f''(x) = -\frac{4M \cos 2x}{\sin^2 2x};$$

$$\sup |f''(x)| < \frac{1,76}{\sin^2 2a}.$$

On en déduit

$$e' < \frac{2 \cdot 10^{-8}}{\sin^2 2a}.$$

Pour les arcs compris entre 0 et 4 degrés on utilise les formules

$$\log \operatorname{tg} x = \log x + T; \quad T = \log \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

et les « tables T ».

REMARQUE. — Il existe également des tables S et T pour les arcs compris entre 0 et 4 grades.

III. CALCUL APPROCHÉ DES ZÉROS D'UNE FONCTION

265. Position du problème. — Rappelons que l'étude des zéros de la fonction réelle f de la variable réelle — que l'on appelle aussi racines de l'équation $f(x) = 0$ — comporte deux phases :

1° *Séparation des zéros.*

2° *Pour chacun des zéros, détermination soit de la valeur exacte, soit d'une valeur approchée avec une approximation imposée.*

La séparation des zéros a été étudiée au chapitre X (nos 128 à 130).

Nous nous plaçons ici à la fin de la première phase : pour chaque zéro simple de la fonction f nous supposons connu un segment $[a, b]$, $a < b$, sur lequel la fonction f est continue et admet un zéro et un seul $r \in]a, b[$.

REMARQUE. — L'étude semble exclure les zéros multiples de f ; en fait les zéros doubles de f seront étudiés au titre de zéros simples de f' , etc....

266. Méthode des substitutions. — L'hypothèse faite à la fin du paragraphe précédent entraîne $f(a).f(b) < 0$.

Formons $f(c_1)$, c_1 étant un point quelconque de $]a, b[$.

Si $f(c_1) = 0$, le zéro cherché est $r = c_1$.

Si $f(a).f(c_1) < 0$, on a $a < r < c_1$. On pose $a_1 = a$, $b_1 = c_1$.

Si $f(a).f(c_1) > 0$, on a $c_1 < r < b$. On pose $a_1 = c_1$, $b_1 = b$.

On obtient ainsi un intervalle $]a_1, b_1[$ qui contient le zéro cherché r et qui est plus petit que l'intervalle initial. En choisissant

$$c_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{on a} \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2};$$

il suffit donc d'itérer n fois pour être assuré d'obtenir ou bien la valeur exacte de r ou bien un encadrement de la forme

$$a_n < r < b_n, \quad \text{avec} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

La méthode fournit donc une approximation illimitée du zéro r dans la mesure où on sait calculer *exactement* tous les nombres $f(c_i)$ qui interviennent, ou tout au moins déterminer leurs signes. Or, soit que l'on ait utilisé des valeurs décimales approchées en cours de calcul, soit que l'on se soit servi de tables, on n'a en général de $f(c_i)$ qu'une valeur approchée l_i avec une erreur absolue majorée par un nombre connu ε_i . On n'est sûr du signe de $f(c_i)$ que si $|l_i| > \varepsilon_i$.

REMARQUE. — Dans la pratique, si a et b sont des entiers consécutifs, on calcule $f(a+0,5)$. Si $a < r < a+0,5$, on calcule ensuite $f(a+0,2)$ ou $f(a+0,3)$ au lieu de $f(a+0,25)$. On constate que, en quatre substitutions au maximum on arrive à encadrer r par deux nombres différant de $\frac{1}{10}$. Il en résulte que, en huit substitutions au maximum on arrive à encadrer r par deux nombres différant de $\frac{1}{100}$; etc....

267. Méthodes d'approximation de Newton et des parties proportionnelles. — Les substitutions nécessitent des calculs laborieux. Nous allons donner deux méthodes, dites de précision, qui (sous réserve d'hypothèses plus restrictives, toujours satisfaites dans la pratique) permettent d'aller plus vite, en diminuant le nombre des tâtonnements.

Hypothèses communes : f , f' et f'' sont définies sur $[a, b]$; $f'(x)$ et $f''(x)$ ont un signe fixe pour $x \in [a, b]$; $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Il résulte de ces hypothèses que la fonction f est monotone sur $[a, b]$, qu'elle admet un zéro simple et un seul $r \in]a, b[$, enfin qu'elle est convexe si $f''(x) > 0$, concave si $f''(x) < 0$.

1° Principe des méthodes de précision. — Le graphe (Γ) de la fonction f sur $[a, b]$, par rapport à deux axes rectangulaires Ox et Oy , est limité à deux points A et B situés de part et d'autre de Ox . Du fait de la conca-

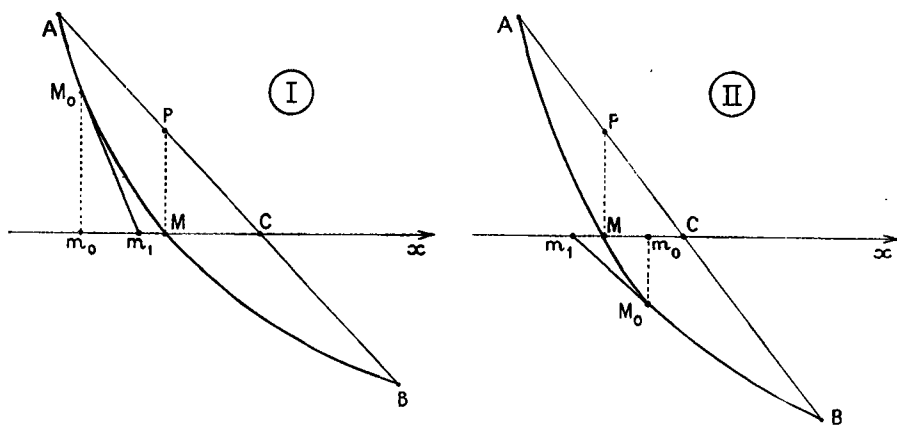


FIG. 92.

lité (ou de la convexité), l'arc (Γ) est tout entier d'un même côté de la droite AB , l'arc AB tout entier et la corde AB tout entière sont d'un même côté par rapport à la tangente à (Γ) en l'un quelconque de ses points. Il en résulte que l'on obtient un encadrement de la racine r , qui est l'abscisse du point d'intersection M de l'arc (Γ) et de l'axe Ox , en utilisant les deux valeurs approchées suivantes, l'une par défaut, l'autre par excès (fig. 92).

a) l'abscisse x_1 du point d'intersection m_1 de l'axe Ox et de la tangente à (Γ) en l'un quelconque de ses points M_0 : c'est la *méthode de Newton*;

b) l'abscisse c du point d'intersection C de l'axe Ox et de la corde AB : c'est la *méthode des parties proportionnelles*.

La figure, qu'il est recommandé de faire dans chaque cas, indique lequel des deux nombres x_1 ou c est une valeur approchée par excès.

2° Méthode de Newton. — La tangente à (Γ) au point M_0 d'abscisse x_0 a pour équation

$$y - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0).$$

Cette tangente coupe donc Ox au point m_1 qui a pour abscisse

$$(1) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Le nombre $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ que l'on ajoute à l'ancienne valeur approchée x_0 du zéro r pour obtenir la nouvelle valeur approchée x_1 est appelée la correction de Newton relative au nombre x_0 .

Il n'y a pas de règle permettant de reconnaître, r étant inconnu, si x_1 est plus voisin de r que x_0 , c'est-à-dire si x_1 vérifie l'inégalité $|x_1 - r| < |x_0 - r|$. Mais il suffit de faire la figure pour constater que si la tangente M_0m_1 est comprise entre l'arc (Γ) et le segment M_0m_0 perpendiculaire à Ox , le point m_1 est compris entre m_0 et M , x_1 est compris entre x_0 et r , et la valeur approchée x_1 est plus approchée de r que x_0 et dans le même sens. Un point M_0 où cette disposition est réalisée est un point où $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ ont le même signe (fig. 92, I).

On peut être amené à ne pas suivre cette règle simple due à Fourier; la méthode de Newton donne alors une valeur approchée de r , extérieure à $]x_0, r[$ qui peut être, soit plus approchée que x_0 , soit moins approchée que x_0 (fig. 92, II).

Majorant de l'erreur commise. — Posons $r = x_0 + h$; par hypothèse

$$f(x_0 + h) = 0,$$

et les hypothèses faites sur la fonction f permettent d'écrire, en appliquant la formule de Taylor,

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0 + \theta h) = 0, \quad 0 < \theta < 1.$$

On en déduit une expression de h

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{h^2}{2} \frac{f''(x_0 + \theta h)}{f'(x_0)}.$$

La correction de Newton étant

$$h_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

lorsqu'on prend $x_1 = x_0 + h_1$ comme valeur approchée de r , on commet une erreur qui est $r - x_1$ ou $(x_0 + h) - (x_0 + h_1) = h - h_1$, c'est-à-dire

$$-\frac{h^2}{2} \frac{f''(x_0 + \theta h)}{f'(x_0)}.$$

En remarquant que $h^2 = (r - x_0)^2$ est inférieur à $(b - a)^2$, nous retiendrons en général la majoration de l'erreur commise dans l'approximation par la méthode de Newton sous la forme

$$(2) \quad |r - x_1| < \frac{M}{2m} (b - a)^2; \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \sup |f''(x)| \\ m = \inf |f'(x)| \end{array} \right\} \quad \text{sur } [a, b]$$

REMARQUE. — Le majorant de l'erreur étant d'autant plus avantageux qu'il est petit, il pourra être utile d'utiliser

$$|r - x_1| < \varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{M\alpha^2}{2|f'(x_0)|}; \quad \alpha \text{ majorant de } |r - x_0|.$$

C'est ainsi que si nous envisageons la disposition de la figure 92, I nous pouvons d'abord majorer $|r - x_0|$ par $(b - x_0)$; d'où le premier majorant de l'erreur

$$\varepsilon_1 = \frac{M(b - x_0)^2}{2|f'(x_0)|}.$$

On en déduit, la règle de Fourier ayant été suivie ici,

$$x_0 < x_1 < r < x_1 + \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad r - x_0 < (x_1 - x_0) + \varepsilon_1 = h_1 + \varepsilon_1;$$

il en résulte que $\varepsilon_2 = \frac{M(h_1 + \varepsilon_1)^2}{2|f'(x_0)|}$ est un majorant de l'erreur plus avantageux que ε_1 .

3^e **Méthode des parties proportionnelles.** — On peut définir la droite AB par le point A($a, f(a)$) et par son coefficient directeur, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. L'équation de cette droite est donc

$$y - f(a) = (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

L'abscisse du point d'intersection C de l'axe Ox et la droite AB s'obtient en faisant $y = 0$ et $x = c$ dans la relation précédente, soit

$$(3) \quad c = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a).$$

Il peut y avoir intérêt à transposer a et b dans la relation (3).

Majorant de l'erreur commise. — En désignant par t le coefficient directeur de la droite AB on a

$$CM = \frac{1}{|t|} PM,$$

d'où, en utilisant un résultat démontré au n° 261,

$$(4) \quad |r - c| < \frac{M}{8|t|} (b - a)^2.$$

En remarquant que, d'après la formule des accroissements finis, la fonction f' prend la valeur t en un point convenablement choisi de $]a, b[$, nous retiendrons en général la majoration de l'erreur commise dans l'approximation par la méthode des parties proportionnelles sous la forme

$$(5) \quad |r - c| < \frac{M}{8m} (b - a)^2; \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \sup |f''(x)| \\ m = \inf |f'(x)| \end{array} \right\} \text{ sur } [a, b]$$

On constate que ce majorant est égal au quart de celui qui est fourni par la relation (2), dans le cas de l'approximation par la méthode de Newton. On ne peut cependant pas en déduire que la méthode des parties proportionnelles est dans tous les cas supérieure à celle de Newton.

4° **Compléments sur les méthodes de précision.** — a) *Erreur de calcul. Erreur totale.* — Dans la pratique on est amené à remplacer x_1 (Newton) ou c (parties proportionnelles) par une valeur approchée. Nous ferons en sorte que l'erreur due au calcul n'excède pas l'erreur systématique donnée par la formule (2) ou la formule (5), ce qui, remarquons-le, limite l'intérêt des méthodes de précision dans le cas où on est amené à utiliser des tables de fonctions.

A partir de $b - a = 10^{-p}$, nous aboutirons ainsi à l'encadrement du zéro r par deux nombres α et β tels que

$$\beta - \alpha < 2 \frac{M}{8m} (b - a)^2 = \frac{M}{4m} 10^{-2p} \text{ (parties proportionnelles)}$$

$$\beta - \alpha < 2 \frac{M}{2m} (b - a)^2 = \frac{M}{m} 10^{-2p} \text{ (Newton).}$$

Inversement si nous cherchons à encadrer r par deux valeurs approchées dont la différence est imposée, l'étude précédente nous indique la valeur de la différence $b - a$ à partir de laquelle il faut opérer.

b) **APPLICATION SIMULTANÉE DES MÉTHODES DE PRÉCISION.** — a) Nous avons vu en étudiant le principe des méthodes de précision qu'elles fournissent deux valeurs approchées, l'une par défaut, l'autre par excès. Leur application simultanée fournit donc un encadrement du zéro cherché : r est compris entre x_1 et c .

Les deux valeurs d'encadrement sont obtenues par des calculs indépendants, ce qui constitue une vérification précieuse dans la pratique.

Par ailleurs, si cette application simultanée n'apporte pas en général une amélioration sensible de l'encadrement fourni par une seule méthode, elle permet souvent (cf. exemple I) d'améliorer sensiblement le calcul dans le cas de la méthode de Newton.

β) Supposons que, partant des valeurs approchées par défaut et par excès de r , à 10^{-p} près, a et b , on ait obtenu un meilleur encadrement

$$a < \alpha < r < \beta < b.$$

On cherche alors à en déduire, par substitutions, les deux valeurs approchées à 10^{-q} près, par défaut et par excès, a_1 et b_1 , q étant aussi grand que possible; c'est à partir de a_1 et b_1 qu'on utiliserait éventuellement à nouveau les méthodes de précision.

c) **CAS DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES.** — Si les coefficients sont rationnels, la précision est théoriquement illimitée. Dans la pratique des substitutions, on a intérêt à utiliser des tables donnant les carrés et les cubes des entiers de 1 à 10 000.

5° **EXEMPLE I.** $f(x) = 3x^3 - x - 6$

$$f'(x) = 9x^2 - 1$$

$$f''(x) = 18x$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	$+\infty$

Le tableau montre que la fonction f a un zéro et un seul $r > \frac{1}{3}$.

a) *Substitutions* $f(1) = -4; \quad f(2) = 16 \implies 1 < r < 2$
 $f(1,3) = -0,709; \quad f(1,4) = 0,832 \implies 1,3 < r < 1,4.$

b) *Méthode des parties proportionnelles* sur $[1, 3; 1, 4]$. Elle donne $c = 1,3 + 0,1 \frac{709}{1541}$ dont une valeur approchée est $1,3 + 0,046$ à 10^{-3} près par défaut. D'après la forme du graphe (que le lecteur construira), $c < r$.

Majorons l'erreur commise :

$$M = f''(1,4) = 25,2; \quad m = f'(1,3) = 14,21 \implies \frac{M}{8m} (b-a)^2 < 3 \cdot 10^{-3}.$$

$c + 3 \cdot 10^{-3}$ est une valeur approchée de r par excès, et finalement

$$1,346 < r < 1,350.$$

c) *Méthode de Newton*, à partir de $x_0 = 1,35$.

$$f(1,35) = 0,031\,125; \quad f'(1,35) = 15,4025.$$

On constate que $f(1,35)$ et $f''(1,35)$ ont le même signe. Le terme correctif de Newton est

$$h_1 = -\frac{f(1,35)}{f'(1,35)} = -\frac{311\,250}{154\,025} 10^{-3},$$

et $x_1 = x_0 + h_1$ est ici une valeur approchée par excès de r . Une valeur approchée par défaut de h_1 , à 10^{-3} près, est 0,002; donc

$$1,347 < x_1 < 1,348.$$

Par ailleurs on peut considérer que l'intervalle de départ est ici $[1,3; 1,35]$ et majorer $\frac{M}{2m} (b-a)^2$, c'est-à-dire $\frac{M}{8m} 10^{-2}$ par $3 \cdot 10^{-3}$.

$x_1 - 3 \cdot 10^{-3}$ est une valeur approchée par défaut de r . D'où

$$1,344 < r < 1,348.$$

d) *Application simultanée*. Elle donne tout d'abord :

$$1,346 < r < 1,348.$$

Mais il y a mieux car, pour majorer l'erreur commise par l'application de la formule de Newton, nous pouvons utiliser

$$(5) \quad \varepsilon = \frac{M \alpha^2}{2|f'(x_0)|}; \quad \alpha \text{ majorant de } |r - x_0|.$$

$$M = f''(1,35) = 24,3; \quad f'(x_0) = f'(1,35) > 15; \quad \alpha = 1,35 - 1,346 \text{ ou } 4 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{D'où} \quad \varepsilon < \frac{24,3}{30} \cdot 16 \cdot 10^{-6} < 13 \cdot 10^{-6}.$$

Nous pouvons donc reprendre le calcul de h_1 avec plus de précision que précédemment : la valeur approchée de $|h_1|$ à 10^{-6} près par défaut est 0,002 020; par suite $r < 1,347\,980$, et tenant compte du majorant obtenu pour l'erreur

$$1,347\,979 - 0,000\,013 < r.$$

$$\text{Finalement} \quad 1,347\,966 < r < 1,347\,980.$$

Améliorons encore le calcul d'erreurs. En tenant compte de

$$1,347\,966 < r < 1,35$$

on peut prendre, dans la formule (5), $\alpha = 1,35 - 1,347\,9 = 21 \cdot 10^{-4}$.

$$\text{On aboutit à} \quad \varepsilon < \frac{24,3}{30} (21)^2 \cdot 10^{-8} < 4 \cdot 10^{-8}.$$

r est supérieur à $1,347\,979 - 0,000\,004 = 1,347\,975$, et l'on obtient l'encadrement

$$1,347\,975 < r < 1,347\,980.$$

e) *Autre méthode.* — Après avoir obtenu $1,346 < r < 1,350$ par la méthode des parties proportionnelles, nous aurions pu chercher par substitutions les deux valeurs approchées de r à 10^{-3} près par défaut et par excès ce qui nous aurait conduit au calcul de $f(1,348)$.

Après avoir constaté : $f(1,348) > 0$ et $f(1,347) < 0$ nous aurions appliqué l'une des deux méthodes de précision à (a', b') avec $a' = 1,347$ et $b' = 1,348$. L'erreur d'encadrement aurait alors été voisine de 10^{-6} .

EXEMPLE II. — Nous avons vu précédemment (131, exemple IV) que la fonction

$$\varphi(u) = u - u^2 - \text{Log}(1 + u)$$

a un zéro u_0 compris entre -1 et $-\frac{1}{2}$; nous allons en chercher une valeur approchée à l'approximation que permettent les tables de logarithmes à cinq décimales. Comme nous aurons à calculer les valeurs prises par $\varphi(u)$ pour diverses valeurs de u , nous préparons d'abord le tableau des calculs qui seront nécessaires en écrivant, à gauche, en colonne, les expressions littérales que nous remplacerons, à droite, par leurs valeurs numériques approchées d'abord u , $1 - u$, $1 + u$. Comme nous avons un logarithme népérien, rappelons que $\text{Log } x = \text{Log } 10 \times \log x$; $1 + u$ est compris entre 0 et 1, $-\text{Log}(1 + u)$ est positif et

$$\log[-\text{Log}(1 + u)] = \log(\text{Log } 10) + \log[\text{colog}(1 + u)].$$

Nous écrirons donc successivement $\log(1 + u)$, $\text{colog}(1 + u)$, $\log[\text{colog}(1 + u)]$, $\log(\text{Log } 10)$ dont une valeur approchée est 0,36222, $\log[-\text{Log}(1 + u)]$, $-\text{Log}(1 + u)$, enfin $u(1 - u)$ et $\varphi(u)$.

Resserrons d'abord l'intervalle dans lequel est situé u_0 ; nous savons que $\text{Log } 2$ a pour valeur approchée 0,69315 (264), par suite

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,75 + \text{Log } 2 \text{ a pour valeur approchée } -0,05685.$$

u	$-0,7$	$-0,68$	$-0,684$	$-0,6838$
$1 - u$	$1,7$	$1,68$	$1,684$	$1,6838$
$1 + u$	$0,3$	$0,32$	$0,316$	$0,3162$
$\log(1 + u)$	$1,477\ 12\ 0,5$	$1,505\ 15\ 0,5$	$1,499\ 69\ 0,5$	$1,499\ 96\ 0,5$
$\text{colog}(1 + u)$	$0,522\ 88\ 0,5$	$0,494\ 85\ 0,5$	$0,500\ 31\ 0,5$	$0,500\ 04\ 0,5$
$\log[\text{colog}(1 + u)]$	$1,718\ 40\ 1$	$1,694\ 47\ 1$	$1,699\ 24\ 1$	$1,699\ 01\ 1$
$\log(\text{Log } 10)$	$0,362\ 22\ 1$	$0,362\ 22\ 1$	$0,362\ 22\ 1$	$0,362\ 22\ 1$
$-\log[-\text{Log}(1 + u)]$	$0,080\ 62\ 2$	$0,056\ 69\ 2$	$0,061\ 46\ 2$	$0,061\ 23\ 2$
$-\text{Log}(1 + u)$	$1,204\ 0\ 1$	$1,139\ 4\ 1$	$1,152\ 0\ 1$	$1,151\ 4\ 1$
$u(1 - u)$	$-1,19$	$-1,142\ 4$	$-1,151\ 86\ 1$	$-1,151\ 4\ 0,2$
$\varphi(u)$	$0,014\ 0\ 1$	$0,003\ 0\ 1$	$0,000\ 14\ 11$	$0,000\ 0\ 1,2$

Le calcul de $\varphi(-0,7)$ qu'on trouvera dans le tableau précédent donne 0,0140 comme valeur approchée à 10^{-4} près (dans la colonne des calculs nous avons indiqué, à droite des résultats, des majorants des erreurs commises, évalués en unités du dernier chiffre décimal écrit). Nous faisons une première application de la méthode des parties proportionnelles à l'intervalle $(-0,7; -0,5)$ en observant que

$$\varphi'(u) = \frac{-u(1+2u)}{1+u} \text{ est négatif entre } -1 \text{ et } -\frac{1}{2}$$

$$\text{et que } \varphi''(u) = -\frac{2u^2 + 4u + 1}{(1+u)^2} \text{ est positif dans cet intervalle.}$$

Une valeur approchée par défaut de la valeur absolue de la correction à apporter au nombre $-0,5$ est

$$0,2 \times \frac{568}{568 + 141} \text{ et aussi } 0,16.$$

Par suite

$$-0,7 < u_0 < -0,66.$$

Appliquons la méthode de Newton au nombre $-0,7$; à cet effet calculons

$$\varphi'(-0,7) = \frac{(0,7) \times (-0,4)}{0,3}, \quad \text{soit} \quad -\frac{14}{15};$$

la correction de Newton, $-\frac{\varphi(-0,7)}{\varphi'(-0,7)}$, a pour valeur approchée par défaut

$$0,014 \times \frac{15}{14} = 0,015.$$

Il résulte de ce premier calcul que

$$-0,685 < u_0 < -0,66.$$

Au lieu de substituer la première des deux bornes précédentes dans $\varphi(u)$ comme il conviendrait de le faire pour une nouvelle application de la méthode des parties proportionnelles ou de la méthode de Newton, il est avantageux de substituer $-0,68$ pour essayer d'améliorer l'encadrement de u_0 . Le calcul de $\varphi(-0,68)$ donne $-0,0030$ à 10^{-4} près, dès lors

$$-0,685 < u_0 < -0,68.$$

La substitution de $-0,68$ a amélioré la valeur approchée par excès de u_0 ; pour rester à gauche de u_0 tout en améliorant la valeur approchée par défaut, substituons $-0,684$; le calcul donne $0,00014$ à $11 \cdot 10^{-5}$ près; par suite

$$-0,684 < u_0 < -0,68.$$

Terminons en appliquant la méthode des parties proportionnelles à l'intervalle $(-0,684; -0,68)$; la correction à apporter au nombre $-0,68$ est supérieure en valeur absolue à

$$0,004 \times \frac{290}{290 + 25} \quad \text{soit} \quad 0,0036,$$

et enfin

$$-0,684 < u_0 < -0,6836.$$

On peut adopter $-0,6838$ comme valeur approchée de u_0 à $2 \cdot 10^{-4}$ près. Le calcul de $\varphi(-0,6838)$ donne $0,0000$ à $12 \cdot 10^{-5}$ près; la table employée ne peut donner un meilleur résultat puisqu'elle ne permet pas de connaître avec certitude le signe de la substitution de $-0,6838$.

268. Méthode d'itération. — Soit φ une fonction définie sur $[a, b]$, $a < b$, admettant sur ce segment une dérivée φ' telle que $|\varphi'(x)| \leq k$, k étant un nombre fixe, plus petit que 1.

La fonction g définie par

$$(1) \quad g(x) = x - \varphi(x)$$

est croissante sur $[a, b]$, puisqu'elle admet une dérivée positive. Supposons en outre $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$. Nous pouvons affirmer que la fonction g admet sur $]a, b[$ un zéro et un seul, soit r . On a

$$(2) \quad r = \varphi(r).$$

1° Étude théorique. a) — Montrons que, sous réserve qu'aucun des nombres x_n qui interviennent ne sorte de $[a, b]$, la suite récurrente définie par

$$x_0 \in [a, b]; \quad x_n = \varphi(x_{n-1})$$

converge et admet pour limite r .

Nous avons en effet, par la formule des accroissements finis,

$$(3) \quad x_n - r = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(r) = (x_{n-1} - r) \varphi'(\xi_{n-1}); \quad \xi_{n-1} \in]x_{n-1}, r[.$$

Il en résulte, en tenant compte de $|\varphi'(x)| \leq k$,

$$(4) \quad |x_h - r| \leq k |x_{h-1} - r|.$$

En écrivant (4) successivement pour $h = 1, 2, \dots, n$ et en multipliant membre à membre les relations obtenues, nous avons

(5)

$$|x_n - r| \leq k^n |x_0 - r|.$$

Étant donné que $0 < k < 1$, il en résulte $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = r$.

b) Revenons à la restriction $x_h \in [a, b]$, en supposant d'abord que $\varphi'(x)$ a un signe fixe sur $[a, b]$.

1^{er} Cas :

$0 < \varphi'(x) \leq k$. Des relations (3) et (4), on déduit $x_h \in]x_{h-1}, r[$. De l'hypothèse $x_0 \in [a, b]$, il résulte $x_n \in [a, b]$, quel que soit n . La suite $\{x_n\}$ existe; elle admet la limite r ; elle est monotone.

2^e Cas :

$-k \leq \varphi'(x) < 0$. Des relations (3) et (4) on déduit que x_{h-1} et x_h encadrent r et que x_h est plus près de r que x_{h-1} . Il en résulte qu'une condition suffisante d'existence de la suite $\{x_n\}$ est qu'à l'hypothèse $x_0 \in [a, b]$, on ajoute l'hypothèse $\varphi(x_0) \in [a, b]$.

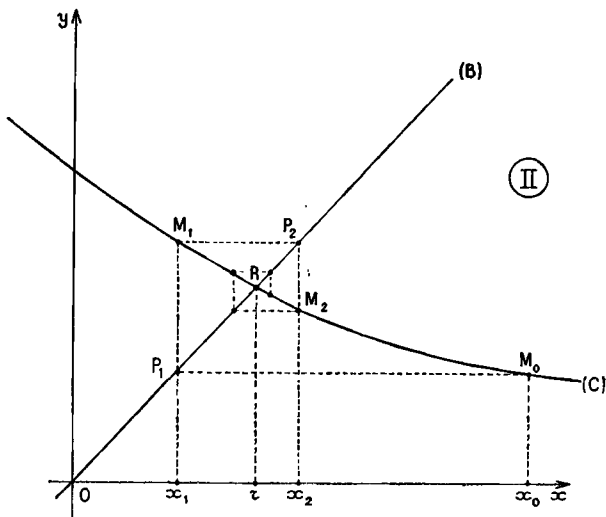
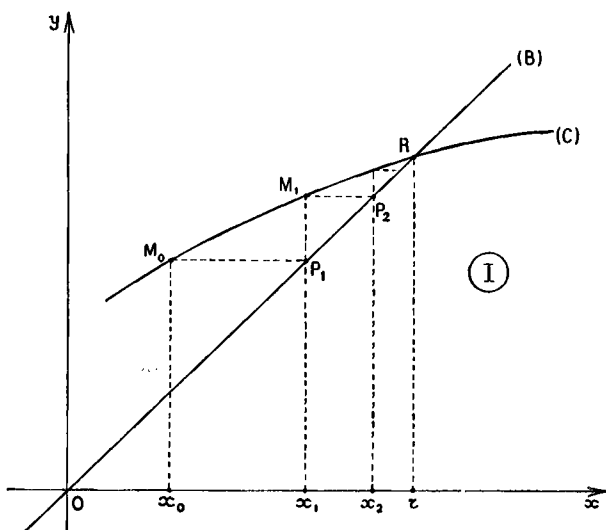


FIG. 93.

Interprétation géométrique. — Les deux cas précédents sont illustrés par les figures 93 I et II. Le zéro r est l'abscisse du point d'intersection R du graphe (C) de la fonction φ et de la première bissectrice (B).

Soit M_0 le point de (C) qui a x_0 pour abscisse. La parallèle à $x'x$ menée par M_0 rencontre (B) en un point P_1 dont l'ordonnée est $\varphi(x_0) = x_1$. La parallèle à $y'y$ menée par P_1 rencontre (C) en $M_1 [x_1, \varphi(x_1)]$. La parallèle à $x'x$ menée par M_1 rencontre (B) en P_2 dont l'ordonnée est $\varphi(x_1) = x_2$, etc.

La forme de la figure 93 II nous conduit à parler d'*approximation en spirale* dans le cas où $\varphi'(x)$ est négatif.

REMARQUE. — Dans le cas où $\varphi'(x)$ ne garde pas un signe fixe sur $[a, b]$, il est aisé de constater qu'une condition suffisante d'existence de la suite $\{x_n\}$ est que le nombre x_0 soit choisi dans celui des deux segments $[a, r]$ ou $[r, b]$ qui est le plus petit; le signe de $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ permet d'en décider.

2° **Pratique du calcul approché du zéro r .** — On choisit $x_0 \in [a, b]$ de façon que la suite $\{x_n\}$ soit définie et on calcule les premiers termes. On est amené à remplacer x_h par une valeur approchée x'_h . Dans le cas (particulièrement favorable) de l'approximation en spirale on a intérêt à adopter pour x'_h une valeur aussi simple que possible voisine de $\frac{1}{2}(x_{h-1} + x_h)$ car x'_h et $\varphi(x'_h)$ fournissent un encadrement de r , quel que soit le choix de x'_h . Dans le cas où $\varphi'(x)$ est positif, l'inconvénient de la méthode est que tous les termes de la suite sont des valeurs approchées dans le même sens.

3° **Passage de l'équation $f(x) = 0$ à l'équation $x = \varphi(x)$.** — Les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont les mêmes que celle de l'équation

$$(6) \quad x = x + \lambda f(x),$$

dans laquelle λ désigne une constante non nulle arbitraire. Désignons par $\varphi(x)$ la fonction $x + \lambda f(x)$ dont la dérivée est $1 + \lambda f'(x)$.

x_0 étant un nombre voisin de r , nous pouvons choisir λ de façon à obtenir $\varphi'(x_0) = \mu$, μ étant un nombre quelconque assujéti, pour fixer les idées, à la condition $|\mu| \leq \frac{1}{2}$. Si nous supposons que la fonction f' est continue sur un voisinage de r et si x_0 est assez voisin de r , il existe un segment $[a, b]$ contenant $[x_0, r]$ sur lequel $|\varphi'(x)| \leq k < 1$, ce qui permet d'appliquer la méthode d'itération.

REMARQUE I. — Si nous choisissons $\mu = 0$, nous avons $\lambda = -\frac{1}{f'(x_0)}$; le premier calcul à effectuer est alors celui de

$$x_1 = x_0 + \lambda f'(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

ce qui revient à appliquer la méthode de Newton à partir de x_0 .

REMARQUE II. — Il y a intérêt à choisir μ de façon à se trouver dans le cas de l'approximation en spirale.

EXEMPLE. — Calculer avec l'approximation que peuvent donner les tables à cinq décimales les zéros de l'équation

$$(1) \quad x = \coth x \iff x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Le graphe de la fonction $\coth$ montre (107) que l'équation (1) a deux zéros opposés dont la valeur absolue est supérieure à 1 ; soit r le zéro positif. Comme on s'en assure aisément, pour $x > 1$ la valeur absolue de $(\coth x)'$ est inférieure à $\frac{4}{5}$. Cette dérivée étant négative, le zéro r est entre les nombres X et $\coth X$, quel que soit $X > 1$.

Appliquons la méthode d'itération à partir de $x_0 = 1$ (voir le calcul ci-dessous). Nous savons *a priori* que, 1 étant une valeur approchée par défaut, $\coth 1$ est une valeur approchée par excès. Nous trouvons $\coth 1 < 1,32$. D'où l'encadrement : $1 < r < 1,32$.

			$\text{Calcul de } x_1 = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$				
e^2		7,389 1		$5 \cdot 10^{-5}$	$\begin{array}{r l} 8,389 \ 2 & 6,389 \ 0 \\ 2 \ 000 \ 20 & \\ \hline 083 \ 50 & 1,31 \\ \hline 1 & < r < 1,32 \end{array}$		
			$\text{Calcul de } x_2 = \frac{e^{2,4} + 1}{e^{2,4} - 1}$				
$e^{2,4}$		11,023 2		$5 \cdot 10^{-5}$	$\begin{array}{r l} 12,023 \ 1 & 10,023 \ 3 & 12,023 \ 3 & 10,023 \ 1 \\ 1 \ 999 \ 80 & & 2 \ 000 \ 2 & \\ \hline 997 \ 470 & 1,199 & & 1,1 \\ \hline 95 \ 373 & & & \\ \hline 1,199 < r < 1,2 \end{array}$		
$\text{Calcul de } e^{2,399}$			$\text{Calcul de } x_3 = \frac{e^{2,399} + 1}{e^{2,399} - 1}$				
2	loge	0,868 59		12,011 8	10,012 6	12,012 6	10,011 8
0,3		0,130 288		1 999 20		2 000 80	
0,09	loge	0,039 086 5		997 940	1,199 6	999 620	1,1998
0,009	loge	0,003 908 7		96 806 0		98 558 0	
2,399	loge	1,041 873 2	$6 \cdot 10^{-6}$	6 692 6		8 451 8	
$e^{2,399}$		11,012 2	$4 \cdot 10^{-4}$	$1,199 \ 5 < r < 1,199 \ 9$			
$\text{Calcul de } e^{2,3994}$			$\text{Calcul de } x_4 = \frac{e^{2,3994} + 1}{e^{2,3994} - 1}$				
2,399	loge	1,041 873 2		12,016 2	10,017	12,017 0	10,016 2
0,000 4	loge	0,000 173 7		1 999 2		2 000 80	
2,399 4	loge	1,042 046 9	$6 \cdot 10^{-6}$	997 50	1,199 5	999 180	1,199 7
				95 970		97 722 0	
$e^{2,3994}$		11,016 6	$4 \cdot 10^{-4}$	5 817 0		7 576 2	
			$1,199 \ 5 < r < 1,199 \ 8$				
RÉPONSE :			$r = 1,199 \ 65 \quad \text{à } 0,000 \ 15 \text{ près.}$				

Remplaçons $x_1 = \coth x_0$ par $x'_1 = 1,2$ en nous réservant de comparer 1,2 à $\coth 1,2$ pour connaître le sens de l'approximation. Nous trouvons : $1,199 < \coth 1,2 < 1,2$. Il en résulte : $\coth 1,2 < r < 1,2$ et *a fortiori* $1,199 < r < 1,2$.

Remplaçons $x_2 = \coth x'_1$ par $x'_2 = 1,1995$. Nous trouvons $1,1996 < \coth x'_2 < 1,1999$.

Il en résulte $1,1995 < r < 1,1999$.

Remplaçons $x_3 = \coth x'_2$ par $x'_3 = 1,1997$. Nous trouvons $1,1995 < \coth x'_3 < 1,1998$.

Il en résulte : $1,1995 < r < 1,1998$; les approximations faites ne permettant pas de comparer x'_3 à $\coth x'_3$ et par conséquent à r , les tables de logarithmes à cinq décimales ne permettent pas d'aller plus loin.

REMARQUE I. — Les valeurs approchées de e^2 et $e^{2,4}$ ont été lues dans une table à quatre décimales.

REMARQUE II. — Dans les calculs auxiliaires (colonne de gauche) on cherche un nombre A voisin de 11, connaissant $\log A$ avec une erreur absolue inférieure à $6 \cdot 10^{-6}$ (grâce à l'utilisation de la table des multiples de $M = \log e$). L'erreur relative correspondante sur A est majorée (257) par $\frac{1}{M} \times 6 \times 10^{-6}$ et *a fortiori* par $14 \cdot 10^{-6}$; en ajoutant le majorant $12 \cdot 10^{-6}$ de l'erreur relative due à l'utilisation des tables de logarithmes (264, 2°) on obtient $26 \cdot 10^{-6}$; l'erreur absolue sur A est ainsi majorée par $12 \times 26 \times 10^{-6}$ et *a fortiori* par $35 \cdot 10^{-6}$. On a écrit A avec 4 décimales; l'erreur absolue totale sur A est ainsi inférieure à $4 \cdot 10^{-4}$.

IV. CALCUL DE LA SOMME D'UNE SÉRIE CONVERGENTE AVEC UNE APPROXIMATION DONNÉE

269. Majorant de l'erreur commise en substituant à la somme d'une série convergente une somme de valeurs approchées de ses p premiers termes. — 1° **Principe.** Une série convergente étant donnée, sa somme S ne s'exprime pas en général au moyen d'un nombre fini de termes connus, et pour en calculer une valeur approchée on est conduit, dans la plupart des cas, à lui substituer la somme S_p de ses p premiers termes. On commet ainsi une erreur systématique qui est $S - S_p$ ou R_p . Nous supposons que l'on sait évaluer en fonction de p un majorant θ_p de la valeur absolue de R_p , c'est dire que, θ_p étant une fonction connue de p , on peut écrire $|R_p| < \theta_p$.

En général on ne calcule pas exactement S_p , soit parce que les termes $u_1, u_2, \dots, u_p$ ne sont pas des nombres rationnels, soit encore parce qu'il est commode de remplacer dans les calculs numériques les termes $u_1, u_2, \dots, u_p$ par des nombres $v_1, v_2, \dots, v_p$ qui en sont des valeurs approchées décimales. On substitue ainsi à S_p et par suite à S la somme

$$\Sigma = v_1 + v_2 + \dots + v_p.$$

L'erreur commise sur S est ainsi

$$S - \Sigma = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_p - v_p) + R_p.$$

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ des majorants des erreurs commises respectivement sur $u_1, u_2, \dots, u_p$; on a

$$|u_1 - v_1| < \varepsilon_1, \quad |u_2 - v_2| < \varepsilon_2, \dots, \quad |u_p - v_p| < \varepsilon_p$$

et, par conséquent,

$$|S - \Sigma| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p + \theta_p.$$

Supposons que l'on veuille une valeur approchée de S avec une erreur inférieure à un nombre donné ε . On peut, en premier lieu, déterminer p de façon que θ_p soit plus petit qu'un nombre ε' que l'on choisit plus petit que ε ; cela fait, on calcule des valeurs approchées de $u_1, u_2, \dots, u_p$ de façon que les erreurs commises sur ces nombres aient une somme inférieure à $\varepsilon - \varepsilon'$, par exemple que ces erreurs soient toutes inférieures à $\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{p}$. Dans ces conditions, Σ est une valeur approchée répondant à la question.

REMARQUE. — Dans le cas d'une série à termes positifs, nous avons intérêt à calculer une valeur approchée par défaut, Σ , de S_p . La méthode précédente conduit alors à l'encadrement :

$$\Sigma < S < \Sigma + \varepsilon,$$

autrement dit $\Sigma + \frac{\varepsilon}{2}$ est une valeur approchée de S avec une erreur inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$.

2° Examen des cas usuels où l'on sait évaluer un majorant de $|R_p|$. — a) Si une série à termes positifs est convergente d'après la règle de Cauchy,

$$\text{et si pour } n \geq p + 1, \quad \sqrt[n]{u_n} \leq k < 1, \quad \text{on a} \quad R_p < \frac{k^{p+1}}{1 - k}.$$

Si $\sqrt[n]{u_n}$ tend en croissant vers une limite $l < 1$, on a $\sqrt[n]{u_n} < l < 1$, et on peut prendre $k = l$. Si $\sqrt[n]{u_n}$ décroît à partir du rang $p + 1$, on peut écrire, pour $n \geq p + 1$, $\sqrt[n]{u_n} \leq \sqrt[p+1]{u_{p+1}} < 1$; on peut prendre alors $k = \sqrt[p+1]{u_{p+1}}$ et l'on obtient $R_p < \frac{u_{p+1}}{1 - \sqrt[p+1]{u_{p+1}}}$. Pour le calcul numérique il sera souvent commode de remplacer $\sqrt[p+1]{u_{p+1}}$ par une valeur numérique k' plus simple comprise entre 1 et $\sqrt[p+1]{u_{p+1}}$, et d'écrire $R_p < \frac{u_{p+1}}{1 - k'}$.

b) Si une série à termes positifs est convergente d'après la règle de d'Alembert,

$$\text{et si pour } n \geq p, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1, \quad \text{on a} \quad R_p < \frac{ku_p}{1 - k}.$$

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend en croissant vers une limite $l < 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l < 1$, et on peut prendre $k = l$. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ décroît à partir du rang p , on peut prendre $k = \frac{u_{p+1}}{u_p}$.

et écrire $R_p < \frac{u_{p+1}}{1-k}$ et même, si k' est un nombre plus simple que k et compris entre k et 1, $R_p < \frac{u_{p+1}}{1-k'}$.

c) Si f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ et si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ a un sens, la série à termes positifs qui admet pour terme général $u_n = f(n)$ est convergente (190) et on a

$$R_p < \int_p^{+\infty} f(x) dx.$$

d) Si une série est absolument convergente, $|R_p| < R'_p$, reste de la série des valeurs absolues des termes de la série donnée.

e) Si une série est convergente d'après le critère spécial aux séries alternées, $|R_p| < \theta_p$, θ_p désignant un nombre supérieur à la valeur absolue du premier terme négligé.

3^e Règle pratique. — Dans les cas usuels on ne suivra pas la méthode logique donnée au début, il sera plus commode de procéder de la manière suivante.

Pour calculer à 10^{-q} près la somme d'une série convergente, on commence par calculer des valeurs approchées décimales à $10^{-(q+2)}$ des termes à partir du premier jusqu'à ce que les $q+2$ premières décimales soient nulles. Soit u_{p+1} le premier terme pour lequel cette circonstance se présente et soit Σ la somme des valeurs approchées ainsi calculées. Pour chacun des termes calculés l'erreur est inférieure à $10^{-(q+2)}$, la somme des erreurs ainsi commises est plus petite que $p \cdot 10^{-(q+2)}$.

On évalue ensuite un majorant θ_p de la valeur absolue du reste R_p . Si l'on a

$$p \cdot 10^{-(q+2)} + \theta_p < 10^{-q},$$

Σ est une valeur approchée répondant à la question.

Dans les cas usuels examinés plus haut où l'on pouvait écrire $R_p < \frac{u_{p+1}}{1-k'}$, si l'on peut prendre $k' = \frac{1}{2}$, on peut adopter pour θ_p un nombre supérieur à $2u_{p+1}$, soit $2 \cdot 10^{-(q+2)}$; il est rare qu'on soit obligé de prendre $k' = 0,9$, et même dans ce cas, on peut poser $\theta_p = 10^{-(q+1)}$. Pourvu que p soit inférieur à 90 (et jamais dans la pratique usuelle on n'aura à calculer un si grand nombre de termes pour une série), Σ répond à la question.

Faisons encore deux observations : a) En forçant la $q+2^e$ décimale de la valeur approchée par défaut de u_n lorsque la $q+3^e$ est 5, 6, 7, 8 ou 9, on peut prendre pour v_n un nombre qui diffère de u_n de moins de $5 \cdot 10^{-(q+3)}$ et lorsqu'on connaît cette $q+3^e$ décimale on peut faire de chacune des erreurs commises sur $u_1, u_2, \dots, u_p$ une évaluation plus avantageuse; soit $p' \cdot 10^{-(q+3)}$, avec $p' < p$, un majorant ainsi calculé de $|S_p - \Sigma|$.

b) En supprimant les deux dernières décimales de Σ on obtient un nom-

bre Σ_1 tel que $\Sigma - \Sigma_1 = A \cdot 10^{-(q+2)}$ avec $0 \leq A < 100$. Il peut arriver que la somme $(p' + A) 10^{-(q+2)} + \theta_p$ soit inférieure à 10^{-q} .

Le nombre Σ_1 répond à la question.

270. Exemples de calcul approché de la somme d'une série convergente.

EXEMPLE I. Utiliser la formule

$$\pi = 16 \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{239}$$

établie au n° 67, 2° pour calculer une valeur approchée de π à 10^{-9} près.

Nous connaissons (221, 3°) le développement en série entière

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Le rayon de convergence étant 1, nous avons à calculer $16 S - 4 S'$, S et S' étant les sommes des séries alternées convergentes obtenues en remplaçant x par $\frac{1}{5}$, puis par $\frac{1}{239}$.

A cause du facteur 16, nous calculerons les termes à 10^{-9} près, jusqu'à ce que les 9 premières décimales soient des 0. L'erreur systématique est ainsi majorée en valeur absolue par 10^{-9} (critère des séries alternées). Pour majorer plus avantageusement l'erreur due au calcul nous utiliserons la 10^e décimale.

CALCUL DE S.

Termes positifs.			Termes négatifs.		
$\frac{1}{5}$	0,2		$\frac{1}{3 \times 5^3}$	0,002 666 667	$4 \cdot 10^{-10}$
$\frac{1}{5 \times 5^5}$	0,000 064		$\frac{1}{7 \times 5^7}$	0,000 001 829	$5 \cdot 10^{-10}$
$\frac{1}{9 \times 5^9}$	0,000 000 057	$2 \cdot 10^{-10}$	$\frac{1}{11 \times 5^{11}}$	0,000 000 002	$2 \cdot 10^{-10}$
A	0,200 064 057	$2 \cdot 10^{-10}$	B	0,002 668 498	$11 \cdot 10^{-10}$

$\Sigma = A - B = 0,197 395 559$ est une valeur approchée de S à $(11 + 2 + 1) \cdot 10^{-10}$ près.
 $16 \Sigma = 3,158 328 294$ est une valeur approchée de $16 S$ à $224 \cdot 10^{-10}$ près.

CALCUL DE S'.

Terme positif			Terme négatif		
$\frac{1}{239}$	0,004 184 100	$5 \cdot 10^{-10}$	$\frac{1}{3 \times 239^3}$	0,000 000 024	$5 \cdot 10^{-10}$

$\Sigma' = 0,004 184 076$ est une valeur approchée de S' à $(5 + 5 + 1) \cdot 10^{-10}$ près.
 $4 \Sigma' = 0,016 736 304$ est une valeur approchée de $4 S'$ à $44 \cdot 10^{-10}$ près.

CALCUL DE π .

$16 \Sigma - 4 \Sigma' = 3,141 592 640$ est une valeur approchée de π à $3 \cdot 10^{-8}$ près,

On peut affirmer

$$3,141 592 61 < \pi < 3,141 592 67.$$

On peut aussi dire que 3,141 592 6 est une valeur approchée, à 10^{-7} près par défaut ou avec sept décimales exactes.

EXEMPLE II. $f(x)$ désignant la somme de la série entière

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{4!} + \dots + \frac{x^n}{(n^2)!} + \dots$$

calculer $f(1\ 000)$ avec une erreur inférieure à 10^{-7} .

On peut écrire $f(x) = \sum_0^\infty u_n$, avec $u_n = \frac{x^n}{(n^2)!}$. Pour obtenir le rayon de convergence de la série entière, appliquons la règle de d'Alembert à la série des valeurs absolues :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \frac{|x|}{n^2 + 1} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0, \quad \forall x.$$

Le rayon de convergence est infini. Le nombre $S = f(1\ 000)$ existe.

Détermination de p : $k_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\ 000}{(n^2 + 1)(n^2 + 2) \dots (n^2 + 2n + 1)}$ est une fonction décroissante de n . k_1 est supérieur à 1, mais pour $p \geq 2$ on peut majorer R_p par

$$\theta_p = \frac{k_p}{1 - k_p} u_p.$$

Pour comparer θ_p à 10^{-7} , suivant les valeurs de p , on ne peut que procéder empiriquement.

Grâce à une table donnant $n!$ pour $n \leq 15$, on obtient au moyen d'une multiplication et de trois divisions le tableau suivant :

n	n^2	$(n^2)!$	$\frac{1}{(n^2)!}$ (par défaut)
1	1	1	1
2	4	24	0,041 666 666 666 66
3	9	362 880	0,000 002 755 731 922 39
4	16	20 922 789 888 000	0,000 000 000 000 047 794 77

On en déduit des valeurs approchées par défaut des premiers termes de la série.

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 \\ v_1 &= 1\ 000 \\ v_2 &= 41\ 666,666\ 666\ 66 \\ v_3 &= 2\ 755,731\ 922\ 39 \\ v_4 &= 0,047\ 794\ 77 \end{aligned}$$

A première vue nous pouvons affirmer qu'aucun des termes étudiés n'est négligeable, c'est-à-dire qu'il nous faut garder les termes de la série au moins jusqu'à $p = 4$. D'autre part le calcul de u_5 est visiblement laborieux. Nous sommes ainsi conduits à étudier θ_4 . Écrivons

$$\frac{25!}{16!} = (17 \times 25) \times (18 \times 24) \times (19 \times 23) \times 20 \times 21 \times 22 > (20)^5 > 5 \cdot 10^{11}$$

$$k_1 = \frac{u_5}{u_4} < \frac{1\ 000}{5 \cdot 10^{11}} = 2 \cdot 10^{-9}, \quad \frac{k_4}{1 - k_4} < 3 \cdot 10^{-9}$$

et

$$R_4 < \theta_4 < (5 \cdot 10^{-2}) \times (3 \times 10^{-9})$$

ce qui montre que $p = 4$ est suffisant.

Conclusion : En retenant $R_4 < 10^{-8}$ et en remarquant que $\Sigma = \sum_{i=0}^4 v_i$ est une valeur approchée de S_4 , par défaut, à $3 \cdot 10^{-8}$ près, on peut affirmer que

$$\Sigma < S < \Sigma + 4 \cdot 10^{-8}$$

et, après avoir calculé $\Sigma = 45\,423,446\,383\,82$, que

$$45\,423,446\,383\,82 < S < 45\,423,446\,383\,86.$$

On peut dire aussi que $45\,423,446\,383\,8$ est une valeur approchée de S , à 10^{-7} près par défaut ou avec sept décimales exactes.

V. CALCUL APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE SIMPLE

271. Calcul approché d'une intégrale simple. — Alors même qu'on ne sait pas exprimer au moyen des fonctions usuelles une primitive de la fonction f , il est possible de trouver des valeurs approchées de l'intégrale simple $I = \int_a^b f(x) dx$. Il arrive d'autre part que les méthodes qui vont être exposées conduisent plus facilement à des valeurs approchées de l'intégrale simple que son expression exacte obtenue au moyen d'une primitive.

1° Emploi d'un développement en série entière. — Si la fonction $f(x)$ est développable en série entière ordonnée suivant les puissances de x dans un intervalle $] -R, +R[$ à l'intérieur duquel est compris l'intervalle $[a, b]$ d'intégration, on peut intégrer la série entière terme à terme. Si l'on suppose par exemple que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

nous avons vu (n° 216, 1°) que

$$\int_a^b f(x) dx = a_0 \frac{b-a}{1} + a_1 \frac{b^2-a^2}{2} + \dots + a_n \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Le calcul approché de l'intégrale simple est ramené au calcul approché de la somme d'une série. Ce procédé n'est avantageux que s'il n'est pas nécessaire de calculer un trop grand nombre de termes pour obtenir la somme de la série avec l'approximation désirée.

EXEMPLE. — Calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

On sait que

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \dots 2p}x^{2p} + \dots$$

le rayon de convergence de cette série étant 1. En intégrant terme à terme entre 0 et $\frac{1}{2}$ on trouve

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \dots 2p} \frac{1}{3p+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} + \dots$$

Le lecteur pourra s'assurer que la somme des deux premiers termes de cette série suffit pour obtenir comme valeur approchée de I le nombre $0,5078$ à 10^{-3} près par défaut.

2° Emploi de la formule de Taylor. — Supposons la fonction f définie, ainsi que ses n premières dérivées, sur $[a, b]$; soit F une primitive de f . Nous pouvons écrire

$$F(b) - F(a) = (b-a) F'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} F^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(c)$$

c étant compris entre a et b . Or,

$$F'(x) = f(x), \quad F''(x) = f'(x), \quad \dots \quad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),$$

et par suite

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(c).$$

Si l'on prend pour valeur approchée de l'intégrale simple la somme des n premiers termes de ce développement, on commet une erreur dite systématique dont la valeur absolue est inférieure à $\frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, M désignant un majorant de $|f^{(n+1)}(x)|$ sur $[a, b]$.

3° Méthode des trapèzes. — $a)$ Partageons le segment $[a, b]$ en n parties égales par les points de division $x_1, \dots, x_{n-1}$; les sommes

$$\sigma_1 = \frac{b-a}{n} [f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})], \quad \sigma_2 = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(b)]$$

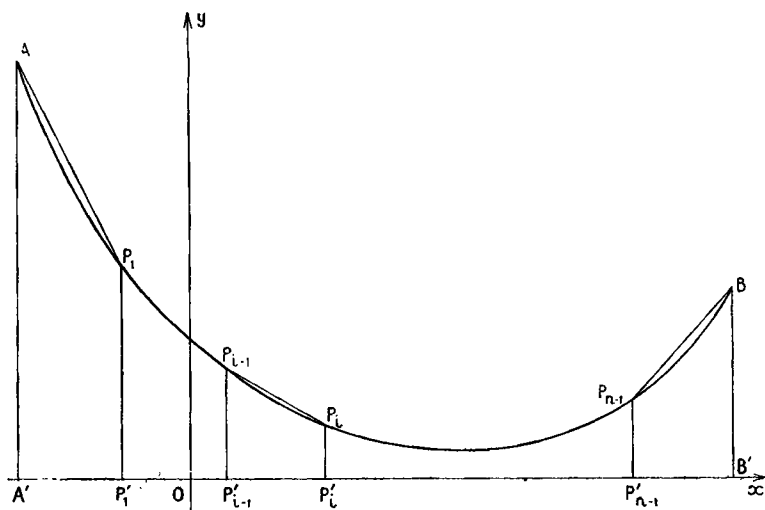


FIG. 94.

sont deux des sommes σ considérées dans la définition de l'intégrale I. On peut prendre pour valeur approchée de I la demi-somme de σ_1 et σ_2 , soit

$$T = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right].$$

On peut écrire

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \quad \text{avec} \quad T_i = \frac{b-a}{2n} [f(x_i) + f(x_{i-1})].$$

Reportons-nous à la figure 94; P_i et P_{i-1} sont les points du graphe (Γ) de la fonction f dont les abscisses sont x_i et x_{i-1} . Nous constatons que, si $f(x)$

est positif sur $[x_{i-1}, x_i]$, T_i n'est autre que l'aire du trapèze $P'_{i-1}P_{i-1}P_iP'_i$, ce qui fait donner à ce procédé le nom de *méthode des trapèzes*.

b) *Calcul d'un majorant de l'erreur systématique.* — Nous supposons que $f''(x)$ existe sur $[a, b]$. L'erreur commise sur l'un des trapèzes est, en posant $x_{i-1} = \alpha$ et $x_i = \beta$, pour alléger l'écriture,

$$E_i = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)[f(\beta) + f(\alpha)].$$

On peut écrire $E_i = \varphi(\beta)$, en introduisant la fonction

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt - \frac{1}{2}(x - \alpha)[f(x) + f(\alpha)].$$

Adjoignons la fonction $\psi(x) = (x - \alpha)^3$ et appliquons deux fois la formule des accroissements finis généralisés au quotient des fonctions φ et ψ .

On obtient

$$(1) \quad \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\psi(\beta) - \psi(\alpha)} = \frac{\varphi'(\gamma)}{\psi'(\gamma)}; \quad \gamma \in]\alpha, \beta[$$

$$(2) \quad \frac{\varphi'(\gamma) - \varphi'(\alpha)}{\psi'(\gamma) - \psi'(\alpha)} = \frac{\varphi''(\delta)}{\psi''(\delta)}; \quad \delta \in]\alpha, \gamma[\Rightarrow \delta \in]\alpha, \beta[$$

$$\text{Or } \varphi'(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(\alpha) - (x - \alpha)f'(x)]; \quad \psi'(x) = 3(x - \alpha)^2$$

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{2}(x - \alpha)f''(x); \quad \psi''(x) = 6(x - \alpha).$$

En tenant compte de $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \psi'(\alpha) = 0$, on déduit de (1) et (2)

$$\frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)} = \frac{\varphi''(\delta)}{\psi''(\delta)} \quad \text{ou} \quad \frac{E_i}{(\beta - \alpha)^3} = -\frac{1}{12}f''(\delta).$$

Désignons par M un majorant de $|f''(x)|$ sur $[a, b]$. Nous avons

$$|E_i| < \frac{M}{12}|\beta - \alpha|^3.$$

Étant donné que $\beta - \alpha = \frac{b - a}{n}$, l'erreur systématique sur chaque trapèze est majorée par $\frac{M}{12n^3}|b - a|^3$. L'erreur systématique totale est donc majorée par

$$\frac{M}{12n^2}|b - a|^3.$$

c) *Sens de l'approximation.* Si $f''(x)$ garde un signe fixe sur $[a, b]$, on est en mesure de dire si T est une valeur approchée de I par excès ou par défaut.

C'est ainsi que si $a < b$ et si $f''(x) > 0$, chacun des nombres E_i est négatif; on a $I - T < 0$; T est une valeur approchée par excès de I .

d) **EXEMPLE.** — Calculer une valeur approchée de $I = \int_0^2 10^{-x^2} dx$, en divisant l'intervalle (0,2) en vingt parties égales.

I. Nous disposons d'une table à 4 décimales donnant les valeurs de la fonction 10^x , lorsque x varie par centièmes de 0 à 1. Nous obtenons une valeur approchée à $5 \cdot 10^{-6}$ près de $10^{-x_i^2} = \frac{1}{10^p} \times 10^{p-x_i^2}$ par simple déplacement d'une virgule.

x_i	$-x_i^2$	$10^{-x_i^2}$	x_i	$-x_i^2$	$10^{-x_i^2}$
0,1	— 1 + 0,99	0,977 24	1,1	— 2 + 0,79	0,061 67
0,2	— 1 + 0,96	0,912 01	1,2	— 2 + 0,56	0,036 31
0,3	— 1 + 0,91	0,812 83	1,3	— 2 + 0,31	0,020 42
0,4	— 1 + 0,84	0,691 83	1,4	— 2 + 0,04	0,010 97
0,5	— 1 + 0,75	0,562 34	1,5	— 3 + 0,75	0,005 62
0,6	— 1 + 0,64	0,436 52	1,6	— 3 + 0,44	0,002 75
0,7	— 1 + 0,51	0,323 59	1,7	— 3 + 0,11	0,001 29
0,8	— 1 + 0,36	0,229 09	1,8	— 4 + 0,76	0,000 58
0,9	— 1 + 0,19	0,154 88	1,9	— 4 + 0,39	0,000 25
		5,100 33			0,139 86

Nous avons en outre

$$f(1) = 0,1; \quad f(a) + f(b) = f(0) + f(2) = 1,000 10$$

En tenant compte de $\frac{b-a}{n} = 0,1$ nous en déduisons une valeur approchée $\bar{T}$ de T

$$\bar{T} = 0,1 [0,500 05 + 0,1 + 5,100 33 + 0,139 86] = 0,584 024$$

$$|T - \bar{T}| < 0,1 [18,5 \cdot 10^{-6}] = 9 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}.$$

Nous remplacerons T par $T^* = 0,584$, ce qui introduit une deuxième erreur de calcul égale à $24 \cdot 10^{-6}$ et par suite inférieure à $3 \cdot 10^{-5}$. Retenons donc

$$T^* = 0,584; \quad |T - T^*| < 4 \cdot 10^{-5}.$$

II. Calculons maintenant

$$f(x) = e^{-x^2 \text{Log} 10}$$

$$f'(x) = -2x f(x) \times \text{Log} 10$$

$$f''(x) = 2f(x)[-1 + 2x^2 \text{Log} 10] \times \text{Log} 10$$

$$f'''(x) = 4xf(x)[+3 - 2x^2 \text{Log} 10] \times (\text{Log} 10)^2$$

$$f''' \text{ admet sur } [0,2] \text{ le zéro } x_0 = \sqrt{\frac{3}{2 \text{Log} 10}}; \quad 0,80 < x_0 < 0,81.$$

On en déduit que f'' admet sur $[0,2]$ le maximum $f''(x_0)$ et le minimum $f''(0)$.

$$f''(x_0) = 2f(x_0)[-1 + 3] \times \text{Log} 10 = +4f(x_0) \times \text{Log} 10 < \text{Log} 10, \text{ d'après } f(x_0) < f(0,8) < 0,25.$$

$$f''(0) = -2 \text{Log} 10. \text{ On a donc } \sup |f''(x)| = 2 \text{Log} 10 < 4,61.$$

Un majorant de l'erreur systématique $I - T$ est

$$\frac{|b-a|^3}{12n^2} \sup |f''(x)| < \frac{8}{4800} 4,61 < 77 \cdot 10^{-4}.$$

III. $T^* = 0,584$ est ainsi une valeur approchée de I avec une erreur inférieure à $77 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-5}$ et *a fortiori* à $8 \cdot 10^{-3}$. Le sens de l'approximation est inconnu.

4° **Extension au calcul d'une intégrale généralisée.** — Nous allons nous borner à traiter deux exemples :

EXEMPLE I. — Calcul de $J = \int_0^{+\infty} 10^{-x^2} dx$. Cette intégrale a un sens; en effet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 10^{-x^2} = 0$$

A désignant un nombre positif quelconque posons

$$J(A) = \int_0^A 10^{-x^2} dx \quad \text{et} \quad R(A) = \int_A^{+\infty} 10^{-x^2} dx.$$

Nous avons $J = J(A) + R(A)$.

Comme $x > A$ entraîne $10^{-x^2} < \frac{x}{A} 10^{-x^2}$ nous avons

$$R(A) < \frac{1}{2 A \text{Log} 10} \int_A^{+\infty} 2 x \text{Log} 10 \cdot 10^{-x^2} dx = \frac{1}{2 A \text{Log} 10} \left[-10^{-x^2} \right]_A^{+\infty}$$

et

$$0 < R(A) < \frac{10^{-A^2}}{2 A \text{Log} 10}.$$

En choisissant $A = 2$ nous trouvons $0 < R(2) < 11 \cdot 10^{-4}$.

Le calcul précédent ayant montré que 0,584 est une valeur approchée de $J(2)$ avec une erreur inférieure à $782 \cdot 10^{-4}$, nous pouvons affirmer que 0,584 est une valeur approchée de J avec une erreur inférieure à $8 \cdot 10^{-3}$.

EXEMPLE II. — Calcul de $K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Cette intégrale a un sens; en effet $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ est un infiniment grand d'ordre $\frac{1}{2}$ par rapport à $\frac{1}{1-x}$. Écrivons

$$K_1 = \int_0^{0,9} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}; \quad K_2 = \int_{0,9}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}; \quad K = K_1 + K_2.$$

La méthode des trapèzes permet d'obtenir une valeur approchée de K_1 . Cherchons un encadrement de K_2 . Pour cela utilisons, en tenant compte de $\sqrt{1,81} \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$ sur $[0,9; 1]$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{1}{\sqrt{1,81}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nous en déduisons

$$0,70 L < K_2 < 0,76 L; \quad L = \int_{0,9}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le nombre L s'écrit $\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } 0,9$; une valeur approchée est

$$L^* = 1,57080 - 1,11977 = 0,45103$$

avec une erreur inférieure à 10^{-4} .

A l'erreur introduite par l'application de la méthode des trapèzes au calcul de K_1 , s'ajoute ici une erreur systématique sur K_2 . Cette erreur est majorée par

$$0,06 L < 0,06 \times 0,452 < 0,028$$

On tiendra compte de ce résultat dans le choix du nombre n des trapèzes. Nous laissons au lecteur le soin d'achever le calcul.

5° **Méthode graphique.** — L'intégrale simple $I = \int_a^b f(x) dx$ est la mesure algébrique d'une aire; toute évaluation approchée de cette aire constitue une évaluation approchée de l'intégrale. Nous supposons $a < b$ et $f(x)$ positive sur $[a, b]$; nous avons à évaluer de façon approchée l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par l'axe Ox , l'arc AB du graphe (Γ) de $f(x)$, et par les ordonnées extrêmes $A'A$ et $B'B$ (fig. 94). Si (Γ) peut être dessinée avec précision sur du papier quadrillé au millimètre (papier millimétrique), l'intégrale I est comprise entre

l'aire $\mathcal{A}_1$ du polygone formé par tous les carreaux intérieurs à $\mathcal{D}$, et l'aire $\mathcal{A}_2$ du polygone formé en ajoutant au précédent l'ensemble des carreaux qui sont traversés par l'arc AB. On adoptera comme valeur approchée de I la quantité $\frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}{2}$, l'erreur est au plus égale à $\frac{\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1}{2}$.

VI. NOTIONS SUR LES ABAQUES

272. Échelles. — 1° **Définitions.** — Une échelle rectiligne s'obtient en considérant sur une droite une suite de points et en associant à chacun d'eux un nombre réel qui est appelé la *cote* du point considéré. La distance de deux points consécutifs est le *pas*, la différence de leurs cotes (en général constante) est l'*échelon*.

2° **Échelles métriques.** — On appelle ainsi les échelles d'usage courant dans lesquelles l'échelon et le pas sont constants.

3° **Échelles fonctionnelles.** f étant une fonction monotone donnée, le point M coté x s'obtient en orientant le support et en portant $OM = l.f(x)$; l est une longueur préalablement choisie, appelée *module*.

REMARQUE. — On peut concevoir des échelles fonctionnelles sur toute courbe rectifiable (cf. tome IV); le point M coté x s'obtient en orientant le support et en construisant le point M dont l'abscisse curviligne est $l.f(x)$.

EXEMPLE. — Considérons une règle à calculs de 25 cm dont on a enlevé la réglette et le curseur. L'échelle supérieure est métrique; elle est graduée de 0 à 25, le pas étant le centimètre. L'échelle inférieure est logarithmique; elle est graduée de 1 à 10; étant donné que $f(10) - f(1) = \log 10 - \log 1 = 1$, le module de cette échelle inférieure est égal à 25 centimètres.

273. Abaques cartésiens. — 1° Dans toute la suite nous allons essayer de représenter graphiquement, en géométrie plane, des relations entre trois variables x, y, z .

Dans l'espace à trois dimensions rapporté à un trièdre trirectangle dont les axes $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ portent des échelles fonctionnelles quelconques, toute relation $F(x, y, z) = 0$ est représentée par une surface (S). Désignons par (C_k) la projection sur xOy de la section de (S) par le plan d'équation $z = k$. L'ensemble infini des courbes (C_k) représente aussi bien que la surface (S) la relation $F(x, y, z) = 0$. Dans la pratique, on trace soigneusement un nombre fini de courbes (C_k) ; à côté de chacune d'elles on note la valeur du paramètre qui lui correspond. Le faisceau coté obtenu, associé à un quadrillage coté du plan xOy (formé par des droites parallèles aux axes) est dit *abaque cartésien*. On se limite au cas où il existe une correspondance biunivoque entre la surface (S) et le plan xOy ; deux courbes (C_k) n'ont alors aucun point commun.

2° L'utilisation d'un abaque cartésien est double :

a) le couple (x_0, y_0) étant donné on cherche z tel que $F(x_0, y_0, z) = 0$. Au couple (x_0, y_0) correspond un point et un seul du plan xOy . Si M_0 appartient à une courbe (C_k) , on a la solution $z = k$; dans le cas contraire on effectue une interpolation à vue.

b) le couple (x_0, z_0) étant donné on cherche y tel que $F(x_0, y, z_0) = 0$. Une solution est l'ordonnée d'un point de la courbe (C_{z_0}) — éventuellement construite par interpolation — dont l'abscisse est x_0 .

EXEMPLE. — La famille des hyperboles $xy = k$ peut jouer à la fois le rôle d'une table de multiplication et d'une table de division.

3° La construction d'un abaque cartésien est délicate. Si la fonction $F(x, y, z)$ a une expression mathématique faisant intervenir des fonctions connues, chacune des (C_k) peut être considérée comme une courbe plane déterminée par son équation implicite et on est conduit à un problème qui sera traité dans le tome IV. Si la relation entre x, y, z est empirique on dispose en général initialement d'un tableau à double entrée. Ce tableau fournit les cotes z d'un nombre fini de points $M(x, y)$ du plan xOy ; nous n'insisterons pas sur les méthodes graphiques qui permettent de déduire de cet ensemble de points un faisceau coté.

274. *Anamorphose*. — 1° **Définition**. — On appelle *anamorphose* toute transformation permettant de ramener à des droites les courbes d'un abaque cartésien.

Nous n'étudierons pas les méthodes graphiques d'anamorphose. Bornons-nous à montrer que toute relation $F(x, y, z) = 0$ susceptible d'être mise sous la forme

$$(I) \quad f_1(x) + f_2(y) = f_3(z)$$

peut être anamorphosée.

Construisons les échelles fonctionnelles respectivement portées par deux axes perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$ et définies par

$$\overline{OM_1} = l_1 f_1(x) \quad \text{et} \quad \overline{OM_2} = l_2 f_2(y).$$

La courbe (C_k) de l'abaque est le lieu des points M du plan dont les projections M_1 et M_2 sur les axes sont liées par

$$\frac{1}{l_1} \overline{OM_1} + \frac{1}{l_2} \overline{OM_2} = f_3(k)$$

Il s'agit bien d'une droite.

2° Les relations suivantes peuvent se ramener à la forme (I) :

a) Forme $g_1(x) \cdot g_2(y) = g_3(z)$: il suffit de poser $f_i = \text{Log } |g_i|$.

b) Forme $h_1(x) \cdot h_2(y) \cdot h_3(z) = A$: cas particulier du précédent dans lequel

$$g_1 = h_1; \quad g_2 = h_2; \quad g_3 = \frac{A}{h_3}$$

c) Forme $g_2(y) g_3(z) + g_1(x) g_3(z) = g_1(x) g_2(y)$: on l'écrit

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} = \frac{1}{g_3} \quad \text{qui est de la forme (I), à condition de poser}$$

$$\frac{1}{g_1(x)} = f_1(x); \quad \frac{1}{g_2(y)} = f_2(y); \quad \frac{1}{g_3(z)} = f_3(z).$$

275. Abaques à points alignés. — 1^o **Principe.** — Considérons dans

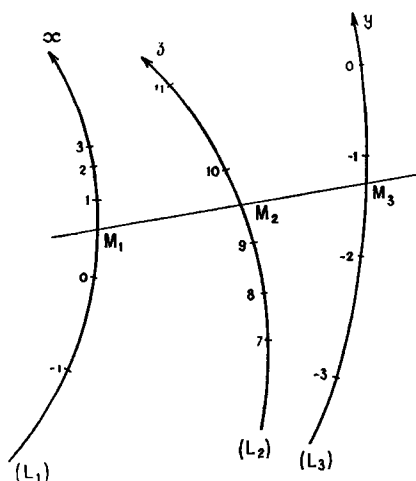


FIG. 95.

un plan trois courbes (L_1) , (L_2) , (L_3) quelconques (fig. 95) qui portent des échelles fonctionnelles quelconques, représentant les valeurs de variables x , y , z . Imposer à trois points M_1 , M_2 , M_3 respectivement pris sur (L_1) , (L_2) , (L_3) d'être alignés équivaut à lier les cotes x , y , z de ces points par une relation; en effet la valeur de deux des cotes détermine celle de la troisième.

2^o **Forme canonique des relations représentables par un abaque à points alignés dans lequel les trois supports sont des droites parallèles.** — a) les trois supports (fig. 96) sont orientés dans le même sens; sur ces supports les origines sont des points fixes O_1 , O_2 , O_3 que nous supposons alignés; les mesures algébriques $\overline{O_1M_1}$, $\overline{O_2M_2}$, $\overline{O_3M_3}$ sont mesurées avec la même unité de longueur. La relation qui exprime l'alignement de M_1 , M_2 , M_3 s'obtient en écrivant que, dans le système de référence formé par les droites O_1O_2 et (L_1) , les droites M_1M_3 et M_2M_3 ont le même coefficient directeur, soit

$$\frac{\overline{O_1M_1} - \overline{O_3M_3}}{\overline{O_1O_3}} = \frac{\overline{O_2M_2} - \overline{O_3M_3}}{\overline{O_2O_3}}$$

qui s'écrit, en utilisant

$$\overline{O_1O_3} - \overline{O_2O_3} = \overline{O_1O_2},$$

$$(1) \quad \overline{O_2O_3} \times \overline{O_1M_1} + \overline{O_3O_1} \times \overline{O_2M_2} + \overline{O_1O_2} \times \overline{O_3M_3} = 0.$$

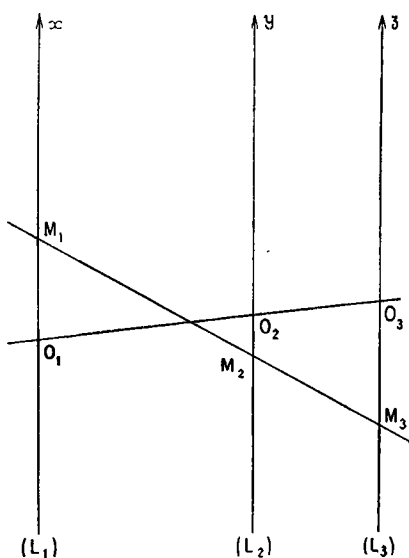


FIG. 96.

Or $\overline{O_1M_1}$, $\overline{O_2M_2}$, $\overline{O_3M_3}$ sont respectivement des fonctions des cotes x , y , z de M_1 , M_2 , M_3 sur les échelles fonctionnelles portées par les droites (L_1) , (L_2) , (L_3) . Il en résulte que l'alignement de M_1 , M_2 , M_3 se traduit par une relation de la forme

$$(I) \quad f_1(x) + f_2(y) = f_3(z)$$

et que toute relation représentable par abaque à points alignés dans lequel les supports sont des droites parallèles doit pouvoir se mettre sous la forme (I).

b) Réciproquement donnons-nous une relation de la forme (I), dans laquelle f_1 , f_2 , f_3 sont des fonctions arbitraires et montrons que l'on peut d'une infinité de manières la représenter par un abaque à points alignés dans lequel les supports sont des droites parallèles.

Sur trois supports parallèles (L_1) , (L_2) , (L_3) arbitrairement choisis, marquons trois points alignés O_1 , O_2 , O_3 arbitrairement choisis. Considérons les trois échelles fonctionnelles définies par

$$\overline{OM_1} = l_1 f_1(x); \quad \overline{OM_2} = l_2 f_2(y); \quad \overline{OM_3} = l_3 f_3(z)$$

les modules l_1 , l_2 , l_3 étant pour le moment indéterminés.

D'après l'étude directe, l'alignement de M_1 , M_2 , M_3 équivaut à la relation (I) qui s'écrit ici

$$l_1 \overline{O_2O_3} f_1(x) + l_2 \overline{O_3O_1} f_2(y) = l_3 \overline{O_2O_1} f_3(z).$$

Cette relation n'est autre que (I) si on lie les modules par les deux relations

$$l_1 \overline{O_2O_3} = l_2 \overline{O_3O_1} = l_3 \overline{O_2O_1}.$$

Autrement dit on dispose encore du choix de l'un des modules.

REMARQUE. — Nous avons vu au n° 274 comment certaines relations se ramènent à la forme (I).

3° Forme canonique des relations représentables par un abaque à points alignés dans lequel deux des supports sont des droites parallèles. — *a)* (L_1) et (L_2) sont encore des droites parallèles, mais (L_3) est une courbe quelconque. Reprenons le calcul direct précédent, en remplaçant O_3 par la projection H de M_3 sur la droite O_1O_2 . La formule (1), qui traduit l'alignement de M_1 , M_2 , M_3 devient

$$(2) \quad \overline{O_2H} \times \overline{O_1M_1} + \overline{HO_1} \times \overline{O_2M_2} = \overline{O_2O_1} \times \overline{HM_3}.$$

Ici $\overline{O_1M_1}$ et $\overline{O_2M_2}$ sont respectivement des fonctions de x et y ; $\overline{O_2H}$, $\overline{HO_1}$ et $\overline{HM_3}$ sont des fonctions de la cote z de M_3 comptée sur l'échelle fonctionnelle portée par la courbe (L_3) . Il en résulte que l'alignement de M_1 , M_2 , M_3 se traduit par une relation de la forme

$$(II) \quad f_1(x) g_3(z) + f_2(y) h_3(z) = f_3(z).$$

b) Réciproquement donnons-nous une relation de la forme (II), dans

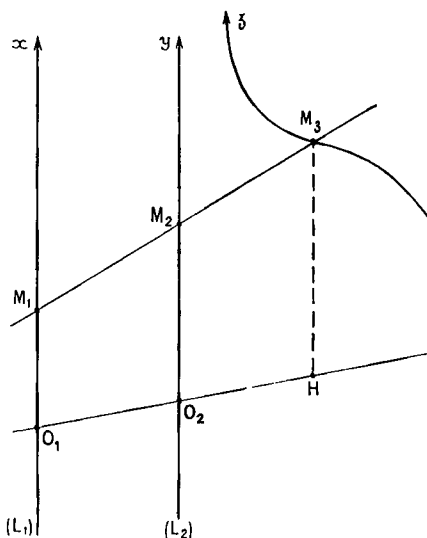


FIG. 97.

laquelle f_1, f_2, f_3, g_3, h_3 sont des fonctions arbitraires. Portons sur deux droites parallèles quelconque $(L_1), (L_2)$, à partir d'origines quelconques O_1 et O_2 les échelles fonctionnelles

$$\overline{O_1 M_1} = l_1 f_1(x);$$

$$\overline{O_2 M_2} = l_2 f_2(y)$$

les modules l_1 et l_2 sont eux aussi arbitrairement choisis.

Nous allons montrer qu'il existe une échelle fonctionnelle curviligne (L_3) qui forme avec les deux échelles précédentes un abaque qui représente la relation (II).

L'alignement de M_1, M_2 et d'un point quelconque M_3 du plan équivaut, d'après la relation (2), à

$$l_1 (\overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 H}) f_1(x) - l_2 \overline{O_1 H} f_2(x) = \overline{O_2 O_1} \times \overline{H M_3}.$$

Cette relation n'est autre que II si on lie $\overline{O_1 H}$ et $\overline{H M_3}$ à z par les deux relations

$$\frac{l_1 (\overline{O_1 H} - \overline{O_1 O_2})}{g_3(z)} = -\frac{l_2 \overline{O_1 H}}{h_3(z)} = -\frac{\overline{O_2 O_2} \times \overline{H M_3}}{f_3(z)}$$

qui s'écrivent

$$(3) \quad \overline{O_1 H} = l_1 \overline{O_1 O_2} \frac{h_3(z)}{l_1 h_3(z) + l_2 g_3(z)}; \quad \overline{H M_3} = l_1 l_2 \frac{f_3(z)}{l_1 h_3(z) + l_2 g_3(z)}.$$

Les relations (3), qui s'écrivent vectoriellement $\overrightarrow{O_1 M_3} = \vec{G}(z)$, où $\vec{G}$ est une fonction connue, représentent une courbe déterminée paramétriquement; c'est ce que nous appelons ici l'échelle fonctionnelle (L_3) .

CAS PARTICULIER DE L'ABAQUE EN N. — Il s'agit du cas où (L_3) est une droite, oblique par rapport à (L_1) et (L_2) . Reprenons le calcul direct qui a conduit à la formule (2), en choisissant pour origines sur (L_1) et (L_2) les points d'intersection de ces droites avec (L_3) . On a alors $\overline{H M_3} = 0$; l'alignement de M_1, M_2, M_3 est traduit par

$$(4) \quad \overline{O_2 H} \times \overline{O_1 M_1} + \overline{H O_1} \times \overline{O_2 M_2} = 0$$

de la forme

$$(III) \quad f_1(x) g_3(z) + f_2(y) h_3(z) = 0$$

qui peut s'écrire (IV)

$$F_1(x) = F_2(y) F_3(z).$$

Inversement si nous nous donnons *a priori* (IV) c'est-à-dire (III), la réciproque précédente s'applique, avec cette fois $f_3(z) = 0$. Les formules (3) représentent une échelle fonctionnelle portée par la droite O_1O_2 .

EXERCICES

Tous les calculs doivent trouver leur place sur la feuille. La disposition adoptée pour la présentation de ces calculs est un élément important de la note attribuée à la composition. Une légende très simple et très claire est suffisante pour que le correcteur s'y reconnaisse.

1. — Le calcul suivant doit être fait à la main :

a) Vérifier les relations

$$(1) \quad \begin{cases} 7 \operatorname{Log} 2 - 3 \operatorname{Log} 5 = \operatorname{Log}(1 + 24 \cdot 10^{-3}) = a \\ 4 \operatorname{Log} 3 - 4 \operatorname{Log} 2 - \operatorname{Log} 5 = \operatorname{Log}(1 + 125 \cdot 10^{-4}) = b \\ 3 \operatorname{Log} 3 - 2 \operatorname{Log} 5 = \operatorname{Log}(1 + 8 \cdot 10^{-3}) = c. \end{cases}$$

b) Calculer des valeurs approchées à 10^{-7} près de a , b , c en utilisant le développement en série entière de $\operatorname{Log}(1 + x)$.

c) Résoudre le système (1) dans lequel les inconnues sont $\operatorname{Log} 2$, $\operatorname{Log} 3$ et $\operatorname{Log} 5$.

d) S'inspirer de la méthode précédente pour obtenir une valeur approchée de $\operatorname{Log} 7$.

2. — Les calculs suivants doivent être effectués avec une règle à calcul de 25 cm environ.

Dans l'espace R^3 rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A .

Donner, pour la seule valeur propre de plus grand module, une estimation de l'erreur avec laquelle la valeur approchée trouvée la représente.

b) Déterminer un repère orthonormé de R^3 , soit $OXYZ$, dont les vecteurs unitaires (que l'on définira par leurs composantes par rapport à $Oxyz$) sont vecteurs propres de A .

c) Dédurre de ce qui précède l'équation réduite de la quadrique (S) définie dans le repère $Oxyz$ par l'équation :

$$x^2 - z^2 + 2yz - 2zx + 4xy = 1.$$

On indiquera la nature de (S) et les éléments remarquables (sommets, pentes des asymptotes) des coniques, sections de (S) par ses plans principaux.

3. — a) Étudier et construire sur un même graphique les courbes représentatives (C_1) et (C_2) des fonctions

$$\begin{aligned} (C_1) \quad & y = x^2 \log_3 x \\ (C_2) \quad & x^3 - 5x + y^2 = 1 \end{aligned}$$

($\log_3 x$ représente le logarithme de x dans le système à base 3).

On déterminera avec la précision que permet l'utilisation de la table des logarithmes décimaux à cinq décimales, les coordonnées de tous les points remarquables de (C_1) et de (C_2).

b) (C_1) et (C_2) se coupent en un point A dont on demande de calculer les coordonnées à 1/100 près.

On utilisera au maximum toute représentation graphique permettant d'orienter le cours des calculs numériques.

4. — a) Montrer que la série : $u_1 + u_2 + \dots + u_{2p-1} + \dots$

avec :
$$u_{2p-1} = (-1)^{p-1} \frac{8p^3 - 8p^2 + 6p - 3}{2(1 + 4p^2)(1 - 2p + 2p^2)}$$

est convergente. Encadrer sa somme S par deux nombres dont la différence n'excède pas 10^{-3} .

b) Avec l'approximation permise par les tables de logarithmes à 5 décimales, déterminer une valeur approchée de :

$$x = \frac{\pi e^{\frac{1}{2}} - \operatorname{sh} \pi}{2 \operatorname{sh} \pi}.$$

5. — a) On considère la série :

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \dots + \frac{1}{(8p+1)^3} + \frac{1}{(8p+3)^3} - \frac{1}{(8p+5)^3} - \frac{1}{(8p+7)^3} + \dots$$

Calculer la valeur numérique de la somme S de cette série à 10^{-4} près.

b) On considère ensuite l'équation :

$$x^3 - \frac{\pi^2}{32}x + S = 0$$

qui n'a qu'une racine réelle. Calculer cette racine réelle en utilisant la valeur approchée de S précédemment obtenue.

Pour faire ce calcul on déterminera d'abord un angle φ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ défini par :

$$\sin \varphi = \frac{\pi^2 \cdot \sqrt{6}}{1152 S}$$

puis un angle θ donné par :

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}.$$

La racine réelle cherchée sera fournie par la formule :

$$x = \frac{-\pi \cdot \sqrt{6}}{12 \sin 2\theta}.$$

6. — On pose : $f(x) = \frac{1}{x^2}(1 - e^{-x^2})$; $A = \int_0^1 f(x) dx$.

a) Trouver une valeur approchée de A , à 10^{-4} près, en utilisant un développement en série entière de $f(x)$.

b) Calculer A par la méthode des trapèzes, en subdivisant $[0, 1]$ en dix segments égaux. Quel est l'ordre de l'approximation de A ainsi obtenue?

7. — On pose : $z = y_1^{65} y_2^{338} y_3^{96} y_4^{126}$, avec

$$\begin{aligned} y_1 &= (1-x)^2; & y_2 &= (1-x)(1-2x); \\ y_3 &= (1-2x)(1-3x); & y_4 &= (1-4x)^2. \end{aligned}$$

a) Séparer les zéros de $\frac{dz}{dx}$.

b) Calculer par itération et avec trois décimales exactes celui de ces zéros qui est compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

8. — On donne la série entière, convergente quel que soit x réel,

$$f(x) = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2} + \dots$$

a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$ à 10^{-3} près.

Montrer que $x < 2 \implies f'(x) < 0$ et $f''(x) > 0$.

b) Sur $] -\infty, 2[$, la fonction $f(x)$ a un zéro unique, α , voisin de 1,2.

Calculer $f(1,5)$ et $f'(1,5)$ à 10^{-3} près. En déduire une nouvelle valeur approchée β de α .

c) Calculer $f(\beta)$ à 10^{-4} près et donner un intervalle aussi petit que possible qui contient α .

9. — Le polynôme $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$
a trois zéros réels a, b, c .

Calculer des valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut de a, b, c .

On pose :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}.$$

Calculer des valeurs approchées à 10^{-n} près par défaut de A, B, C (n est choisi aussi grand que possible).

10. — Dans un triangle isocèle $A'B'C'$ ($A'B' = A'C'$), le cercle circonscrit E' a pour rayon 1; on désigne par 2φ la mesure de l'angle A' . E' et $A'B'C'$ se projettent sur un plan parallèle à la droite $B'C'$ suivant l'ellipse E et le triangle isocèle ABC . Soit e l'excentricité de E , $2p$ le périmètre de ABC .

a) Lorsque φ varie, e étant fixe, p varie. Montrer que p est minimum lorsqu'on a

$$(1) \quad e = \frac{\sqrt{1 - 2 \sin \varphi}}{(1 - \sin \varphi) \cos \varphi}$$

et que le minimum est donné par la relation

$$(2) \quad p = \frac{(2 - \sin \varphi) \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2}.$$

b) On choisit $e = 0,1$ et φ de façon que $2p$ soit minimum. Calculer une valeur approchée de $\sin \varphi$ avec une erreur absolue inférieure à 10^{-3} . A cet effet on posera $\sin \varphi = \frac{1}{2} - z$ et on mettra l'équation (1) sous la forme

$$f(z) = 0$$

où $f(z)$ est un polynôme dans lequel le coefficient de z^4 est 2.

c) Calculer ensuite une valeur approchée du minimum de $2p$, en supposant toujours

$$e = 0,1.$$

11. — L'équation différentielle $2y'^3 + xy'^2 - y = 0$ possède une courbe intégrale algébrique (C) passant par le point de coordonnées :

$$x = 1,25; \quad y = -0,75.$$

a) Déterminer (C).

b) Construire (C).

c) Calculer l'ordonnée Y du point de (C) d'abscisse $x = -1$. On donnera (avec justification) un encadrement de Y d'amplitude inférieure à 10^{-4} .

12. — On désigne par $z(x)$ la solution de l'équation différentielle : $y' = x^2 + y^3$ telle que

$$z(0) = 0.$$

a) On pose :

$$u(x) = e^{-\int_0^x z(t) dt}$$

Montrer que $u(x)$ vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre. En déduire une expression de $z(x)$ sous forme du quotient de deux séries entières.

b) Calculer $z(1)$ avec une erreur absolue inférieure à 10^{-4} .

c) Calculer, à 10^{-2} près, la plus petite valeur positive de x pour laquelle $z(x)$ n'est pas définie.

13*. — a) Intégrer l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} = e^y - x$$

en posant $y = -\text{Log } z$; l'intégrale générale contient un signe $\int$.

b) Indiquer par un croquis l'allure des courbes intégrales, en donnant leur concavité. On construira le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales et le lieu des points où ces courbes admettent une tangente parallèle à Ox .

c) Soit $A(0,1)$. Calculer le rayon de courbure de la courbe intégrale (C) qui passe par A, avec une erreur absolue inférieure à 10^{-2} .

a) Trouver l'abscisse de l'asymptote de (C) avec une erreur absolue inférieure à 10^{-2} .

14. — On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x(1-x)y'' + (2-3x)y' - y = 0.$$

a) Trouver une intégrale particulière de (E) développable en série entière. Intégrer (E).

b) $z(x)$ désigne l'intégrale de (E) qui vérifie

$$z(2) = \frac{1}{2}; \quad z'(2) = \frac{1}{4}.$$

Calculer, avec toute la précision possible, la valeur du maximum de $z(x)$ sur $[1, +\infty[$.

15*. — Dans le plan rapporté au repère orthonormé xOy , M et M' sont les points d'intersection de $H(xy = 1)$ et de $D(x + y = h, h > 2)$.

On demande, avec trois décimales exactes, la limite Δ , pour h infini, de la différence entre la longueur de la ligne brisée MOM' et celle de l'arc MM' de l'hyperbole.

On définira M par le paramètre u double de l'angle de Ox et de la demi-normale en M dirigée vers la concavité de H. On écrira $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du$ et on calculera

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(u) du : \text{ en utilisant le développement en série de } u = \text{Arc sin } t$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(u) du : \text{ par la méthode des trapèzes.}$$

On justifiera avec soin l'approximation obtenue.

$$16*. — \text{ On pose : } z = u + 2i\pi v, \quad Z = X + iY, \quad Z = \frac{\text{th } z}{z}.$$

a) Expliciter X et Y en fonction de u et v .

b) Calculer X et Y, à 10^{-3} près, pour les quatre couples formés par les valeurs

$$u = 0,8 \text{ et } 0,9; \quad v = 0,20 \text{ et } 0,22.$$

c) En se servant des résultats précédents et en introduisant un graphique donner une valeur approchée d'une racine de l'équation

$$(E) \quad \text{th } z = 0,6(1 - i)z.$$

Chercher une autre valeur approchée de cette même racine en appliquant la méthode de Newton à (E) en l'un des quatre points pour lesquels on a déterminé $\frac{\text{th } z}{z}$ (on admettra que l'emploi de la méthode de Newton est justifié en variables complexes).

CHAPITRE XXI

INTRODUCTION AXIOMATIQUE DES FONCTIONS CIRCULAIRES

276. — Dans ce tome II nous nous sommes contentés de la définition des fonctions circulaires donnée dans les classes précédentes; cette manière de faire suppose acquis les axiomes de la géométrie élémentaire. Mais certains lecteurs souhaitent légitimement écarter tout appel à la géométrie dans la construction de l'analyse.

A leur intention, nous allons donner ici une définition des fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$ indépendante de tout support géométrique; nous retrouverons que ces fonctions sont continues et dérivables sur $]-\infty, +\infty[$ et qu'elles admettent une période commune, désignée par 2π . Il en résulte que, pour lire l'étude qui va suivre, le lecteur est prié d'oublier les démonstrations qu'il a trouvées au n° 41, 4° (limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0), au n° 53, 5°, c) (continuité de $\sin x$ et $\cos x$), aux n°s 72, 1° et 72, 2° (dérivabilité), au n° 116, 2° (développements limités), enfin au n° 218 (développements en série entière).

Nous utiliserons essentiellement les deux résultats suivants respectivement établis au n° 224 du tome II et au n° 78 du tome I.

a) Quel que soit le nombre complexe z , la série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

est absolument convergente. Sa somme est représentée par e^z . On a

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}.$$

b) L'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1 est un groupe multiplicatif abélien.

277. Fonctions circulaires de la variable complexe. — 1° DÉFINITION.
A tout nombre complexe z on associe les deux sommes

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

qui sont respectivement appelées cosinus et sinus de z .

Cela revient à désigner par $\cos z$ et $\sin z$ les sommes des deux séries entières suivantes, dont le rayon de convergence est infini,

$$(1) \quad \begin{cases} \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} + \dots \\ \sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \dots \end{cases}$$

Observons aussi que

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{et} \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

$$\text{que} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

ce qui entraîne, en multipliant membre à membre,

$$(2) \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

2° Formules d'addition. — Nous avons $2 \cos(a+b) = e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}$.
Explicitons le second membre :

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) + (\cos a - i \sin a)(\cos b - i \sin b).$$

On en déduit

$$(3) \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

De même
conduit à

$$(4) \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

3° Continuité et dérivabilité. — Nous savons que la somme d'une série entière de la variable complexe est une fonction continue et dérivable à l'intérieur du cercle de convergence. Les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont donc continues et dérivables pour tout z . En dérivant les développements (1) on constate

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

278. Fonctions circulaires de la variable réelle. — Si, dans l'étude précédente, nous nous limitons à $z \in \mathbb{R}$, nous constatons que les nombres $\cos z$ et $\sin z$ sont réels. Énonçons :

1° DÉFINITION. — On appelle cosinus et sinus les fonctions réelles de la variable réelle définies sur $]-\infty, +\infty[$ par

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \dots$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \dots$$

La fonction $\cos x$ est paire, la fonction $\sin x$ est impaire. On a

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Les formules d'addition établies au n° 277 sont valables.

Les fonctions cosinus et sinus sont continues et dérivables sur $]-\infty, +\infty[$, et, plus généralement, admettent des dérivées successives de tous ordres. On a

$$(\cos x)' = -\sin x; \quad (\sin x)' = \cos x.$$

Remarquons enfin que $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.

REMARQUE. — En utilisant la définition de la dérivée de $\sin x$ au point $x = 0$, on trouve

$$\cos 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2° Période. — Pour $x \neq 0$ nous avons :

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_0^{\infty} (-1)^p u_p \quad \text{avec} \quad u_p = \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}.$$

Si nous nous limitons à $x \in]0, 2]$, il s'agit d'une série alternée dans laquelle la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant : en effet

$$x^2 \leq 4 \implies (\forall p), \quad x^2 < (2p+2)(2p+3) \quad \text{ou} \quad u_p > u_{p+1}.$$

D'après le n° 202, nous pouvons donc écrire :

$$\forall x \in]0, 2], \quad 1 < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} \implies \sin x > 0.$$

Sur l'intervalle $[0, 2]$ la fonction $\cos x$ (dont la dérivée est $-\sin x$) est donc décroissante; sa valeur initiale est $\cos 0 = 1$; sa valeur finale est

$$\cos 2 = \sum_0^{\infty} (-1)^p v_p \quad \text{avec} \quad v_p = \frac{2^{2p}}{(2p)!}.$$

Nous constatons que :

$$\forall p \geq 1, \quad 4 < (2p+1)(2p+2) \quad \text{ou} \quad v_p < v_{p+1}.$$

D'après le n° 202, nous pouvons donc écrire

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} \implies \cos 2 < 0.$$

La fonction $\cos x$ admet donc un, et un seul, zéro sur $[0, 2]$; nous le désignons par $\frac{\pi}{2}$ (on montre $\cos 1 > 0$, donc : $1 < \frac{\pi}{2} < 2$).

La fonction $\cos x$ prend des valeurs positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; la fonction $\sin x$

a ainsi une dérivée, $\cos x$, qui est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et la fonction $\sin x$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; par suite $\sin \frac{\pi}{2} > \sin 0 = 0$;

d'autre part $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$; finalement $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Nous pouvons dresser le tableau

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	0
$\sin x$	0	1

Les formules d'addition donnent

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \cos x.$$

On peut ainsi déduire l'étude des fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de leur étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ensuite on peut, grâce à la parité, étudier les fonctions sur $[-\pi, 0]$ et dresser le tableau suivant :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	-1	0	1	0	-1
$\sin x$	0	-1	0	1	0

Ce tableau permet de tracer le graphe des fonctions $\cos x$ et $\sin x$.

En itérant les formules qui donnent $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on trouve

$$\begin{aligned} \cos(x + \pi) &= -\cos x, & \cos(x + 2\pi) &= \cos x \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x, & \sin(x + 2\pi) &= \sin x. \end{aligned}$$

Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ admettent la période commune 2π . Il s'agit de la plus petite période positive; en effet, pour chacune des fonctions, les résultats déjà acquis nous montrent que la différence de deux zéros consécutifs est π ; toute période doit donc être un multiple entier de π , or π n'est pas période.

Les valeurs déjà obtenues $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, permettent d'écrire $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$, et par suite

$$e^{2i\pi} = 1.$$

De même on a $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

279. — Étude de l'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1.

1° **Homomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}$.** — Quel que soit le nombre réel x , le nombre complexe $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ admet 1 pour module. Nous disposons donc d'une application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}$

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} e^{ix} \in \mathcal{U}.$$

La relation $e^{i(x+x')} = e^{ix} \cdot e^{ix'}$ s'écrit $\varphi(x + x') = \varphi(x) \cdot \varphi(x')$.

L'application φ est donc un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif $\mathcal{U}$.

2° **L'application φ est surjective.** — Pour montrer que l'application φ est surjective, donnons-nous un élément u de $\mathcal{U}$ ($u = a + bi$, $a^2 + b^2 = 1$) et montrons qu'il existe au moins un réel x qui vérifie simultanément

$$(1) \quad \cos x = a, \quad \sin x = b.$$

I. — *Montrons qu'il existe un, et un seul nombre $x \in [-\pi, +\pi[$ vérifiant (1).*

Si $a = 1$, $b = 0$, on prend $x = 0$.

Si $a = -1$, $b = 0$, on prend $x = -\pi$.

Si $|a| < 1$, le tableau du n° 278, 2° montre qu'il existe une valeur $\alpha \in]0, \pi[$ et une seule telle que $a = \cos \alpha$; la valeur $-\alpha \in]-\pi, 0[$ vérifie aussi $a = \cos(-\alpha)$

$$\begin{array}{l|l} \text{si} & \begin{array}{l} \sin \alpha = \sqrt{1 - a^2} \\ b > 0, \quad b = \sin \alpha \\ x = \alpha \quad \text{vérifie (1)} \end{array} & \text{si} & \begin{array}{l} \sin(-\alpha) = -\sqrt{1 - a^2} \\ b < 0, \quad b = \sin(-\alpha) \\ x = -\alpha \quad \text{vérifie (1).} \end{array} \end{array}$$

La propriété énoncée est ainsi justifiée.

II. — La périodicité des fonctions cosinus et sinus montre que, si x vérifie (1), tous les nombres $x + k \cdot 2\pi$ vérifient (1).

Les équations (1) ont donc pour solutions tous les nombres d'une congruence de module 2π , cette congruence a un élément et un seul dans $[-\pi, +\pi[$, ou dans $[0, 2\pi[$, ou plus généralement dans tout intervalle $[\beta, \beta + 2\pi[$.

3° **Bijecton de $\mathbb{R}/2\pi$ sur $\mathcal{U}$.** — **Argument de u .** — Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, la relation binaire entre x et y

« $x \equiv y$ est un multiple entier de 2π » est une relation d'équivalence (nous laissons au lecteur le soin de le montrer) que nous noterons

$$x \equiv y \pmod{2\pi}.$$

Nous appellerons $\theta, \theta', \dots$ les classes d'équivalence « modulo 2π », nous désignerons leur ensemble par $\mathbb{R}/2\pi$.

$$x \equiv y \pmod{2\pi} \implies e^{ix} = e^{iy}.$$

L'application ϕ vue au 1° associe le même $u \in \mathbb{U}$ à tous les éléments x d'une même classe d'équivalence $\theta \in \mathbb{R}/2\pi$. Appelons ψ l'application ainsi réalisée de $\mathbb{R}/2\pi$ dans $\mathbb{U}$

$$\theta \in \mathbb{R}/2\pi \xrightarrow{\psi} u \in \mathbb{U}.$$

Nous noterons $u = e^{i\theta}$, ce qui signifie que pour tout représentant x de θ , $e^{ix} = u$.

L'étude faite au 2° montre que, à tout $u \in \mathbb{U}$ correspond une, et seule classe, θ , ψ est donc une application bijective de $\mathbb{R}/2\pi$ sur $\mathbb{U}$.

L'élément θ unique associé à u par ψ^{-1} est appelé *argument de u*

$$\theta = \arg u.$$

En résumé, nous énoncerons :

THÉOREME ET DÉFINITION. — A tout nombre complexe u de module 1 correspond un élément θ et un seul de l'ensemble quotient $\mathbb{R}/2\pi$ tel que

$$u = \cos \theta + i \sin \theta;$$

cet élément θ est appelé l'argument du nombre u .

Autrement dit encore, tout nombre complexe de module 1 peut, et d'une seule façon, s'écrire

$$u = e^{i\theta}, \quad \theta = \arg u \in \mathbb{R}/2\pi.$$

4° Isomorphisme de $\mathbb{R}/2\pi$ sur $\mathbb{U}$. — La relation $x \equiv y \pmod{2\pi}$ est compatible avec l'addition :

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv y \pmod{2\pi} \\ x' \equiv y' \pmod{2\pi} \end{array} \right\} \implies x + x' \equiv y + y' \pmod{2\pi}.$$

Il en résulte qu'on peut définir une loi-quotient dans $\mathbb{R}/2\pi$, que nous appellerons addition, et pour laquelle $\mathbb{R}/2\pi$ est un groupe.

Si x et x' sont des représentants des classes θ et θ'

$$e^{ix} \cdot e^{ix'} = e^{i(x+x')} \implies e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

L'application ψ du 3° est un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}/2\pi$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$.

280. Argument d'un nombre complexe non nul. — Soit z un nombre complexe différent de 0; le nombre complexe u défini par $z = |z|u$ a pour module 1.

Nous pouvons donc énoncer :

DÉFINITION. — On appelle argument du nombre complexe $z \neq 0$ l'argument θ du nombre complexe de module 1 défini par $u = \frac{z}{|z|}$.

On a vu au n° 279 que si $\theta = \arg u$, $u = e^{i\theta}$; par suite, en posant $r = |z|$ on écrit tout nombre complexe sous la forme

$$z = re^{i\theta}$$

et l'on retrouve la forme trigonométrique.

$$\text{Si} \quad z = re^{i\theta}, \quad z' = r'e^{i\theta'},$$

l'expression du produit $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

résulte simplement des propriétés de la fonction exponentielle.

A partir de là, on rejoint la théorie développée au tome I, n° 78, avec d'autres hypothèses initiales.

281. — Longueur d'un arc de cercle. — Le repère étant orthonormé, les équations

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(\theta) \quad \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

représentent le cercle Γ de centre O , de rayon 1. Il résulte des études faites aux nos 278 et 279, 2° que Γ est un arc simple continu fermé (IV, 10, 5°) : Γ est en effet l'image du segment réel $[0, 2\pi]$ par la fonction vectorielle $\vec{F}(\theta)$, et il y a bijection entre Γ et $[0, 2\pi]$.

En outre, $\vec{F}$ est une fonction continûment dérivable; en anticipant sur le n° 110 du tome IV, nous pouvons dire que le cercle est rectifiable; en orientant Γ dans le sens des θ croissants, $ds = d\theta$, d'où la mesure algébrique de l'arc $\widehat{M_0M_1}$, défini par les arguments θ_0 et θ_1 , de son origine et de son extrémité

$$\widehat{\text{arc } M_0M_1} = \theta_1 - \theta_0.$$

APPENDICE I

ÉLÉMENTS DE TOPOLOGIE D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Cet appendice est destiné à compléter le sous-chapitre I du chapitre XI et à remplacer le sous-chapitre II par une étude plus générale, à l'intention des lecteurs qui continueront des études supérieures.

Nous utiliserons les définitions d'espace métrique (133), de boules et voisinages (136), d'espace complet (137), de point d'accumulation (137). Les notions que nous introduirons dépendent du choix de la distance (cf. 136, 2°). Quand deux distances sur un même ensemble E conduisent aux mêmes voisinages, nous dirons qu'elles définissent la même topologie sur E; ce sera le cas, en particulier, pour deux distances équivalentes.

282. — Ensembles ouverts, fermés. — 1° Intérieur et adhérence. — Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E ; nous désignerons par A' le complémentaire de A relativement à E .

DÉFINITION I. — Un point M de A est dit intérieur à A s'il existe une boule ouverte de E centrée en M et contenue dans A . La partie de A formée par les points intérieurs à A est dite intérieur de A .

L'intérieur de A se note $\text{int } (A)$ ou $\overset{\circ}{A}$;

$\emptyset$ désignant la partie vide de E , on convient : $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$.

Si A n'a pas de point intérieur on écrit $\overset{\circ}{A} = \emptyset$; c'est ce qui se produit, par exemple, pour la partie $A = \{1\}$ de l'espace métrique R .

DÉFINITION II. — Un point M de E est dit point adhérent à A si toute boule ouverte de E centrée en M contient au moins un point de A . La partie de E formée par les points adhérents à A est dite adhérence de A .

L'adhérence de A se note $\text{adh } (A)$ ou $\overline{A}$.

Comparons cette définition II à la définition suivante que nous avons déjà posée au n° 137.

DÉFINITION II*. — Un point M de E est dit **point d'accumulation** de A si toute boule ouverte de E centrée en M contient au moins un point de A , autre que M .

La partie de E formée par les points d'accumulation de A est dite *ensemble dérivé* de A .

Tout point d'accumulation de A est un point adhérent à A , mais la réciproque n'est pas vraie : tout point de A est adhérent à A , que ce point soit ou non — point d'accumulation de A .

Un point adhérent à A est soit un point d'accumulation de A (qui appartient, ou non, à A), soit un point de A qui n'est pas point d'accumulation de A . En résumé l'adhérence de A est la réunion de A et de l'ensemble dérivé de A .

Montrons que si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

En effet si $M \in \overline{A}$, toute boule ouverte de E , centrée en M , contient au point un point de A , *a fortiori* un point de B ; c'est donc que $M \in \overline{B}$.

On convient $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Enfin, on dit que A est *dense* dans E si $\overline{A} = E$; tout point du complémentaire de A est alors point d'accumulation de A ⁽¹⁾.

REMARQUE. — En général : $\overline{A} \subset A \subset \overline{\overline{A}}$, l'inclusion étant comprise au sens large. On peut d'ailleurs préciser :

$$\overline{\overline{E}} = E = \overline{E}, \quad \overline{\emptyset} = \emptyset = \overline{\emptyset}.$$

DÉFINITION III. — Un point M de E est dit **point extérieur** à A s'il est intérieur au complémentaire, A' , de A , relativement à E . L'intérieur de A' est dit **extérieur** de A . L'extérieur de A peut se noter $\text{ext}(A)$.

Si A' est le complémentaire de A ,

$$\text{int}(A') = \text{ext}(A); \quad \text{ext}(A') = \text{int}(A)$$

DÉFINITION IV. — Un point M de E est dit **point-frontière** de A s'il n'appartient ni à l'intérieur ni à l'extérieur de A .

M est point-frontière de A si dans toute boule ouverte de E , centrée en M , il existe simultanément un point de A et un point de A' ; il en résulte que M est aussi point-frontière de A' et que M appartient à la fois à l'adhérence de A et à l'adhérence de A' .

La partie de E formée par les points-frontière de A est dite **frontière** de A .

La frontière de A se note ∂A ou $\text{fr}(A)$.

Propriétés de la frontière. — Il résulte des définitions précédentes que

$$\text{fr}(A) = \text{fr}(A'); \quad \text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(A').$$

Enfin : $\text{int}(A) + \text{ext}(A) + \text{fr}(A)$ constitue une partition de E .

2° Ouverts et fermés. — **DÉFINITION V.** — Une partie d'un espace métrique est dite **partie ouverte** (resp. **fermée**), ou encore **ensemble ouvert** (resp. **fermé**), si elle coïncide avec son intérieur (resp. adhérence).

(1) C'est ainsi que Q est dense dans R .

On résume les définitions, I, II et V en énonçant :

α) A est un ouvert de E si, pour tout point M de A, il existe une boule ouverte de E, centrée en M, incluse dans A.

β) A est un fermé de E s'il n'existe pas, hors de A, de point d'accumulation de A.

DÉFINITION. — La famille des ouverts d'un espace métrique E est appelée *topologie de E*.

REMARQUE I. — E et $\emptyset$ sont des ensembles à la fois ouverts et fermés; une partie formée d'un nombre fini de points est fermée.

REMARQUE II. — Le lecteur vérifiera que, pour toute partie A d'un espace métrique E
 $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ et $\text{adh}(\text{adh}(A)) = \text{adh}(A)$;
 il en déduira que l'intérieur de A est un ouvert et que l'adhérence de A est un fermé.

THÉORÈME I. — Le complémentaire, A' , d'un ouvert A est un fermé.

En effet soit $M \in A$, ce qui équivaut à $M \notin A'$. Puisque, par hypothèse, A est ouvert, il existe une boule de E, centrée en M, tout entière dans A et dont, par suite, aucun point n'appartient à A' ; il en résulte : $M \notin \overline{A'}$.

Ainsi $M \notin A'$ entraîne $M \notin \overline{A'}$, ce qui exige $\overline{A'} \subset A'$.

Comme dans tous les cas : $A' \subset \overline{A'}$, nous avons : $\overline{A'} = A'$; l'ensemble A' est fermé.

THÉORÈME II. — Le complémentaire, A, d'un fermé A' est un ouvert.

En effet soit $M \in A$, ce qui équivaut à $M \notin A'$. Puisque, par hypothèse, A' est fermé (ce qui s'écrit $\overline{A'} = A'$), on a : $M \notin \overline{A'}$. Il existe donc une boule de E, centrée en M, ne contenant aucun point de A' et, par suite, tout entière dans A; il en résulte $M \in \overset{\circ}{A}$. Ainsi tout point de A est intérieur à A, qui est ainsi un ouvert.

En résumé, une partie d'un espace métrique est un ouvert (resp. fermé) si, et seulement si, son complémentaire est un fermé (resp. ouvert).

THÉORÈME III. — Soit I un ensemble d'indices, fini ou infini. Toute réunion A d'ouverts O_i , ($i \in I$), est un ouvert.

En effet tout point M de A appartient à au moins l'un des ouverts; soit, par exemple, $M \in O_\alpha$. Comme O_α est un ouvert, il existe une boule ouverte de E, centrée en M, contenue dans O_α et *a fortiori* dans A. La proposition en résulte.

THÉORÈME IV. — Toute intersection finie A d'ouverts O_i ($i = 1, 2, \dots, n$), est un ouvert.

En effet, soit M un point quelconque de A. Pour tout i , $M \in O_i$; il existe une boule ouverte B_i de E, centrée en M, contenue dans O_i . L'intersection des B_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), est une boule ouverte B de E, centrée en M; B est contenue dans l'intersection A des O_i . La proposition en résulte.

THÉORÈMES V ET VI. — Toute intersection de fermés est un fermé; toute réunion finie de fermés est un fermé.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ces propositions soit directement, soit par *passage aux complémentaires* (I, n° 9, 6°).

COROLLAIRE I. — La frontière d'une partie A quelconque de E est un fermé.

En effet l'intérieur de A et l'extérieur de A sont deux ouverts; leur réunion est un ouvert; $\text{fr}(A)$ qui est le complémentaire de cette réunion, est un fermé.

COROLLAIRE II. — Une partie de E est un fermé si, et seulement si elle contient sa frontière.

Soit A une partie de E; on a vu au 1° que

$$\text{fr}(A) \subset \text{adh}(A).$$

I. Supposons A fermé, c'est-à-dire $A = \text{adh}(A)$,
on peut donc écrire $\text{fr}(A) \subset A$.

II. Supposons $\text{fr}(A) \subset A$. Soit $M \in A'$, A' étant le complémentaire de A; M n'appartient pas à la frontière de A; il existe donc au moins une boule de E, centrée en M, ne contenant que des points de A' ; il en résulte que A' est un ouvert, et par suite que A est un fermé.

3° Ouverts et boules ouvertes. — **THÉORÈME VII.** — Toute boule ouverte est un ouvert.

Soit M un point quelconque de la boule ouverte B, de centre C et de rayon r . Posons $\delta = d(C, M)$; on a $\delta < r$, (strict). La boule ouverte $\mathcal{B}$, de centre M et de rayon $r - \delta$, est l'ensemble des points Q de E tels que $d(M, Q) < r - \delta$, ce qui entraîne

$$d(C, Q) \leq d(C, M) + d(M, Q) \quad \text{et} \quad d(C, Q) < r \quad \text{ou} \quad Q \in B.$$

M est donc le centre d'une boule ouverte $\mathcal{B}$ de E, tout entière dans B, qui est ainsi un ouvert.

D'après le théorème III, toute réunion de boules ouvertes est un ouvert.

Réciproquement :

THÉORÈME VIII. — Tout ouvert A peut être considéré comme une réunion de boules ouvertes.

A tout point M de l'ouvert A on peut attacher une boule ouverte de E, $B(M)$, centrée en M, contenue dans A; soit O la réunion des boules $B(M)$, quand M parcourt A; O est un ouvert de E (th. III), tel que $O \subset A$.

D'autre part : $M \in B(M)$ entraîne $M \in O$; on en déduit $A \subset O$.

Finalement $A = O$; la proposition en résulte.

A titre d'exercice, le lecteur pourra démontrer :

THÉORÈME. — Toute boule fermée est un fermé.

4° Sous-espace. Métrique induite. — Soit (E, d) un espace métrique et F une partie de E . La restriction à $F \times F$ de l'application-distance de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, fait de F un espace métrique que nous noterons (F, d) ; on dit que F a été aussi muni de la *métrique induite*.

THÉORÈME IX. — Une partie A de F est un ouvert (resp. fermé) de F si, et seulement si A est l'intersection de F et d'un ouvert (resp. fermé) de E .

I. Soit A l'intersection de F et d'un ouvert A_1 de E : $A = A_1 \cap F$. A tout point M de A , on peut associer au titre de point de A_1 , une boule ouverte B de E , ayant pour centre M , pour rayon r , et contenue dans A_1 .

L'intersection de B et de F est l'ensemble des points Q de F tels que $d(M, Q) < r$, c'est donc une boule ouverte $\mathcal{B}$ de F , de centre M et de rayon r , elle est contenue dans l'intersection de A_1 et de F , c'est-à-dire dans A . A est ainsi un ouvert de F .

II. Inversement soit A un ouvert de F , c'est-à-dire une réunion de boules ouvertes $\mathcal{B}_i$ de F , centrées aux points C_i de A , de rayons r_i , ($i \in I$, ensemble d'indices, fini ou infini).

Soit B_i la boule de E de centre C_i , de rayon r_i ; la réunion des B_i , ($i \in I$), est un ouvert A_1 de E , tel que A est l'intersection de F et de A_1 .

La propriété relative aux ouverts étant ainsi démontrée, nous laissons au lecteur le soin d'établir celle qui concerne les fermés (en utilisant le passage aux complémentaires).

AUTRE ÉNONCÉ. — On énonce encore le théorème précédent sous la forme :

SI F est une partie de E , les ouverts (resp. fermés) de F sont les intersections avec F des ouverts (resp. fermés) de E .

On dit aussi que les ouverts (resp. fermés) de F sont les *traces* sur F des ouverts (resp. fermés) de E .

CAS PARTICULIER DU THÉORÈME IX. — **SI une partie A de F est un ouvert (resp. fermé) de E , elle est un ouvert (resp. fermé) de F .**

L'hypothèse est celle de la partie I du théorème IX, où A_1 coïncide avec A .

La réciproque de l'énoncé précédent est fautive : par exemple soit F une partie de E ; F est un ouvert de F , sans que F soit nécessairement un ouvert de E .

En revanche, soit F un ouvert (resp. fermé) de E et soit A un ouvert (resp. fermé) de F . D'après la partie II de la démonstration du théorème IX, il existe un ouvert (resp. fermé) A_1 de E tel que $A = F \cap A_1$; A est ainsi l'intersection de deux ouverts (resp. fermés) de E , c'est donc un ouvert (resp. fermé) de E .

En résumé, si F est un ouvert de E , tout ouvert de F est un ouvert de E ; un énoncé analogue peut s'énoncer en remplaçant ouvert par fermé.

283. Ensembles compacts. — Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E .

1° DÉFINITIONS. — On appelle **recouvrement de A** un ensemble $\mathcal{R}$ de parties de E dont la réunion contient A .

On appelle **sous-recouvrement de $\mathcal{R}$** un recouvrement $\mathcal{R}'$ de A constitué par des parties de E appartenant à $\mathcal{R}$.

Le recouvrement $\mathcal{R}$ est dit *fini* ou *infini* selon qu'il est formé d'un nombre fini ou infini de parties de E . Le recouvrement $\mathcal{R}$ est dit *ouvert* s'il est constitué par des ouverts de E ou, ce qui revient au même (282, 3°), par les boules ouvertes de E .

2° Propriété de Borel-Lebesgue. — **DÉFINITION.** — On dit qu'une partie A d'un espace métrique (E, d) est un **ensemble compact**, ou encore qu'il possède la **propriété de Borel-Lebesgue**, si tout recouvrement ouvert de A admet au moins un sous-recouvrement fini.

Notons qu'une partie de E réduite à un point est compacte et que la réunion d'un nombre fini de parties compactes de E est compacte.

En abrégé, nous parlerons d'un compact au lieu de « ensemble compact » ou de « partie compacte ».

THÉORÈME I. — **Toute partie compacte d'un espace métrique est un fermé.**

Soit A un compact de l'espace métrique (E, d) et soit M un point quelconque du complémentaire, A' , de A . P étant le point générique de A , il existe des boules ouvertes de E disjointes, $B(P)$ et $\mathcal{B}(P)$, respectivement centrées en M et P (136). Quand P engendre A , $\mathcal{B}(P)$ engendre un recouvrement ouvert de A , dont on peut extraire par hypothèse un sous-recouvrement fini

$$\{\mathcal{B}(P_1), \dots, \mathcal{B}(P_n)\}$$

Soit B l'intersection des boules ouvertes $B(P_i)$, ($i = 1, \dots, n$); ces boules ayant même centre, B est une boule ouverte de E , de centre M .

D'autre part $B(P_i)$ est disjointe de $\mathcal{B}(P_i)$; l'intersection B des $B(P_i)$ est donc disjointe de la réunion des $\mathcal{B}(P_i)$, *a fortiori* elle est disjointe de A .

C'est donc que B est incluse dans A' . Il existe alors une boule ouverte de E , incluse dans A' , et centrée au point générique M de A' ; c'est donc que A' est ouvert, et par suite que A est fermé.

REMARQUE. — Une partie fermée d'un espace métrique n'est pas nécessairement compacte sans quoi tout espace métrique, qui peut être considéré comme fermé, serait compact, (ce qui n'est pas vrai), mais nous allons démontrer :

THÉORÈME II. — **Toute partie fermée d'un espace métrique compact est un compact.**

Soit A une partie fermée de l'espace métrique compact (E, d) ; le complémentaire, A' , de A est ainsi un ouvert. Considérons un recouvrement quelconque

$\mathfrak{R}$, de A par des ouverts O_i , ($i \in I$), de E . En adjoignant A' à ces ouverts, on obtient un recouvrement ouvert de E , duquel on peut extraire (du fait de la compacité de E) un recouvrement fini de E , constitué de A' et d'un nombre fini d'ouverts O_i , dont la réunion contient A et constitue un sous-recouvrement fini de $\mathfrak{R}$.

Parties compactes, parties fermées d'un espace métrique compact. — Il résulte des théorèmes I et II que dans un espace métrique compact une partie est compacte si, et seulement si, elle est fermée.

3° Partie bornée d'un espace métrique. — DÉFINITION. — Une partie A d'un espace métrique est dite bornée si l'ensemble des distances de deux points quelconques de A est majoré; cet ensemble admet alors une borne supérieure qui est dite diamètre de A .

Un ensemble A borné, de diamètre δ , est contenu dans la boule fermée de rayon δ dont le centre est un point arbitrairement choisi de A . Inversement la partie d'un espace métrique contenue dans une boule fermée, de rayon r , est bornée; son diamètre est au plus égal à $2r$ (inégalité triangulaire).

THÉORÈME III. — Tout espace métrique compact (E, d) , est borné.

Soit $B(M)$ la boule ouverte de E , de centre M , de rayon donné r . Quand M parcourt E , $B(M)$ engendre un recouvrement ouvert de E qui, du fait de la compacité de E , admet un sous-recouvrement fini constitué de boules $B_1, \dots, B_n$, de rayon r , dont nous désignons les centres par $C_1, \dots, C_n$. On en déduit, par l'inégalité triangulaire :

$$\forall M \in E, \quad d(C_1, M) \leq \sup_{2 \leq k \leq n} d(C_1, C_k) + r.$$

La proposition en résulte.

4° Propriété de Bolzano-Weierstrass. — DÉFINITION. — On dit qu'une partie A d'un espace métrique possède la propriété de Bolzano-Weierstrass si tout sous-ensemble infini de A admet un point d'accumulation appartenant à A .

THÉORÈME IV. — Tout compact d'un espace métrique possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Soit A un compact de l'espace métrique (E, d) et soit W une partie de A qui n'admet pas de point d'accumulation dans A ; nous allons montrer que W a un nombre fini d'éléments, ce qui, par l'absurde, établira la proposition.

Le point générique M de A n'étant pas point d'accumulation de W , on peut lui associer une boule ouverte de E , $B(M)$, qui ne contient aucun point de W , sauf peut-être M lui-même. Quand M parcourt A , $B(M)$ engendre un recouvrement ouvert du compact A , dont on peut extraire un recouvrement de A , et *a fortiori* de W , par un nombre fini de boules ouvertes $B_1, \dots, B_n$; chacune de ces boules contenant au maximum un point de W , c'est que W possède au maximum n éléments.

5° **Suite sur un espace métrique.** — En vue d'établir la réciproque du théorème IV, nous allons donner quelques compléments relatifs aux suites sur un espace métrique (137).

Point d'adhérence d'une suite. — DÉFINITION. — Dans un espace métrique E , un élément L est dit **valeur (ou point) d'adhérence d'une suite** $\{M_n\}$ si toute boule ouverte de E , centrée en L , contient une infinité de points M_n , distincts ou confondus.

Cela signifie soit que L est atteint une infinité de fois par M_n , soit que L est point d'accumulation de l'ensemble constitué par les points M_n .

THÉORÈME V. — Dans un espace métrique (E, d) , si une suite $\{M_n\}$ admet un point d'adhérence L , on peut extraire de $\{M_n\}$ une suite qui converge vers L .

Désignons par B_n la boule ouverte de E de centre L , de rayon $\frac{1}{n}$. Il existe au moins un naturel p_1 tel que $M_{p_1} \in B_1$; il existe ensuite un naturel $p_2 > p_1$ tel que $M_{p_2} \in B_2$ et ainsi de suite; on extrait ainsi de $\{M_n\}$ une suite dans laquelle le terme de rang k , M_{p_k} , est à une distance de L inférieure à $\frac{1}{k}$. Cette suite converge vers L .

THÉORÈME VI. — Dans un espace métrique E qui possède la propriété de Boizano-Weierstrass

- a) toute suite admet au moins un point d'adhérence;
- b) une suite est convergente si et seulement si elle admet un seul point d'adhérence.

Soit $\{M_n\}$ une suite sur l'espace métrique E .

a) I) Si l'ensemble des M_n ne comprend qu'un nombre fini de points de E , l'un de ces points au moins, soit L , coïncide avec une infinité de points de la suite; L est un point d'adhérence de cette suite.

II) Si l'ensemble des M_n comprend une infinité de points de E , ceux-ci forment un sous-ensemble infini de E ; ce sous-ensemble, par hypothèse, admet un point d'accumulation L appartenant à E ; L est un point d'adhérence de $\{M_n\}$.

b) I) Supposons que $\{M_n\}$ converge vers L . L est un point d'adhérence de $\{M_n\}$; c'est le seul car si L' en était un second, ($L' \neq L$), en prenant $\varepsilon = \frac{d(L, L')}{2}$,

il existerait une infinité de termes de la suite appartenant à la boule ouverte de centre L' , de rayon ε , c'est-à-dire extérieurs à la boule ouverte de centre L , de rayon ε , ce qui est contradictoire avec le fait qu'un nombre fini de points de $\{M_n\}$ est extérieur à cette boule, d'après la définition de L comme limite.

II) Supposons que $\{M_n\}$ admette L comme seul point d'adhérence. Soit $\mathcal{B}$ la boule ouverte de centre L , de rayon ε . S'il existait une infinité de points de $\{M_n\}$ extérieurs à $\mathcal{B}$,

(1) On peut aussi dire *point-limite*, ainsi que nous l'avons fait au n° 24, dans le cas de l'espace métrique R .

— ou bien ceux-ci coïncideraient avec un nombre fini de points de E , et l'un au moins de ces points serait un point d'adhérence de la suite $\{M_n\}$, distinct de L ;

— ou bien ceux-ci formeraient un sous-ensemble infini de E , sous-ensemble possédant par hypothèse un point d'accumulation nécessairement extérieur à $\mathcal{B}$, et L ne serait pas le seul point d'adhérence de $\{M_n\}$.

Par suite, il n'existe qu'un nombre fini de termes de $\{M_n\}$ extérieurs à $\mathcal{B}$; si M_p est celui dont l'indice est le plus élevé, pour tout $n > p$, $M_n \in \mathcal{B}$ et L est limite de la suite $\{M_n\}$.

COROLLAIRE. — Puisque tout compact d'une espace métrique possède la propriété de Bolzano-Weierstrass, dans tout compact d'un espace métrique les énoncés *a*) et *b*) du théorème VI sont valables.

THÉORÈME VII. — Tout espace métrique compact est complet.

L'énoncé précédent signifie que toute suite de Cauchy, $\{M_n\}$, sur un espace métrique compact E est convergente (cf nos 24 et 137).

D'après le corollaire précédent, $\{M_n\}$ admet au moins un point d'adhérence L .

Par hypothèse, à tout ε est associé un entier N tel que

$$\forall p > N, \quad \forall q > N, \quad d(M_p, M_q) < \varepsilon.$$

Fixons $p > N$. Les éléments de la suite sont $M_1, \dots, M_{p-1}$ et une infinité de points dont la distance à M_p est inférieure à ε .

Il en résulte que L appartient à la boule fermée $\mathcal{B}$ de centre M_p , de rayon ε .

Si $\{M_n\}$ avait un autre point d'adhérence $L' \neq L$, il vérifierait aussi $L' \in \mathcal{B}$; on aurait $d(L, L') \leq 2\varepsilon$, quel que soit ε , ce qui est contradictoire avec $L' \neq L$.

Dès lors $\{M_n\}$ admettant un seul point d'adhérence L (théorème VI), a pour limite le point L qui appartient à E , ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME VIII. — Un espace métrique dans lequel toute suite a un point d'adhérence est compact.

Soit (E, d) un espace métrique dans lequel toute suite a un point d'adhérence (hypothèse initiale).

I. Montrons que E est borné. Raisonnons par l'absurde et supposons (hypothèse H_1) E non borné; on peut alors construire, à partir d'un point M_0 arbitrairement choisi de E , une suite $\{M_n\}$ sur E telle que

$$d(M_0, M_n) > d(M_0, M_{n-1}) + 1.$$

En écrivant de proche en proche les inégalités précédentes depuis $n = h + 1$ jusqu'à $n = k$, on obtient, par addition membre à membre,

$$d(M_h, M_k) \geq k - h$$

ce qui démontre que les distances mutuelles des points de la suite $\{M_n\}$ sont au moins égales à 1.

Si L est point d'adhérence de la suite $\{M_n\}$, il existe une infinité de points M_n dans la boule ouverte de centre L , de rayon $\alpha < \frac{1}{2}$, ce qui est contraire au résultat précédent; l'hypothèse (H_1) est donc à rejeter.

II. Nous allons maintenant aborder, par l'absurde, la démonstration du théorème VIII. Supposons (hypothèse H_2) que E n'est pas compact, c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement infini $\mathcal{R}$ de E par des boules ouvertes, B_i , ($i \in I$), dont on ne peut extraire un sous-recouvrement fini.

Désignons par C_i et r_i le centre et le rayon de B_i ; pour tout i , r_i est inférieur ou égal au diamètre δ de E , sans quoi il existerait une boule B_α , pour laquelle $r_\alpha > \delta$, et qui constituerait, à elle seule, un sous-recouvrement fini de $\mathcal{R}$.

a) Soit M le point générique de E ; M appartient au moins à une boule B_i ; à toute boule B_i contenant M , associons la boule ouverte $\mathcal{B}_i$, de centre M , de rayon $r_i - d(C_i, M)$; $\mathcal{B}_i$ est contenue dans B_i . Pour M donné, l'ensemble des rayons des boules $\mathcal{B}_i$ associées à M est majoré par δ et admet une borne supérieure strictement positive, que nous notons $\rho(M)$. Étant donné que pour toute boule B_i qui ne contient pas M nous avons

$$r_i - d(C_i, M) \leq 0,$$

nous pouvons affirmer : $\rho(M) = \sup_{i \in I} (r_i - d(C_i, M))$.

b) α . — Minoré par 0, l'ensemble des $\rho(M)$ admet une borne inférieure $\mu \geq 0$.

β . — Soit M' un autre point de E ; l'inégalité triangulaire donne

$$d(C_i, M') \leq d(C_i, M) + d(M, M')$$

d'où l'on tire

$$r_i - d(C_i, M) \leq d(M, M') + r_i - d(C_i, M');$$

on en déduit

$$(1) \quad \rho(M) \leq d(M, M') + \rho(M').$$

γ . — Démontrons alors que μ est strictement positif. Raisonnons par l'absurde et supposons (hypothèse H_3) que μ est nul.

Soit n un entier naturel; il existe au moins un point M_n de E tel que $\rho(M_n) < \frac{1}{n}$ (sinon, pour tout M , $\rho(M) \geq \frac{1}{n}$, ce qui est contraire à (H_3)).

La suite $\{M_n\}$ ainsi créée a au moins un point d'adhérence L , d'après l'hypothèse initiale, et on peut en extraire une suite qui converge vers L (théorème V). Soit M'_n le terme de rang n de cette dernière suite; nous avons

$$M'_n = M_{p(n)} \quad \text{avec} \quad p(n) \geq n.$$

On en déduit

$$\rho(M'_n) = \rho(M_{p(n)}) < \frac{1}{p(n)} \leq \frac{1}{n}.$$

En utilisant la relation (1), on obtient

$$\rho(L) < d(L, M'_n) + \frac{1}{n}.$$

A tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une valeur de n assez grande pour que

$$d(L, M'_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ce qui entraîne } \rho(L) < \varepsilon.$$

On a donc, nécessairement, $\rho(L) = 0$, ce qui constitue une contradiction avec la positivité stricte de $\rho(M)$. Ainsi (H_3) est à rejeter. Autrement dit, il existe un réel strictement positif, μ , tel que

$$\forall M \in E \quad \rho(M) \geq \mu.$$

Choisissant un nombre μ' compris entre 0 et μ (par exemple $\mu' = \frac{1}{2}\mu$) nous pouvons affirmer, d'après la définition de la borne inférieure appliquée à μ , qu'à tout point M de E on peut associer une boule $\mathcal{B}_i$ de rayon supérieur à μ' et, par suite, une boule B_i du recouvrement $\mathcal{R}$ qui contient la boule ouverte de centre M et de rayon μ' .

c) Soit alors A_1 un point de E ; il existe au moins une boule B_{i_1} ($i_1 \in I$) contenant la boule ouverte $\mathcal{D}_1$ de centre A_1 , de rayon μ' . Comme B_{i_1} ne recouvre pas E , on peut prendre un point quelconque A_2 de $E - B_{i_1}$; il existe au moins une boule B_{i_2} ($i_2 \in I$) contenant la boule ouverte $\mathcal{D}_2$ de centre A_2 , de rayon μ .

$$A_2 \notin \mathcal{D}_1 \implies d(A_1, A_2) \geq \mu'$$

$B_{i_1} \cup B_{i_2}$ n'étant pas un recouvrement de E , on peut prendre un point A_3 de $E - (B_{i_1} \cup B_{i_2})$ et ainsi de suite.

$$A_3 \notin \mathcal{D}_1, \quad A_3 \notin \mathcal{D}_2 \implies d(A_1, A_3) \geq \mu', \quad d(A_2, A_3) \geq \mu'.$$

On met ainsi en évidence une suite $\{A_n\}$ de points dont les distances mutuelles sont au moins égales à μ' ; une telle suite ne peut admettre de point d'adhérence, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale; c'est donc que l'hypothèse (H_2) est absurde, E est compact.

6° Équivalence sur un espace métrique des propriétés de Bolzano-Weierstrass et de Borel-Lebesgue. — En abrégé, nous noterons ces propriétés B-W et B-L; nous appellerons E un espace métrique.

Au théorème IV nous avons montré

$$E \text{ possède B-L} \implies E \text{ possède B-W.}$$

Les théorèmes VI et VIII impliquent

$$\left. \begin{array}{l} E \text{ possède B-W} \\ \text{toute suite sur } E \\ \text{possède un point d'adhérence} \end{array} \right\} \implies E \text{ possède B-L.}$$

En résumé nous énoncerons :

THÉOREME IX. — Une partie d'un espace métrique est un ensemble compact (ou possède la propriété de Borel-Lebesgue) si, et seulement si, elle possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

284. Ensembles connexes. — Intuitivement on conçoit que certains espaces métriques peuvent être considérés comme d'un seul tenant : c'est le cas pour un disque de R^2 , contrairement à ce qui se passe pour la réunion de deux disques disjoints. Pour préciser cette notion, posons :

DÉFINITION I. — Un espace métrique (E, d) est dit connexe s'il possède l'une des trois propriétés suivantes :

- a) E n'est pas la réunion de deux ouverts non vides de E , disjoints;
- b) E n'est pas la réunion de deux fermés non vides de E , disjoints;
- c) les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'équivalence de ces propriétés.

En abrégé, nous parlerons d'un « connexe » au lieu d'un « ensemble connexe ».

DÉFINITION II. — Une partie A d'un espace métrique (E, d) est dite connexe si le sous-espace métrique (A, d) de E (muni de la métrique induite) est connexe.

Du n° 282, 4° on déduit qu'une partie A de E est connexe si, et seulement si, quels que soient les deux ouverts O_1 et O_2 de E recouvrant A , tels que $O_1 \cap A$ et $O_2 \cap A$ ne sont pas vides on a : $O_1 \cap O_2 \cap A \neq \emptyset$.

THÉOREME. — L'adhérence $\bar{A}$ d'une partie connexe A de l'espace métrique (E, d) est connexe.

Supposons que $\bar{A}$ soit la réunion de deux parties F_1 et F_2 , disjointes, non vides, fermées dans $\bar{A}$. Comme $\bar{A}$ est fermée dans E , F_1 et F_2 sont aussi fermées dans E (cf. n° 282, in fine). On peut considérer A comme la réunion de $F'_1 = A \cap F_1$ et de $F'_2 = A \cap F_2$ qui sont disjointes et fermées dans A (traces sur A de fermés de E). La connexité de A exige que l'une de ces parties soit vide soit, par exemple

$$A \cap F_2 = \emptyset \quad \text{et} \quad A = A \cap F_1 \quad \text{ou} \quad A \subset F_1.$$

on en déduit $\bar{A} \subset \bar{F}_1$; or $\bar{F}_1 = F_1$ puisque F_1 est fermée; l'inclusion qui en résulte $\bar{A} \subset F_1$ est absurde.

$\bar{A}$ n'est pas la réunion de deux parties fermées disjointes non vides; $\bar{A}$ est donc connexe.

285. Applications continues. — Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques.

1° DÉFINITION I. — Une application f de E dans F est dite continue au point M_0 de E si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad d(M_0, M) < \alpha \implies \delta(f(M_0), f(M)) < \varepsilon.$$

Autrement dit : f est continue en M_0 si à toute boule ouverte $\mathcal{B}$ de F , centrée en $f(M_0)$, correspond une boule ouverte B de E , centrée en M_0 , telle que

$$(1) \quad f(B) \subset \mathcal{B}$$

On vérifie que (1) équivaut à

$$(2) \quad B \subset f^{-1}(\mathcal{B})$$

DÉFINITION II. — Une application de E dans F est dite continue si elle est continue en tout point de E .

On étend sans difficulté l'étude faite au n° 240, ce qui permet d'énoncer :

THÉORÈME I. — L'application composée de deux applications continue est une application continue.

2° THÉORÈME II. — Une application f de E dans F est continue si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E .

a) Nous supposons que f est continue. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert quelconque de F et soit M un point quelconque de $f^{-1}(\mathcal{O})$. Il en résulte que $f(M)$ est un point de $\mathcal{O}$ et, par suite le centre d'une boule ouverte $\mathcal{B}$ de F , contenue dans $\mathcal{O}$. D'après l'hypothèse de continuité, il existe une boule ouverte B de E , centrée en M , telle que : $B \subset f^{-1}(\mathcal{B})$. Il en résulte $B \subset f^{-1}(\mathcal{O})$; par suite, $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de E .

b) Nous supposons maintenant que l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E . Soit M_0 un point de E et soit $\mathcal{B}$ une boule ouverte de F , soumise à la seule condition d'être centrée en $f(M_0)$. D'après l'hypothèse, $f^{-1}(\mathcal{B})$, qui contient M_0 , est un ouvert de E ; il contient donc une boule ouverte B de E centrée en M_0 . On a $f(B) \subset \mathcal{B}$, ce qui montre que f est continue au point M_0 .

Par passage aux complémentaires, le lecteur pourra déduire du théorème II :

THÉORÈME III. — Une application f de E dans F est continue si, et seulement si, l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E .

REMARQUE. — Il peut se faire que l'image directe d'un ouvert de E par une application continue de E dans F ne soit pas un ouvert de F . C'est ainsi que dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin x$ est continue et l'image de l'ouvert $]0, 2\pi[$ est le fermé $[-1, +1]$.

3° Homéomorphisme. — **DÉFINITION.** — On appelle homéomorphisme de E sur F toute bijection de E sur F qui est continue et admet une bijection réciproque continue.

Les théorèmes II et III permettent d'énoncer :

THÉORÈME IV. — Une bijection continue de E sur F est un homéomorphisme si, et seulement si, l'image directe de tout ouvert (resp. fermé) de E est un ouvert (resp. fermé) de F .

4° **THÉORÈME V.** — Dans une application continue f de E dans F , l'image directe d'un compact A de E est un compact de F .

Soit en effet $\mathcal{R}$ un recouvrement de $f(A)$ par les ouverts $\mathcal{O}_i$, ($i \in I$), de F .

D'après le théorème II, $f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ est un ouvert de E . La réunion des $f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ constitue un recouvrement ouvert, $\mathcal{R}'$, de A ; en effet à tout point M de A on peut associer un indice α de I tel que $f(M) \in \mathcal{O}_\alpha$, ce qui entraîne $M \in f^{-1}(\mathcal{O}_\alpha)$.

La compacité de A permet d'extraire de $\mathcal{R}'$ un recouvrement fini de A de la forme $\{f^{-1}(\mathcal{O}_{k_1}), \dots, f^{-1}(\mathcal{O}_{k_n})\}$. Il en résulte que $\{\mathcal{O}_{k_1}, \dots, \mathcal{O}_{k_n}\}$ est un sous-recouvrement fini de $\mathcal{R}$: en effet, pour tout point P de $f(A)$, on peut trouver au moins un point M de $f^{-1}(P)$ et, par suite, au moins un indice k_p tel que $M \in f^{-1}(\mathcal{O}_{k_p})$ et $P \in \mathcal{O}_{k_p}$. La proposition en résulte.

COROLLAIRE. — Toute bijection continue f d'un espace métrique compact E sur un espace métrique F est un homéomorphisme.

(L'espace F n'est pas nécessairement compact).

En effet soit A une partie fermée quelconque de E ; A est compacte et d'après le théorème V, $f(A)$ est un compact, donc une partie fermée (283, 2°), de F . Cela posé, la proposition résulte du théorème IV.

5° **THÉORÈME VI.** — Dans une application continue f de E dans F , l'image directe d'un connexe A de E est un connexe de F .

Raisonnons par l'absurde. Supposons, (hypothèse (H)), que $f(A)$ n'est pas connexe : on peut considérer $f(A)$ comme la réunion de deux parties non vides, disjointes, $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, qui sont des ouverts au sens de la métrique induite de F sur $f(A)$. Il en résulte que A est la réunion de deux parties non vides, disjointes, $O_1 = f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap A$ et $O_2 = f^{-1}(\mathcal{O}_2) \cap A$. Au sens de la métrique induite de E sur A , O_1 et O_2 sont des ouverts de A , puisqu'ils sont les images réciproques des ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ dans la restriction de f à A , qui est une surjection continue de A sur $f(A)$. L'hypothèse (H) conduisant à une contradiction, elle est absurde; $f(A)$ est donc connexe.

6° **Continuité uniforme.** — **DÉFINITION.** — L'application f de E dans F est dite uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} M' \text{ et } M'' \in E \\ d(M', M'') < \eta \end{array} \right\} \quad \text{on a} \quad \delta(f(M'), f(M'')) < \varepsilon.$$

THÉORÈME VII. — Une application continue f d'un espace métrique compact (E, d) dans un espace métrique (F, δ) est uniformément continue.

Soit en effet ε un réel positif. A tout point M de E nous pouvons, d'après la continuité de f , associer un réel positif $\alpha(M)$ tel que

$$P \in E \quad \text{et} \quad d(M, P) < \alpha(M) \implies \delta(f(M), f(P)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Désignons par $B(M)$ la boule ouverte de E dont le centre est M et le rayon $\frac{1}{2}\alpha(M)$. Quand M parcourt E , $B(M)$ engendre un recouvrement ouvert du compact E , dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $\mathfrak{R}$ formé de boules ouvertes $\{B(M_1), \dots, B(M_n)\}$, respectivement centrées en $M_1, \dots, M_n$.

Posons $\eta = \inf_i \left[\frac{1}{2} \alpha(M_i) \right]$, ($i = 1, 2, \dots, n$), et considérons deux points, M' et M'' , de E , soumis à la seule condition : $d(M', M'') < \eta$. M' appartient à au moins l'une des boules de $\mathfrak{R}$, soit $M' \in B(M_k)$.

$$\text{D'après :} \quad d(M'', M_k) \leq d(M'', M') + d(M', M_k)$$

$$\text{on a :} \quad d(M'', M_k) < \eta + \frac{1}{2} \alpha(M_k).$$

Le second membre est, *a fortiori*, inférieur à $\alpha(M_k)$.

Ainsi :

$$d(M', M_k) < \alpha(M_k) \quad \text{et} \quad d(M_k, M'') < \alpha(M_k)$$

D'après la définition même de $\alpha(M_k)$, il en résulte

$$\delta(f(M'), f(M_k)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \delta(f(M_k), f(M'')) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui entraîne, du fait de l'inégalité triangulaire,

$$\delta(f(M'), f(M'')) < \varepsilon.$$

La proposition en résulte.

286. Produit d'espaces métriques. — 1° THÉORÈME I. — Le produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ des espaces métriques $(E_1, d_1), \dots, (E_p, d_p)$ admet pour distance entre $M = (M_1, \dots, M_p)$ et $M' = (M'_1, \dots, M'_p)$

$$(1) \quad d(M, M') = \sup d_i(M_i, M'_i), \quad (i = 1, \dots, p).$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle qui a été donnée au n° 133, 3° dans le cas particulier de R^p .

Muni de la distance (1), ou d'une distance équivalente, $E_1 \times \dots \times E_p$ est appelé *espace métrique produit des (E_i, d_i)* ; on le note (E, d) .

THÉORÈME II. — Si les espaces métriques $(E_1, d_1), \dots, (E_p, d_p)$ sont complets, l'espace métrique produit est complet.

La démonstration de ces théorèmes, donnée au n° 137, 4° dans le cas particulier de R^p , se généralise sans difficulté.

THÉORÈME III. — Si les espaces métriques $(E_1, d_1), \dots, (E_p, d_p)$ sont compacts, l'espace métrique produit est compact.

Nous allons montrer que toute suite sur l'espace produit, $\{ (M_1^n, \dots, M_p^n) \}$ admet un point d'adhérence; nous invoquerons alors le théorème VIII du n° 283.

Sur le compact E_1 , la suite $\{M_1^n\}$ admet un point d'adhérence $L_1 \in E_1$; on peut donc en extraire une suite qui converge vers L_1 ; soit $M_1^{p(n)}$ le terme de rang n de cette suite.

Sur le compact E_2 , la suite $\{M_2^{p(n)}\}$ admet un point d'adhérence $L_2 \in E_2$... on peut donc en extraire une suite qui converge vers L_2 ; soit $M_2^{q(p(n))}$ le terme de rang n de cette suite. Il en résulte que sur $E_1 \times E_2$, la suite $\{M_1^{q(p(n))}, M_2^{q(p(n))}\}$ converge vers (L_1, L_2) .

Sur le compact E_3 , la suite $\{M_3^{q(p(n))}\}$ admet un point d'adhérence $L_3 \in E_3$...

Finalement on a su extraire de la suite initiale une suite convergente sur $E_1 \times \dots \times E_p$; la limite de la suite extraite est valeur d'adhérence de la suite initiale; la proposition en résulte.

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME III. — Si le produit (E, d) des espaces métriques $(E_1, d_1), \dots, (E_p, d_p)$ est compact, les (E_i, d_i) sont eux-mêmes compacts.

Soit π l'application projection de E sur E_1 qui, au point $M = (M_1, \dots, M_p)$ de E associe le point $\pi(M) = M_1$ de E_1 . Cette application est continue. En effet, d'après la définition du 1^o,

$$\forall M \in E, \forall M' \in E, d_1(\pi(M), \pi(M')) \leq d(M, M').$$

D'après le théorème V du n^o 285 la compacité de E entraîne celle de E_1 , et plus généralement celle de E_i .

REMARQUE. — Le même raisonnement permet de démontrer que si (E, d) est connexe, il en est de même de chacun des (E_i, d_i) . Il s'agit là de la réciproque du théorème suivant que nous nous contenterons d'énoncer :

THÉORÈME IV. — Si les espaces métriques $(E_1, d_1), \dots, (E_p, d_p)$ sont connexes, l'espace métrique produit est connexe.

287. Les espaces métriques R et R^p . — 1^o **Les intervalles réels.** R est muni de la distance : $d(x, x') = |x - x'|$.

Soit a et b deux nombres réels donnés ($a \leq b$). Les divers sens du mot *intervalle* ont été donnés au n^o 10. En utilisant les définitions du n^o 282, 2^o, on vérifie que sont

ouverts les intervalles : $]a, b[,]a, +\infty[,]-\infty, a[$,

fermés les intervalles : $[a, b], [a, +\infty[,]-\infty, a]$,

ni ouverts, ni fermés les intervalles : $]a, b], [a, b[$.

Les boules ouvertes (resp. fermées) de R sont ainsi les intervalles bornés ouverts (resp. fermés).

$]a, b]$ n'est jamais vide; $]a, b[$ est vide si $a = b$.

2^o Les compacts de R . — **THÉORÈME DE BOREL-LEBESGUE.** — Tout segment réel est un compact.

Nous allons montrer qu'étant donné le recouvrement infini du segment $[a, b]$ par les intervalles bornés ouverts O_i , ($i \in I$), de R , on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Soit G la partie de $[a, b]$ formée par les x tels que le segment $[a, x]$ peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles O_i . Contenant a , G n'est pas vide; majorée par b , la partie non vide G de R admet une borne supérieure γ telle que $\gamma \leq b$. On a d'ailleurs $a < \gamma$: en effet il existe $\alpha \in I$ tel que $a \in O_\alpha$ et G contient l'ensemble $O_\alpha \cap [a, b]$ qui n'est pas réduit à $\{a\}$. Le point γ de $[a, b]$ appartient à au moins l'un des intervalles du recouvrement initial, soit $\gamma \in O_\mu$. Puisque O_μ est ouvert, on peut trouver γ' tel que : $\gamma' \in O_\mu$ et $a \leq \gamma' < \gamma$, ce qui entraîne : $\gamma' \in G$. Soit γ'' l'un quelconque des points de O_μ tels que $\gamma \leq \gamma'' \leq b$. Comme $[a, \gamma']$ peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles O_i et que $[\gamma', \gamma'']$ est recouvert par O_μ , $[a, \gamma'']$ est aussi recouvert par un nombre fini d'intervalles O_i , et $\gamma'' \in G$. Ceci est incompatible avec $\gamma < \gamma''$; on en déduit $\gamma'' = \gamma = b$ et $b \in G$. La proposition en résulte.

COROLLAIRE I. — Une partie de R est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.

Nous avons montré (283, 1° et 3°) que, dans tout espace métrique, un compact est nécessairement fermé et borné. La réciproque, qui est en défaut dans certains espaces métriques, est vraie dans le cas de R . En effet une partie A fermée et bornée de R peut être considérée comme une partie fermée d'un segment S de R ; S étant un compact, il en est de même pour A (théorème II du n° 283, 1°).

Notons que R , qui n'est pas borné, ne saurait être compact.

COROLLAIRE II. — Tout sous-ensemble infini et borné de R possède un point d'accumulation.

Il s'agit en effet d'une partie infinie d'un segment, c'est-à-dire d'un compact qui possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

REMARQUE. — A l'inverse, nous aurions pu déduire la démonstration du théorème de Borel-Lebesgue de la démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass donnée au n° 12, 3°.

COROLLAIRE III. — R est complet.

Comme sur tout espace métrique (n° 137, 4°), une suite de Cauchy sur R est bornée; on peut donc la considérer comme une suite sur un segment S de R ; S étant compact, la suite converge sur S (théorème VII du n° 283) et, par suite, elle converge sur R . La proposition en résulte.

Cette démonstration a été faite directement au n° 24, 2°; une autre démonstration a été donnée au n° 32, 5°.

3° Les connexes de R . — **THÉORÈME.** — Une partie de R est connexe si, et seulement si elle est convexe, c'est-à-dire s'il s'agit d'un intervalle.

a) Soit A une partie connexe de R . Si elle est réduite à un point on peut la considérer comme un segment. Dans le cas contraire, nous allons montrer que si a et b sont deux points distincts de A , ($a < b$), le segment $[a, b]$ est contenu dans A , ce qui permettra d'affirmer que A est un intervalle (n° 54, 4°).

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver : $x \in]a, b[, x \notin A$; A serait contenu dans la réunion des deux ouverts disjoints, $] -\infty, x[$ et $]x, +\infty[$, de R , contenant respectivement les points a et b ; A ne serait pas connexe (284, 1°).

b) Soit A un intervalle de R et F une partie non vide de A , à la fois ouverte et fermée dans A ; nous allons montrer que $F = A$, ce qui permettra d'affirmer que A est connexe.

Pour cela fixons un point a de A ; désignons par A' et F' les parties de A et F situées à droite de a ($x \geq a$); soit G la partie de A' formée par les x tels que $[a, x] \subset F$. Contenant a , G n'est pas vide. Deux cas sont possibles :

α) G n'est pas majoré. C'est que F contient $[a, +\infty[$, qui est à la fois A' et F' .

β) G est majoré et admet, dans R , une borne supérieure γ . Pour tout γ' tel que $a \leq \gamma' < \gamma$, il existe un élément de G plus grand que γ' et on a $[a, \gamma'] \subset F$. Ce cas se subdivise lui-même et *a priori* on peut concevoir :

I. Supposons $\gamma \notin A$. A' et F' sont l'un et l'autre, $[a, \gamma[$.

II. Supposons $\gamma \in A$ et supposons que γ est extrémité droite de l'intervalle A . Dans A , γ est un point adhérent à F et, comme F est fermé dans A , on a $\gamma \in F$. Ici A' et F' sont, l'un et l'autre, $[a, \gamma]$.

III. Supposons $\gamma \in A$, et supposons que l'intervalle A a des points à droite de γ . Comme en II, on en déduit $\gamma \in F$. F , qui est ouvert dans A contient un sous-intervalle ouvert de A , centré en γ ; on peut trouver γ'' tel que $\gamma'' > \gamma$ et $[\gamma, \gamma''] \subset F$, ce qui entraîne $\gamma'' \in G$ et constitue une contradiction avec le fait que γ est borne supérieure de G .

Ainsi, dans les seuls cas possibles I et II, on a $A' = F'$; on démontrerait de la même façon que les parties de A et F situées à gauche de a , ($x \leq a$), coïncident et, finalement $A = F$.

4° Application aux fonctions numériques. — DÉFINITION. — On appelle fonction numérique une application d'un espace métrique quelconque dans l'espace métrique R .

THÉORÈME. — Une fonction numérique continue, définie sur un compact, admet une borne supérieure, une borne inférieure et elle atteint ces bornes.

Soit f une application continue de l'espace métrique compact E dans R . D'après le théorème V du n° 285, $f(E)$ est un compact de R , c'est-à-dire (2°) une partie fermée et bornée de R .

Étant bornée, $f(E)$ admet une borne supérieure γ et une borne inférieure γ' .

D'après leur définition même, γ et γ' sont des points adhérents à $f(E)$. Or ce dernier, qui est fermé, contient ses points adhérents. La proposition en résulte.

Dans le cas où l'espace-objet est non seulement compact, mais encore connexe, on peut ainsi compléter le théorème précédent :

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES. — L'image par une fonction numérique continue f d'un espace métrique à la fois compact et connexe est un segment.

Reprenons la démonstration précédente dans le cas où E est, en outre, connexe. D'après le théorème VI du n° 285, $f(E)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire (3°), un intervalle, qui ne peut être que le segment $[\gamma', \gamma]$.

COROLLAIRE. — Puisque l'image par la fonction continue f d'un espace métrique à la fois compact et connexe est un segment, f prend au moins une fois toute valeur comprise (au sens large) entre ses bornes.

5° L'espace métrique $\mathbb{R}^p$. — a) Sur l'ensemble $\mathbb{R}^p$ des p -uples rangés de réels, $M = (x_1, \dots, x_p)$, nous adoptons la distance (133, 3°) :

$$d(M, M') = \sup |x_i - x'_i|, \quad (i = 1, \dots, p).$$

Une boule ouverte est ainsi un pavé ouvert; une boule fermée est un pavé fermé.

En considérant $\mathbb{R}^p$ comme l'espace métrique produit de p espaces métriques confondus avec $\mathbb{R}$, nous pouvons appliquer les résultats du n° 286.

C'est ainsi qu'à partir de la compacité d'un segment réel (2°), le théorème III du n° 286 permet d'énoncer :

THÉORÈME. — Tout pavé fermé de $\mathbb{R}^p$ est compact.

Il en résulte, d'une part le théorème de Bolzano-Weierstrass, que nous avons admis au n° 137, d'autre part (cf. 2°) le corollaire suivant :

COROLLAIRE I. — Une partie de $\mathbb{R}^p$ est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.

COROLLAIRE II. — $\mathbb{R}^p$ est complet.

On peut étendre la démonstration du corollaire III du 2°, ou encore raisonner directement (cf n° 137, 4°).

b) **Équivalence des distances déduites des normes.** — Les résultats précédents ont été obtenus à partir du choix particulier d'une distance dans $\mathbb{R}^p$; ils subsistent si on munit $\mathbb{R}^p$ de la distance déduite d'une norme quelconque sur $\vec{\mathbb{R}}^p$ (n° 135, 3° et 136, 2°). Nous allons en effet démontrer l'équivalence de deux normes sur l'espace vectoriel $\vec{\mathbb{R}}^p$.

THÉORÈME. — Sur l'espace vectoriel $\vec{\mathbb{R}}^p$, deux normes quelconques sont équivalentes.

Du fait de la transitivité de l'équivalence, il suffit de démontrer l'équivalence d'une norme quelconque, N , et de la norme $\| \cdot \|$ définie sur $\vec{\mathbb{R}}^p$ rapporté à sa base canonique $\{ \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p \}$ par

$$(1) \quad \vec{X} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i \quad \longleftrightarrow \quad \| \vec{X} \| = \sup_i |x_i|.$$

a) La relation (1) entraîne

$$N(\vec{X}) \leq \sum_{i=1}^p (|x_i| N(\vec{e}_i)) \quad \text{et} \quad N(\vec{X}) \leq \sup_i |x_i| \times \sum_{i=1}^p N(\vec{e}_i).$$

Ainsi, pour tout $\vec{X} \in \vec{R}^p$,

$$(2) \quad N(\vec{X}) \leq k \|\vec{X}\| \quad \text{avec} \quad k = \sum_{i=1}^p N(\vec{e}_i).$$

b) De la relation (2) on déduit

$$|N(\vec{X} + \vec{H}) - N(\vec{X})| \leq N(\vec{H}) \leq k \|\vec{H}\|.$$

Il en résulte que, quand on considère $\vec{R}^p$ comme un espace métrique muni de la distance d associée à la norme $\|\cdot\|$, l'application N de $\vec{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est continue.

Considérons alors la partie S de $\vec{R}^p$ formée par les $\vec{X}$ tels que $\|\vec{X}\| = 1$. Dans l'espace métrique $(\vec{R}^p, d)$, S est la frontière de la boule ouverte dont le centre est 0 et dont le rayon est 1 . Par suite S est une partie fermée et bornée, donc compacte, de $\vec{R}^p$; l'image de S par l'application continue N est un segment $[m, M]$ de $\mathbb{R}$; il existe un élément $\vec{L}$ de S tel que $N(\vec{L}) = m$; on a $\vec{L} \neq \vec{0}$, d'après $\|\vec{L}\| = 1$; il en résulte que m est strictement positif.

Pour tout $\vec{X} \in \vec{R}^p - \{\vec{0}\}$, l'élément $\vec{Y} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ de S vérifie $N(\vec{Y}) \geq m$.

D'où

$$(2) \quad N(\vec{X}) \geq m \|\vec{X}\|,$$

relation qui, par ailleurs, est vérifiée par $\vec{X} = \vec{0}$.

c) Finalement :

$$\forall \vec{X} \in \vec{R}^p, \quad m(\vec{X}) \leq N(\vec{X}) \leq k \|\vec{X}\|,$$

ce qui montre l'équivalence des normes N et $\|\cdot\|$.

6° Arcs d'un espace métrique. — Soit (E, d) un espace métrique.

a) DÉFINITION. — On appelle arc paramétré ⁽¹⁾ et on note (I, f) toute application continue, $u \mapsto f(u)$, d'un segment réel I dans l'espace métrique (E, d) .

$f(I)$ est une partie de E qui est dite support de l'arc paramétré (I, f) ; image directe d'un compact (resp. connexe) par une application continue, $f(I)$ est

(1) En fait, il faudrait dire arc paramétré continu.

Dans le cas où E est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on peut dire qu'une application f de classe C^k d'un intervalle réel I dans E détermine un arc paramétré de classe C^k .

un compact (resp. connexe) de E (n° 285, 3°); en particulier $f(I)$ est une partie bornée de E (n° 283, 3°).

b) Pour déduire de la notion d'arc paramétré la notion de *courbe*, telle qu'on l'entend en géométrie élémentaire, nous commencerons par poser :

DÉFINITION. — On dit qu'un point M de E est *point simple de l'arc paramétré* (I, f) s'il existe un et un seul réel du segment I dont l'image par f est M .

Si M est l'image par f de plusieurs réels du segment I , on dit que M est un *point multiple* de l'arc paramétré (I, f) .

Cette définition a l'inconvénient d'attacher la notion d'ordre de multiplicité d'un point non seulement au support (en tant que partie de E), mais à l'application elle-même. C'est ainsi que, φ désignant une surjection continue d'un second segment réel J sur le segment I , les arcs paramétrés (I, f) et $(J, f \circ \varphi)$ ont le même support; mais, si tout point multiple de l'arc paramétré (I, f) est point multiple de l'arc paramétré $(J, f \circ \varphi)$, il se peut qu'un point simple de (I, f) soit point multiple de $(J, f \circ \varphi)$.

Cette dernière éventualité ne se produit cependant pas si φ est une bijection continue, c'est-à-dire un homéomorphisme, de J sur I . Nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante, dont la vérification est laissée au soin du lecteur :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — Dans l'ensemble des arcs paramétrés d'un espace métrique (E, d) , la relation binaire $\mathcal{R}$ « $(I, f) \mathcal{R} (J, g)$ » signifie qu'il existe un homéomorphisme φ de J sur I tel que $g = f \circ \varphi$ » est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence est dite *arc géométrique*.

Chacun des arcs paramétrés qui constituent un arc géométrique $\mathcal{A}$ est dit *représentation paramétrique admissible* de $\mathcal{A}$; le support commun de ces arcs paramétrés est dit *support de l'arc géométrique* $\mathcal{A}$.

ORIENTATION D'UN ARC GÉOMÉTRIQUE. — Si, dans la définition précédente nous imposons à la bijection continue φ (qui, de toutes façons, est une application strictement monotone (59, 4°, b)) d'être une application croissante, $\mathcal{R}$ est remplacée par une relation d'équivalence plus restrictive, que nous désignons par $\mathcal{R}'$; $\mathcal{R}'$ détermine une partition $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}^-$ de l'arc géométrique $\mathcal{A}$ en deux classes disjointes; $\mathcal{A}^+$ est l'ensemble des arcs paramétrés équivalents, modulo $\mathcal{R}'$, à l'un d'eux, $([a, b], f)$, choisi arbitrairement; $([\alpha, \beta], \psi)$ étant l'élément générique de $\mathcal{A}^+$, on a : $\psi(\alpha) = f(a)$ et $\psi(\beta) = f(b)$. On dit que $\mathcal{A}^+$ est un *arc géométrique orienté* et que les points $f(a)$ et $f(b)$ de E sont respectivement *l'origine* et *l'extrémité* (1) de $\mathcal{A}^+$.

c) **DÉFINITION.** — L'arc paramétré (I, f) est dit *simple* quand l'application f

(1) Dans le cas d'un arc géométrique non orienté, on ne peut parler des extrémités que dans leur ensemble.

est injective, c'est-à-dire quand tout point de $f(I)$ est un point simple de l'arc paramétré.

Le produit de deux injections étant une injection, si (I, f) est un arc simple, tout arc paramétré équivalent à (I, f) , modulo $\mathcal{R}$, est également un arc simple. En outre (ce qui n'est pas vrai pour deux arcs paramétrés quelconques) ⁽¹⁾ si deux arcs paramétrés simples (I, f) et (J, g) ont le même support Γ , ils sont équivalents modulo $\mathcal{R}$. En effet f peut être considérée comme une bijection continue du compact I sur l'espace métrique Γ (muni de la métrique induite); d'après le n° 285, 4°, il s'agit d'un homéomorphisme de I sur Γ ; il existe une bijection réciproque, f^{-1} , qui est un homéomorphisme de Γ sur I . Désignons par φ le produit $f^{-1} \circ g$ de l'homéomorphisme g de J sur Γ par l'homéomorphisme f^{-1} de Γ sur I ; φ est un homéomorphisme de J sur I , tel que $g = f \circ \varphi$; d'où $(I, f) \mathcal{R} (J, g)$.

Cette propriété des arcs paramétrés simples conduit à poser :

DÉFINITIONS. — I. On appelle *arc de Jordan* ⁽²⁾ toute partie d'un espace métrique qui peut être considérée comme l'image d'un segment réel par une application continue et injective.

II. — On appelle *arc de Jordan fermé* toute partie Γ d'un espace métrique qui peut être considérée comme l'image d'un segment réel $[a, b]$ par une application continue f telle que $f(a) = f(b)$ et que la restriction de f à $]a, b[$ est injective.

7° Espaces métriques connexes par arcs.

a) **DÉFINITION.** — Un espace métrique (E, d) est dit *connexe par arcs* si à tout couple (P, Q) de points de E on peut associer un arc paramétré $([a, b], f)$ tel que $f(a) = P$ et $f(b) = Q$.

THÉORÈME. — Si un espace métrique (E, d) est connexe par arcs, il est connexe.

Raisonnons par l'absurde; supposons (hypothèse (H)) que E n'est pas connexe, c'est-à-dire que E est la réunion de deux ouverts non vides, disjoints, O_1 et O_2 . On peut trouver un arc paramétré $([a, b], f)$ tel que $f(a) \in O_1$ et $f(b) \in O_2$; soit Γ le support de cet arc paramétré. Les traces sur Γ des ouverts disjoints O_1 et O_2 de E , dont la réunion est E , sont des ouverts disjoints de Γ dont la réunion est Γ .

Ces traces, qui contiennent respectivement $f(a)$ et $f(b)$, ne sont pas vides. Il en résulte que Γ n'est pas connexe, ce qui constitue une contradiction puisque (6°, a) l'image d'un arc paramétré est une partie connexe de E .

(1) Cf. représentations impropres au n° 11, 2° du tome IV.

(2) Quand il n'y aura pas lieu de craindre une confusion avec un arc paramétré nous dirons *arc simple continu* au lieu d'*arc de Jordan*.

L'hypothèse (H) est donc absurde. La proposition en résulte.

REMARQUE. — Inversement, un espace connexe n'est pas nécessairement connexe par arcs, ainsi que le montre l'exemple suivant :

Soit C l'image de l'intervalle réel $]0, 1]$ par l'application

$$x \longrightarrow \left(x, \sin \frac{\pi}{x}\right)$$

de $]0, 1]$ dans l'espace métrique R^2 ; il s'agit d'une application continue car les *applications coordonnées*

$$x \longrightarrow x \quad \text{et} \quad x \longrightarrow \sin \frac{\pi}{x}$$

sont l'une et l'autre continues (IV, 2, 6°).

L'intervalle $]0, 1]$ étant connexe, son image C par une application continue l'est aussi; on en déduit (284) que l'adhérence, $\bar{C}$, de C dans R^2 est connexe. On démontre alors successivement : α) les points adhérents à C et n'appartenant pas à C sont les points de la partie S de R^2 caractérisée par

$$x = 0, \quad y \in [-1, +1];$$

β) Il n'existe pas d'arc paramétré de R^2 dont l'image est contenue dans $\bar{C} = C \cup S$ et qui contient, par exemple, le point $(0, 0)$ de S et le point $(1, 0)$ de C . Ainsi $\bar{C}$ n'est pas connexe par arcs.

b) THÉORÈME. — Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E , $([a, b], f)$ un arc paramétré tel que $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent respectivement à l'intérieur O_1 et à l'extérieur O_2 de A . L'image Γ de l'arc paramétré contient au moins un point de la frontière de A .

O_1 et O_2 étant des ouverts disjoints de E , leurs traces sur Γ sont des ouverts disjoints de Γ , non vides puisque contenant respectivement $f(a)$ et $f(b)$; ces traces ne peuvent constituer une partition de Γ , sans quoi celui-ci ne serait pas connexe. Il existe donc au moins un point de Γ qui n'appartient ni à O_1 ni à O_2 ; ce point appartient nécessairement à $fr A$.

8° Une application à R^2 . — On démontre, et nous admettons :

THÉORÈME DE JORDAN. — Si, dans le plan R^2 , Γ est un arc de Jordan fermé, son complémentaire relativement à R^2 est la réunion de deux ouverts connexes non vides disjoints, de frontière commune, Γ , dont l'un est borné.

Désignons par Δ ce dernier ouvert. $\Delta \cup \Gamma$, réunion de Δ et de sa frontière est l'adhérence, $\bar{\Delta}$, de Δ ; il s'agit d'une partie fermée et bornée, donc compacte de R^2 ; d'autre part $\bar{\Delta}$, qui est l'adhérence d'une partie connexe de R^2 est elle-même connexe (284). Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser le fait qu'une fonction f continue sur $\bar{\Delta}$ est uniformément continue et que $f(\bar{\Delta})$ est un segment.

Nous dirons que Δ est le *domaine intérieur* à Γ et nous poserons :

DÉFINITION. — Une partie A de R^2 est dite simplement connexe si le domaine intérieur à tout arc de Jordan fermé de A est une partie de A .

EXERCICES

1. — Dans un espace métrique (E, d) on pose

$$\delta(M, M') = \frac{d(M, M')}{1 + d(M, M')}.$$

Montrer que δ est une distance sur E . Les distances d et δ sont-elles équivalentes? Ces distances définissent-elles la même topologie?

2. — Soit (E, d) un espace métrique et F l'ensemble des parties fermées, non vides, de E . Étant donné $x \in E$ et $A \in F$ on pose

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

A tout couple (A, B) d'éléments de F on associe $d(A, B)$ qui est le plus grand des nombres

$$\sup_{y \in B} \rho(y, A) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in A} \rho(x, B).$$

Montrer que d est une distance sur F .

3. — *Espaces ultramétriques.* Soit E un ensemble tel qu'existe une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les axiomes.

$$\text{I.} \quad d(M, M') = 0 \iff M = M'; \quad \text{II.} \quad d(M, M') = d(M', M)$$

$$\text{III.} \quad d(M, M') \leq \sup(d(M, M''), d(M', M'')).$$

a) Montrer que d est une distance. (E, d) est dit *espace ultramétrique*.

b) A titre d'exemple, montrer que l'on munit l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une ultra-distance si aux deux polynômes P et Q on associe

$$d(P, Q) = 0 \quad \text{si} \quad P = Q \quad \text{et} \quad d(P, Q) = e^{-v(P-Q)} \quad \text{si} \quad P \neq Q,$$

($v(R)$ désigne la valuation (I, 90) du polynôme R).

c) Montrer que, dans un espace ultra-métrique (E, d) :

a) Tout triangle est isocèle,

β) Toute boule ouverte et toute boule fermée est à la fois un ouvert et un fermé; tout point d'une telle boule en est un centre,

γ) Les boules ouvertes distinctes, de rayon r , contenues dans une boule fermée $\mathfrak{B}$ donnée, de rayon r , sont deux à deux disjointes et leur réunion est $\mathfrak{B}$.

δ) Si deux boules ont un point commun, l'une d'elles contient l'autre,

e) Une suite $\{M_n\}$ est une suite de Cauchy si, et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(M_{n+1}, M_n) = 0.$$

4. — *Méthode des approximations successives.* — Soit (E, d) un espace métrique complet et f une application de (E, d) dans lui-même, telle qu'il existe une constante réelle k ($0 < k < 1$), donnant lieu à l'inégalité

$$\forall (M', M'') \in E \times E \quad d(f(M'), f(M'')) \leq k d(M', M'')$$

on dit que f est une application contractante de (E, d) dans lui-même).

a) Montrer que f est uniformément continue

b) Montrer qu'il existe un, et un seul point X de E qui vérifie l'équation

$$(1) \quad f(X) = X$$

Pour cela on partira d'un point M_0 , de E , arbitrairement choisi. On montrera que la suite

$\{M_n\}$ telle que $M_n = f(M_{n-1})$ est une suite de Cauchy dont la limite vérifie (1) et que l'équation n'a pas d'autre solution.

c) On donne, en outre, un point Y de E . Montrer que l'équation à l'inconnue $X \in E$

$$(2) \quad f(X) + X = Y$$

admet une, et une seule, solution.

5. — On donne un espace métrique compact E , une application continue f de E dans R et un ensemble Φ d'applications continues de E dans R tel qu'à tout point M de E on puisse attacher une application $\varphi_M \in \Phi$ qui prenne au point M une valeur strictement supérieure à $f(M)$. On désigne par $O(M)$ la partie de E formée par les points P tels que (strictement)

$$\varphi_M(P) > f(P).$$

a) Montrer que $O(M)$ est un ouvert de E . En déduire qu'il existe un nombre fini de points M_i de E tels que E soit la réunion des $O(M_i)$.

b) Montrer qu'il existe un nombre fini d'applications $\varphi_i \in \Phi$ telles que l'application v de E dans R déterminée par : $v(M) = \sup_i \varphi_i(M)$ vérifie

$$\forall M \in E, \quad v(M) > f(M).$$

c) On suppose ici que Φ est tel qu'à tout couple (φ_1, φ_2) de fonctions de Φ on peut associer une fonction φ_3 de Φ telle que

$$\forall M \in E, \quad \varphi_3(M) > \varphi_1(M) \quad \text{et} \quad \varphi_3(M) > \varphi_2(M).$$

Soit u l'application de E dans R qui au point générique M de E associe la borne supérieure (supposée finie) des réels $\varphi(M)$, quand φ parcourt Φ ; on suppose que u est continue. Montrer que, quel que soit le nombre positif ε , il existe une fonction de Φ qui approche u à ε près (207).

6. — a) Soit f une bijection continue de R sur une partie B de R . Montrer que f est strictement monotone, que f est un homéomorphisme, que B est un ouvert de R .

b) Soit f un homéomorphisme d'une partie, A , de R sur une autre, B . Montrer que l'image par f de l'intérieur de A est l'intérieur de B . Montrer que si A est ouvert, il en est de même pour B .

APPENDICE II

FONCTIONS COMPLEXES
D'UNE VARIABLE COMPLEXE

288. Terminologie et notations. — 1° L'ensemble R^2 des couples (x, y) de nombres réels peut être muni d'une structure de groupe additif par la loi interne

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

L'ensemble R^2 peut être ensuite muni d'une structure de corps par adjonction de la loi interne multiplicative

$$(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx');$$

R^2 est alors noté C (tome I, nos 71 à 75); son élément générique est appelé le nombre complexe z , de partie réelle x , de partie imaginaire y .

L'ensemble R^2 peut être aussi muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien de dimension 2 par adjonction à la loi interne additive d'une loi externe dite multiplication par un réel, et de la norme euclidienne. R^2 sera ici noté $\vec{P}$, son élément générique devenant le vecteur de coordonnées x et y , dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$ constituée par les vecteurs $\vec{U} = (1, 0)$ et $\vec{V} = (0, 1)$. P désignera l'espace affine de dimension 2 obtenu en munissant $\vec{P}$ de sa structure affine canonique (III, 49); P sera rapporté au repère $\{O, \vec{U}, \vec{V}\}$.

Le même élément de R^2 est ainsi tantôt un nombre complexe de C , tantôt un vecteur de $\vec{P}$, tantôt un point de P ; on peut dire qu'il existe une bijection de C sur P (resp. $\vec{P}$), obtenue en associant au nombre complexe $z = x + iy$ le point $m = (x, y)$ [resp. le vecteur $\vec{m} = (x, y)$], tel que

$$\vec{Om} = x\vec{U} + y\vec{V} \quad \left[\text{resp. } \vec{m} = x\vec{U} + y\vec{V} \right]$$

z est l'affixe de m (resp. $\vec{m}$), m est le *point-image* de z , $\vec{m}$ est le *vecteur-image* de z . P est appelé *plan complexe* (il s'agit naturellement d'un abus de langage).

2° Les généralités sur les fonctions complexes d'une variable complexe (en particulier la continuité) ayant été étudiées au n° 157, nous pouvons asso-

cier biunivoquement à toute application f d'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ une application F d'une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$, selon le schéma

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z = x + iy \in \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & Z = X + iY \in \mathbb{C} \\ & \updownarrow & \\ m = (x, y) \in \mathcal{D} & \xrightarrow{F} & M = (X, Y) \in \mathbb{P}. \end{array} \right.$$

On dit que l'application F est l'image de l'application f .

La norme euclidienne d'un vecteur de $\vec{\mathbb{P}}$ étant égale au module de l'affixe de ce vecteur, $\mathcal{C}$ est un voisinage de $z_0 = (x_0, y_0)$ si, et seulement si, $\mathcal{D}$ est un voisinage du point-image, m_0 , de z_0 ; d'autre part (139 et 157) f est continue en z_0 si, et seulement si F est continue en m_0 .

3° Dans le plan complexe $\mathbb{P}$ nous appellerons :

chemin une succession d'arcs simples continûment différentiables, c'est-à-dire admettant une représentation paramétrique continûment dérivable (IV, 10 et 11); il résulte de cette définition qu'un chemin est rectifiable (IV, 110);

circuit un chemin fermé;

circuit simple un chemin fermé sans point double;

domaine simplement connexe un domaine $\mathcal{D}$ qui contient l'intérieur de tout circuit simple contenu dans $\mathcal{D}$ (n° 287, 6°).

289. Dérivée d'une fonction complexe. — 1° Soit f une fonction complexe de la variable complexe, définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ du point z_0 ; l'image F de f est ainsi une application du plan complexe $\mathbb{P}$ dans lui-même, définie sur un voisinage du point m_0 dont l'affixe est z_0 .

DÉFINITION I. — On dit que f est dérivable au point z_0 si le quotient

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

admet une limite quand z tend vers z_0 ; cette limite est alors notée $f'(z_0)$ et appelée *dérivée de f au point z_0* .

En raisonnant comme dans le cas d'une fonction réelle d'une variable réelle (68 et 70) on démontre que :

a) une fonction dérivable en un point est continue en ce point;

b) si f et g sont des fonctions de la variable complexe dérivables au point z_0 , les fonctions

$$f + g, \lambda f (\lambda : \text{constante complexe}), fg, \frac{1}{g} \text{ (pourvu que } g(z_0) \neq 0)$$

sont dérivables au point z_0 et leurs dérivées sont respectivement

$$f'(z_0) + g'(z_0), \quad \lambda f'(z_0), \quad f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \quad -\frac{g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

2° DÉFINITION II. — On dit que f est différentiable au point z_0 s'il existe un nombre complexe l tel que l'application ε de C dans C définie, pour $u \neq 0$ et $|u|$ assez petit, par

$$(1) \quad f(z_0 + u) - f(z_0) = lu + |u| \times \varepsilon(u)$$

admette la limite 0 quand u tend vers 0.

La forme linéaire sur C , $u \rightarrow lu$, est alors appelée *application différentielle* de f au point z_0 . L'image de l'élément générique dz de C par cette application différentielle peut se noter dZ .

En raisonnant comme au n° 68, 6°, on démontre :

THÉORÈME. — La fonction f admet au point z_0 la dérivée l si et seulement si elle admet en ce point l'application différentielle

$$u \rightarrow lu.$$

3° Nous allons interpréter le théorème précédent en supposant $l \neq 0$ et en nous plaçant dans le plan complexe P . Le nombre complexe $u = \xi + i\eta$ est l'affixe d'un vecteur $\vec{h} = (\xi, \eta)$ de $\vec{P}$; le nombre complexe lu , ($l = \rho e^{i\alpha}$, $\rho \neq 0$), est l'affixe du vecteur $\mathcal{G}(\vec{h})$ déduit de $\vec{h}$ par la similitude $\mathcal{G}$ qui, dans l'espace vectoriel $\vec{P}$, est le produit de l'homothétie de rapport ρ et de la rotation dont l'angle a pour mesure α ; enfin le nombre complexe $\varepsilon(u)$ est l'affixe d'un vecteur de $\vec{P}$ qui dépend indifféremment de u ou de $\vec{h}$ et que nous pouvons désigner par $\omega(\vec{h})$. Nous avons

$$\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \omega(\vec{h}) = \vec{0}.$$

En écrivant (1) sous la forme équivalente

$$(2) \quad F(m_0 + \vec{h}) - F(m_0) = \mathcal{G}(\vec{h}) + \|\vec{h}\| \times \omega(\vec{h}),$$

il en résulte que f admet au point z_0 la dérivée l si, et seulement si, l'application ω de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ définie, pour $\vec{h} \neq \vec{0}$ et $\|\vec{h}\|$ assez petit, par (2) admet la limite $\vec{0}$ quand $\vec{h}$ tend vers $\vec{0}$, ce qui signifie (160) que F admet $\mathcal{G}$ pour application différentielle au point m_0 . En conclusion :

THÉORÈME. — Une fonction complexe d'une variable complexe admet au point z_0 une dérivée non nulle si, et seulement si, son image dans le plan complexe est différentiable au point m_0 d'affixe z_0 , et y admet pour application différentielle une similitude.

4° APPLICATION. — La composée de deux fonctions dérivables d'une variable complexe est une fonction dérivable.

En effet soit f une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{C}$ de z_0 et admettant en ce point la dérivée l . Soit d'autre part φ une fonction définie sur un domaine qui contient $f(\mathcal{C})$ et admettant au point $\zeta_0 = f(z_0)$ la dérivée λ . On peut introduire la fonction composée, $\varphi \circ f$, définie sur $\mathcal{C}$.

Soient F et Φ les images de f et φ dans P ; F , définie sur un voisinage $\mathcal{D}$ de m_0 , admet en ce point une application différentielle, qui est une similitude $\mathcal{G}$; Φ , définie sur un domaine qui contient $F(\mathcal{D})$, admet au point $\mu_0 = F(m_0)$ une application différentielle, qui est une similitude Σ ; il en résulte que $\Phi \circ F$, qui est définie sur $\mathcal{D}$ et est l'image de $\varphi \circ f$, admet au point m_0 (162) l'application différentielle $\Sigma \circ \mathcal{G}$, qui n'est autre que la similitude associée au nombre complexe λl . Il en résulte que $\varphi \circ f$ admet λl pour dérivée au point z_0 .

Nous aurions d'ailleurs pu démontrer ce résultat en raisonnant comme au n° 70, 90.

290. Expression de la dérivée d'une fonction complexe, relations de Cauchy-Riemann. — 1° L'application F est différentiable au point m_0 si, et seulement si (161, 2°), les applications « coordonnées », $X(x, y)$ et $Y(x, y)$, sont différentiables en m_0 ; l'application différentielle de f en z_0 se traduit alors, dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$ de $\vec{P}$, par la matrice jacobienne (161) :

$$(1) \quad \begin{bmatrix} X'_x(x_0, y_0) & X'_y(x_0, y_0) \\ Y'_x(x_0, y_0) & Y'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

f admet au point z_0 une dérivée non nulle si et seulement si l'application différentielle précédente est une similitude $\mathcal{G}$ de $\vec{P}$ qui est caractérisée par un nombre complexe non nul $l = \rho e^{i\alpha}$ ou $l = \xi + i\eta$; $\mathcal{G}$ étant traduite dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$ par la matrice

$$(2) \quad \rho \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{bmatrix}$$

nous sommes ramenés à écrire qu'il existe deux nombres réels ξ et η pour lesquels les matrices (1) et (2) sont égales, soit

$$(3) \quad X'_x(x_0, y_0) = Y'_y(x_0, y_0) = \xi, \quad Y'_x(x_0, y_0) = -X'_y(x_0, y_0) = \eta.$$

Ces relations subsistent dans le cas où f admet au point z_0 une dérivée nulle, ce qui correspond à $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — La fonction f de la variable complexe z telle que

$$z = x + iy \quad \longrightarrow \quad f(z) = X(x, y) + iY(x, y)$$

est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si, et seulement si, les fonctions des deux variables x et y

$$(x, y) \quad \longrightarrow \quad X(x, y) \quad \text{et} \quad (x, y) \quad \longrightarrow \quad Y(x, y)$$

sont différentiables au point (x_0, y_0) et si leurs dérivées partielles en ce point vérifient les conditions, dites de Cauchy-Riemann,

$$X'_x(x_0, y_0) = Y'_y(x_0, y_0), \quad Y'_x(x_0, y_0) = -X'_y(x_0, y_0).$$

On a alors

$$f'(z_0) = X'_x(x_0, y_0) + iY'_x(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad Y'_y(x_0, y_0) - iX'_y(x_0, y_0).$$

Notons que le jacobien (ou déterminant de la matrice jacobienne) de F en m_0 est alors

$$(X'_x(x_0, y_0))^2 + (Y'_x(x_0, y_0))^2 \quad \text{ou} \quad |f'(z_0)|^2.$$

D'autre part l'application différentielle de f associée à l'élément générique $dz = dx + idy$ de $\mathbb{C}$ le nombre complexe

$$dZ = (\xi + i\eta)(dx + idy) \quad \text{ou} \quad (\xi dx - \eta dy) + i(\eta dx + \xi dy)$$

qui s'écrit, compte tenu de (3)

$$dZ = (X'_x dx + X'_y dy) + i(Y'_x dx + Y'_y dy) \quad \text{ou} \quad dX + i dY,$$

dX et dY désignant les images de (dx, dy) par les applications différentielles de $X(x, y)$ et $Y(x, y)$, au point (x_0, y_0) .

EXEMPLE DE FONCTION NON DÉRIVABLE. — La fonction $f(z) = \bar{z}$, quoique continue en tout point de $\mathbb{C}$, n'est dérivable en aucun point; en effet on a

$$X(x, y) = x, \quad Y(x, y) = -y$$

et les conditions de Cauchy-Riemann ne sont vérifiées en aucun point de $\mathbb{C}$.

2° Interprétation géométrique. — Nous supposons ici que la fonction f admet au point z_0 une dérivée non nulle, $f'(z_0) = \rho e^{i\alpha}$, ($\rho \neq 0$). L'image par l'application F d'une courbe γ qui passe par m_0 est une courbe Γ qui passe par $M_0 = F(m_0)$. Pour un point m de γ , dont l'image par F est le point M de Γ , le quotient $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ est le quotient des affixes des vecteurs $\overrightarrow{M_0 M}$ et $\overrightarrow{m_0 m}$ de P . La limite de ce quotient quand m tend vers m_0 en décrivant γ est $\rho e^{i\alpha}$. D'où

$$(4) \quad \lim_{m \rightarrow m_0} \frac{\|\overrightarrow{M_0 M}\|}{\|\overrightarrow{m_0 m}\|} = \rho \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow m_0} \left[\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{M_0 M} \right) - \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{m_0 m} \right) \right] = \alpha \quad (5)$$

De (5) il résulte que Γ admet une tangente au point M_0 si, et seulement si, γ admet une tangente au point m_0 et, dans ce cas, les deux courbes ayant été orientées de façon que les sens positifs se correspondent, l'angle de la tangente orientée en m_0 à γ et de la tangente orientée en M_0 à Γ est α . Cet angle ne dépend pas de γ , si bien que si deux courbes γ et γ' se coupent en m_0 sous un angle φ , les courbes-images $\Gamma = F(\gamma)$ et $\Gamma' = F(\gamma')$ se coupent en $M_0 = F(m_0)$ sous le même angle φ . On traduit cette propriété en disant que F est une *transformation conforme* au point m_0 .

3° Fonctions réciproques. — Soit f une fonction de la variable z , définie sur $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$, et admettant sur $\mathcal{C}$ une fonction dérivée f' continue qui ne prend la valeur 0 en aucun point de $\mathcal{C}$.

Le théorème fondamental du 1° permet alors d'affirmer que l'application F de $\mathcal{D}$ dans P (image de f)

$$m(x, y) \xrightarrow[\ominus]{F} M(X, Y),$$

est continûment différentiable sur $\mathcal{D}$ et que son jacobien, $|f'(z)|^2$ n'est nul en aucun point de $\mathcal{D}$. Il en résulte (165, 2°) que F est inversible.

En revenant à la fonction f , on peut dire que, z_0 étant un point de $\mathcal{C}$, il existe un voisinage δ de z_0 et un voisinage Δ de $Z_0 = f(z_0)$ tels que la restriction de f à δ soit une bijection de δ sur Δ .

Il existe donc une fonction réciproque de f , soit φ

$$Z \xrightarrow[\ominus]{\varphi} z = \varphi(Z)$$

définie sur un voisinage convenablement choisi de $Z_0 \in f(\mathcal{C})$, telle que

$$z_0 = \varphi(Z_0),$$

et cette fonction réciproque est continue au point Z_0 .

Un raisonnement analogue à celui du n° 70, 10° permet de démontrer que $\varphi(Z)$ est dérivable au point Z_0 et que

$$\varphi'(Z_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

291. Fonctions uniforme, multiforme. Fonction holomorphe. — Dorénavant nous ne ferons plus de distinctions entre

$$C, z, 0, f, \mathcal{C}, \dots \quad \text{et} \quad P, m, O, F, \mathcal{D}, \dots,$$

ce qui revient à considérer que l'ensemble C sur lequel nous travaillons a été muni à la fois d'une structure de corps et d'une structure de plan affine euclidien.

1° Notion de fonction multiforme. — En associant à un nombre

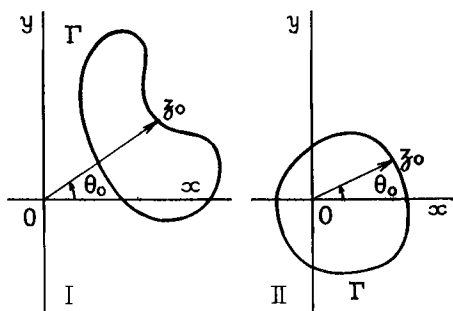


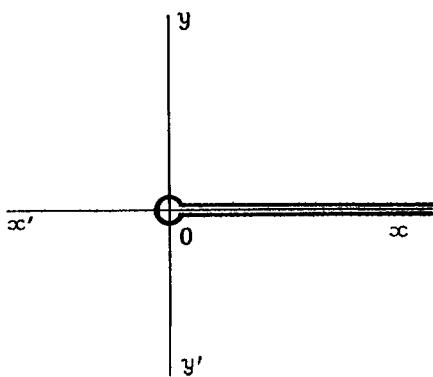
FIG. 98.

complexe non nul son argument on détermine une application de l'ensemble $C - \{0\}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}/2\pi$ défini au n° 279. Donnons-nous $z_0 \neq 0$ et considérons une détermination arbitrairement choisie, θ_0 , de $\arg z_0$. Faisons décrire à z un circuit simple Γ et suivons par continuité l'évolution de $\arg z$, en partant de z_0 et en revenant à z_0 . Si 0 n'est pas un point de l'intérieur de Γ (fig. 98, I) ou si, comme l'on dit,

Γ n'entoure pas le point 0, la valeur finale de $\arg z$ est θ_0 . Dans le cas contraire (fig. 98, II), cette valeur finale est $\theta_0 + 2\pi$ ou $\theta_0 - 2\pi$ selon que Γ a été décrit dans le sens positif ou dans le sens négatif. Généralisant la notion de fonction (1), nous dirons que la loi qui à un nombre complexe non nul associe toutes les déterminations de son argument est une *fonction multiforme* définie sur $C - \{0\}$, à valeurs dans R ; on la note

$$z \multimap \arg z.$$

On dit qu'elle admet 0 pour *point de ramification* (ou *point critique*). Étant donné une partie simplement connexe, $\mathfrak{D}$, de $C - \{0\}$, on peut associer à chacune des déterminations de $\arg z_0$, ($z_0 \in \mathfrak{D}$), une fonction uniforme définie sur $\mathfrak{D}$, à valeurs dans R . C'est ainsi que l'on pourra prendre pour $\mathfrak{D}$ l'ensemble C dont on a enlevé les points réels d'abscisse positive ou nulle ($y = 0$; $x \geq 0$); la figure 99 est un schéma destiné à rappeler qu'on a enlevé de P les points de la demi-droite Ox .



Toutes les fois qu'une confusion sera possible, nous dirons d'une fonction de z , comprise au sens d'une application d'une partie de C dans C , qu'elle est une *fonction uniforme* de z . Une fonction f est uniforme sur le domaine $\mathfrak{D}$ si les conditions suivantes sont réalisées : z_0 étant un point de $\mathfrak{D}$ où l'on connaît $f(z_0)$, en suivant un chemin quelconque dans $\mathfrak{D}$ joignant z_0 à un autre point quelconque de $\mathfrak{D}$, la valeur obtenue pour $f(z)$ est indépendante du chemin considéré.

Par exemple, avec la coupure faite suivant la demi-droite Ox , la fonction $z \multimap \arg z$ est une fonction uniforme dans $\mathfrak{D}$; en adoptant $\arg(-1) = \pi$, on obtiendra $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$, $\arg z = 0$ sur le bord supérieur de la coupure, $\arg z = 2\pi$ sur le bord inférieur de la coupure.

2° Notion de fonction holomorphe. — a) DÉFINITION I. — Une fonction complexe de la variable complexe, définie sur un domaine $\mathfrak{D}$, est dite *holomorphe* sur $\mathfrak{D}$ si elle est d'une part uniforme sur $\mathfrak{D}$, d'autre part dérivable en tout point de $\mathfrak{D}$.

DÉFINITION II. — Une fonction est dite *holomorphe* en un point z_0 s'il existe un disque ouvert de centre z_0 sur lequel elle est holomorphe.

(1) Une fonction définie sur E , à valeurs dans F , associe à tout $x \in E$ un seul $y \in F$; la généralisation consiste à remplacer « un seul y » par « un ensemble d'éléments y ».

REMARQUE. — La définition donnée ci-dessus d'une fonction holomorphe f sur $\mathfrak{D}$ fait appel à l'existence de la dérivée f' ; il en résulte que f est nécessairement continue sur $\mathfrak{D}$. La définition ne postule aucune autre propriété pour la dérivée f' . On peut démontrer à partir de là que f' est elle-même holomorphe, par suite f' est nécessairement continue. Nous ne ferons pas une telle démonstration et nous nous bornerons à ne considérer que des fonctions holomorphes pour lesquelles la dérivée est supposée continue.

b) *Fonction réciproque d'une fonction holomorphe.* — Soit f une fonction holomorphe sur un domaine $\mathfrak{D}$, telle que $f'(z) \neq 0$, quel que soit z dans $\mathfrak{D}$.

Nous sommes alors dans les conditions de l'étude du n° 290, 3° : il existe une fonction réciproque de f , soit φ , définie sur un voisinage convenablement choisi du point $Z_0 = f(z_0)$, et admettant une dérivée

$$\varphi'(Z) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Ainsi la fonction réciproque $z = \varphi(Z)$ est holomorphe au point Z_0 .

Dans le cas général, Z_0 peut être l'image par f de plusieurs points $z_0, z'_0, \dots$ de $\mathfrak{D}$; si l'on veut utiliser le symbole f^{-1} , il sera celui d'une fonction multiforme (et par suite non holomorphe) définie sur $f(\mathfrak{D})$, à valeurs dans $\mathfrak{D}$. Chaque détermination de f^{-1} est holomorphe en tout point de $f(\mathfrak{D})$ (au sens de la définition II), mais n'est pas holomorphe sur $f(\mathfrak{D})$.

Toute difficulté disparaît si f est une bijection holomorphe de $\mathfrak{D}$ sur $f(\mathfrak{D})$, à dérivée non nulle; f^{-1} est alors holomorphe sur $f(\mathfrak{D})$.

3° Exemples de fonctions holomorphes, de fonctions multiformes.

EXEMPLE I. — La fonction $f(z) = e^z$ a pour dérivée $f'(z) = e^z$.

Si $z = x + iy$, $|e^z| = e^x$; par suite : $\forall z$, on a $e^z \neq 0$.

La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et sa dérivée n'y est pas nulle.

Inversement, étant donné le nombre complexe non nul Z , nous avons vu (226) qu'il existe une infinité de nombres complexes z tel que $e^z = Z$; ils sont donnés par la formule

$$z = \text{Log } r + i\omega + k \cdot 2i\pi,$$

dans laquelle r désigne le module de Z , ω une détermination arbitrairement choisie de l'argument de Z , k un entier relatif quelconque.

Nous dirons que la fonction exponentielle, $z \mapsto e^z$, admet une fonction réciproque, notée $Z \mapsto \text{Log } Z$, multiforme, admettant 0 pour point de ramification. Cette fonction qui est définie par « $z = \text{Log } Z$ signifie $e^z = Z$ », est appelée *fonction logarithme népérien*.

Chacune de ses déterminations est holomorphe et admet la dérivée

$$\frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{e^z}, \quad \text{soit} \quad (\text{Log } Z)' = \frac{1}{Z}$$

sur toute partie simplement connexe de $\mathbb{C} - \{0\}$, d'après le 1°. En particulier la fonction logarithme népérien fournit une bijection du plan complexe, muni d'une coupure suivant le demi-axe réel positif, sur la bande ouverte du plan complexe qui est limitée par exemple par les droites $y = 0$ et $y = 2\pi$ (les points des droites $y = 0$ et $y = 2\pi$ sont exclus).

EXEMPLE II. — Soit n un entier positif donné. La fonction $f(z) = z^n$, dont la dérivée est $f'(z) = nz^{n-1}$, est holomorphe et à dérivée non nulle sur $\mathbb{C} - \{0\}$.

Inversement, étant donné le nombre complexe non nul Z , nous avons vu (I, 81) qu'il existe n nombres complexes z tels que $z^n = Z$; ils sont donnés par la formule

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\omega + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\omega + 2k\pi}{n} \right) \right),$$

dans laquelle r désigne le module de Z , ω une détermination arbitrairement choisie de l'argument de Z , k l'un quelconque des entiers $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Nous dirons que la fonction puissance n , $z \rightarrow z^n$, admet une fonction réciproque, notée $Z \rightarrow \sqrt[n]{Z}$, multiforme, admettant 0 pour point de ramification. Cette fonction, qui est définie par

$$\ll z = \sqrt[n]{Z} \quad \text{signifie} \quad z^n = Z \gg,$$

est appelée fonction racine n -ième.

Chacune de ses n déterminations est holomorphe et admet la dérivée

$$\frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{nz^{n-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{z}{nZ}, \quad \text{soit} \quad (\sqrt[n]{Z})' = \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{Z}}{Z},$$

sur une partie convenablement choisie de $\mathbb{C} - \{0\}$, en particulier à l'intérieur de n'importe quel angle de sommet 0 et de mesure $\frac{2\pi}{n}$.

292. Intégrale d'une fonction complexe sur un chemin du plan complexe. — 1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — Soit f une fonction continue sur un domaine $\mathcal{D}$ et Γ un chemin orienté de $\mathcal{D}$, ayant pour origine a et pour extrémité b . A tout système fini, (d) , de points de Γ ,

$$z_0 = a, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_n = b,$$

rangé au sens de la relation d'ordre sur Γ (IV, 10, 4°), associons la somme

$$\sigma = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) f(\zeta_k)$$

dans laquelle ζ_k désigne un point arbitraire du sous-arc de Γ d'extrémités z_{k-1} et z_k .

Il existe un nombre I , limite commune de toutes les sommes σ quand $\sup |z_k - z_{k-1}|$ tend vers 0⁽¹⁾; I est appelé intégrale de la fonction f sur le chemin Γ ; on note

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Posons :

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= X(x, y) + iY(x, y), \\ z_k &= x_k + iy_k, \quad \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, \quad \sigma = \sigma' + i\sigma''. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{cases} \sigma' = (x_k - x_{k-1}) X(\xi_k, \eta_k) - (y_k - y_{k-1}) Y(\xi_k, \eta_k) \\ \sigma'' = (x_k - x_{k-1}) Y(\xi_k, \eta_k) + (y_k - y_{k-1}) X(\xi_k, \eta_k). \end{cases}$$

De l'interprétation de l'intégrale curviligne comme limite (IV, 140), il

(1) Le mot *limite* a ici le même sens qu'au n° 86.

résulte que σ' et σ'' admettent, quand $\sup \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$, (qui est aussi $\sup |z_k - z_{k-1}|$), tend vers 0, des limites respectivement égales aux intégrales curvilignes

$$I' = \int_{\Gamma} X(x, y) dx - Y(x, y) dy \quad \text{et} \quad I'' = \int_{\Gamma} Y(x, y) dx + X(x, y) dy$$

D'où l'existence de l'intégrale de f sur l'arc orienté Γ et son expression

$$(1) \quad I = \int_{\Gamma} X dx - Y dy + i \int_{\Gamma} Y dx + X dy.$$

REMARQUE. — La formule (1) peut se retenir en écrivant,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (X + iY)(dx + idy).$$

et en séparant partie réelle et partie imaginaire dans le développement de $(X + iY)(dx + idy)$

EXEMPLE. — Sur un chemin Γ d'extrémités a et b qui ne contient pas le point 0, on peut définir $I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$.

On a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} \quad \text{ou} \quad \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{D'où :} \quad I = \int_{\Gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

La première intégrale est : $\left[\frac{1}{2} \text{Log}(x^2 + y^2) \right]_a^b = \text{Log} |b| - \text{Log} |a|$.

La seconde intégrale est calculée au n° 196 du tome IV. Elle vaut : $(\beta - \alpha)$, en désignant par α une détermination arbitrairement choisie de l'argument de a et par β la détermination de l'argument de b déduite de α par continuité, quand z décrit Γ de a jusqu'à b .

En d'autres termes : $I = \text{Log } b - \text{Log } a$,

étant entendu que l'on a choisi, en a , une détermination de la fonction Log et que l'on a suivi cette détermination, par continuité.

En particulier si Γ est un cercle ayant son centre au point 0 [resp. z_0], parcouru une seule fois dans le sens positif

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2 i \pi \quad \left[\text{resp.} \int_{\Gamma+z-z_0} \frac{dz}{z} = 2 i \pi \right]$$

2° Majoration du module d'une intégrale. — Le module de la somme σ , introduite au 1°, est majoré par la somme des modules, c'est-à-dire par

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \times |f(\zeta_k)|.$$

D'après une hypothèse générale (288), le chemin Γ est rectifiable; soit s l'arc de Γ et L sa longueur; $|z_k - z_{k-1}|$ étant la longueur de la corde déterminée par les points z_{k-1} et z_k , on peut affirmer (IV, 140)

$$\lim_{\sup |z_k - z_{k-1}| \rightarrow 0} \sigma_1 = \int_{\Gamma} |f(z)| ds.$$

Cela posé, la fonction $|f|$, continue sur Γ , y admet un majorant M . On a

$$(2) \quad \sigma_1 \leq \sigma_2 \quad \text{avec} \quad \sigma_2 = M \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|.$$

Le coefficient de M dans σ_2 est la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans Γ ; cette longueur est majorée par L . Ainsi

$$|\sigma| \leq \sigma_1 \leq ML.$$

Par passage à la limite, il en résulte la double inégalité

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| ds \leq ML.$$

3° Intégration d'une suite de fonctions. — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues sur le chemin Γ , qui converge uniformément (206) sur Γ vers une fonction f , ce qui entraîne que f est continue sur Γ .

A tout réel $\varepsilon > 0$ on peut associer un entier naturel $N(\varepsilon)$ tel que, pour $n > N(\varepsilon)$, la fonction à valeurs réelles $|f_n(z) - f(z)|$ admette sur Γ le majorant ε ; en utilisant le 2° on a

$$n > N(\varepsilon) \implies \left| \int_{\Gamma} f_n(z) dz - \int_{\Gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon L.$$

On en déduit une généralisation du théorème II du n° 206.

$$\int_{\Gamma} [\lim f_n(z)] dz = \lim \int_{\Gamma} f_n(z) dz.$$

4° Intégration d'une série de fonctions. — Du 3° on déduit, en raisonnant comme au n° 208 que, si $(u_n(z))$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément sur Γ :

$$\int_{\Gamma} \left(\sum_0^{+\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_0^{+\infty} \left(\int_{\Gamma} u_n(z) dz \right).$$

293. Théorème fondamental. Primitives d'une fonction holomorphe.

1° THÉORÈME FONDAMENTAL. — Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$; l'intégrale de f sur tout circuit de $\mathcal{D}$ est nulle.

Nous ne démontrerons la proposition que dans le cas où f est non seulement uniforme et dérivable sur $\mathcal{D}$, mais y admet une dérivée continue, ce qui, avec les notations habituelles, entraîne la continuité de X'_x, X'_y, Y'_x, Y'_y .

Supposons d'abord que le circuit Γ est simple. $\mathfrak{D}$ étant simplement connexe, l'intérieur Δ de Γ est, comme Γ , une partie de $\mathfrak{D}$ (fig. 100); les conditions d'application de la formule de Riemann-Green, (IV, 156), sont vérifiées. On a donc :

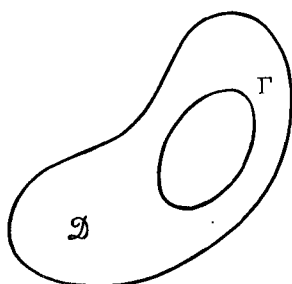


FIG. 100.

$$(1) \begin{cases} \int_{\Gamma^+} X dx - Y dy = - \iint_{\Delta} (Y'_x + X'_y) dx dy \\ \int_{\Gamma^+} Y dx + X dy = \iint_{\Delta} (X'_x - Y'_y) dx dy. \end{cases}$$

La fonction f étant holomorphe, en tout point de $\mathfrak{D}$ on a (Cauchy-Riemann) :

$$X'_x - Y'_y = 0 \quad \text{et} \quad Y'_x + X'_y = 0.$$

Les intégrales doubles des relations (1) sont nulles; il en est donc de même pour les intégrales curvilignes; par suite la partie réelle et la partie imaginaire de l'intégrale I du n° 292, 1° sont nulles et

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = 0.$$

Le résultat serait le même sur le circuit Γ^- .

Dans le cas où le circuit Γ présente un nombre fini de points doubles, on décompose Γ en circuits simples et le résultat subsiste.

2° Primitives. — Reprenons la fonction f holomorphe sur le domaine simplement connexe $\mathfrak{D}$:

a) Soit z_0 un point fixe et z le point générique de $\mathfrak{D}$. Désignons par Γ^+ et Γ_1^+ deux chemins orientés de $\mathfrak{D}$, chacun d'eux ayant pour origine z_0 et pour extrémité z . $\Gamma^+ \cup \Gamma_1^-$ est un circuit de $\mathfrak{D}$, auquel s'applique le théorème fondamental. On en déduit (fig. 101)

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz - \int_{\Gamma_1^+} f(z) dz = 0.$$

Ainsi l'intégrale de la fonction f , sur un chemin orienté d'origine z_0 et d'extrémité z est indépendante du choix de ce chemin dans $\mathfrak{D}$. Nous pouvons donc désigner cette intégrale par le symbole

$$(2) \quad F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

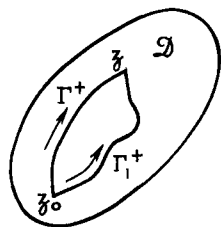


FIG. 101.

et nous obtenons ainsi une fonction uniforme F , définie sur $\mathfrak{D}$ (comme au n° 91, nous avons représenté par des lettres différentes la variable, z , et le véhicule d'intégration, ζ). Nous allons montrer que $F(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathfrak{D}$, et qu'elle admet $f(z)$ pour dérivée.

Pour cela, considérons un point fixe z de $\mathfrak{D}$, et soit η_1 un réel positif, assez petit pour que le disque de centre z et de rayon η_1 soit tout entier dans $\mathfrak{D}$.

Appelons γ le segment de droite d'origine z et d'extrémité $z + h$. Pour tout h tel que $|h| < \eta_1$, nous pouvons écrire

$$F(z + h) - F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Or d'après la continuité de f au point z :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_2 > 0 \quad \text{tel que} \quad |\zeta - z| < \eta_2 \implies |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

En écrivant

$$F(z + h) - F(z) - \int_{\gamma} f(z) d\zeta = \int_{\gamma} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta$$

on constate

$$|F(z + h) - F(z) - f(z) \times h| < |h| \times \sup_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta) - f(z)|.$$

On en déduit que :

$$|h| < \inf(\eta_1, \eta_2) \implies |F(z + h) - F(z) - f(z) \times h| < |h| \times \varepsilon,$$

ce qui entraîne que la fonction F admet, au point considéré z , la différentielle $f(z) \times h$ ou encore qu'elle admet la dérivée $f(z)$.

b) Inversement soit $G(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathfrak{D}$, de dérivée $f(z)$. Posons

$$f(z) = X(x, y) + iY(x, y); \quad G(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Avec les notations de a), nous avons en utilisant la formule (1) du n° 292

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma^+} Xdx - Ydy + i \int_{\Gamma^+} Ydx + Xdy.$$

Or, d'après les relations de Cauchy-Riemann,

$$X = P'_x = Q'_y \quad \text{et} \quad Y = -P'_y = Q'_x.$$

Il vient

$$(2) \quad \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma^+} P'_x dx + P'_y dy + i \int_{\Gamma^+} Q'_x dx + Q'_y dy.$$

Le second membre de (2) s'écrit

$$(P(x, y) - P(x_0, y_0)) + i(Q(x, y) - Q(x_0, y_0)) \quad \text{ou} \quad G(z) - G(z_0)$$

et nous pouvons énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — Étant donnée une fonction f holomorphe sur un domaine simplement connexe $\mathfrak{D}$, il existe une infinité de fonctions holomorphes sur $\mathfrak{D}$ qui admettent f pour dérivée. Ce sont les fonctions

$$z \longmapsto C + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

où C est une constante quelconque. On les appelle primitives de f sur $\mathfrak{D}$.

3° Extension à un domaine qui n'est pas simplement connexe. —

a) Considérons un circuit simple Γ , d'intérieur Δ et soit γ , d'intérieur δ , un second circuit simple, tout entier dans Δ . Soit f une fonction holomorphe sur le complémentaire $\mathfrak{D}$ de δ relativement à $\Gamma + \Delta$ (c'est ainsi que, si Γ et γ sont des cercles concentriques, $\mathfrak{D}$ sera une couronne circulaire).

Soit l^+ un chemin orienté de $\mathfrak{D}$, sans point double, dont l'origine est $A \in \Gamma$ et l'extrémité $a \in \gamma$ (fig. 102). Désignons par C^+ le circuit orienté constitué par Γ^+ , l^+ , γ^- et l^- . En adjoignant à C son intérieur, on détermine un domaine simplement connexe, sur lequel f est holomorphe. D'après le théorème fondamental, l'intégrale de f sur C^+ , qui est la somme des intégrales de f sur Γ^+ , l^+ , γ^- et l^- , est nulle.

Or, la fonction f étant uniforme sur $\mathfrak{D}$ (puisqu'elle est holomorphe), elle reprend la valeur initiale quand on parcourt C^+ , à partir d'un point de l ; il en résulte que les intégrales de f sur l^+ et l^- sont opposées et, finalement,

FIG. 102.

$$(3) \quad \int_{\Gamma^+} f(z) dz = \int_{\gamma^+} f(z) dz.$$

Plus généralement, soit un circuit simple Γ , d'intérieur Δ , et q circuits simples γ_k de Δ , dont les intérieurs δ_k sont deux à deux disjoints. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine $\mathfrak{D}$ qui contient le complémentaire de $\bigcup_k \delta_k$, relativement à $\Gamma + \Delta$ (fig. 103).

On a : (4)
$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^q \left(\int_{\gamma_k^+} f(z) dz \right).$$

b) Nous pouvons reprendre l'étude faite au 2°, mais ici l'intégrale de la fonction f sur un chemin d'origine z_0 et d'extrémité z n'est indépendante du choix de ce chemin que si on limite ce choix à une partie simplement connexe du domaine $\mathfrak{D}$. Si l'on ne s'astreint pas à cette restriction, on peut encore définir une fonction

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

mais il s'agit cette fois d'une fonction multiforme.

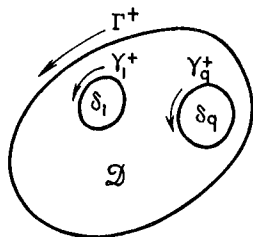


FIG. 103.

294. Intégrale de Cauchy. Dérivées successives d'une fonction holomorphe. — 1° THÉORÈME. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe $\mathfrak{D}$ et soit Γ un circuit simple de $\mathfrak{D}$. La valeur prise par f au point générique z de l'intérieur Δ de Γ est

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

La fonction $\zeta \rightarrow g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{2i\pi(\zeta - z)}$, (z donné), est holomorphe sur $\mathbb{D} - \{z\}$. Soit I l'intégrale de g sur Γ^+ :

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

I est aussi (n° 293, 3°) l'intégrale de g sur γ^+ , en désignant par γ l'un quelconque des cercles de centre z dont le rayon est assez petit pour que $\gamma \subset \Delta$. Écrivons $I = I_1 + I_2$, avec

$$I_1 = \frac{f(z)}{2i\pi} \int_{\gamma^+} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad I_2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

De l'exemple étudié au n° 292, 2°, on déduit : $I_1 = f(z)$.

D'autre part, étant donné un réel $\varepsilon > 0$ nous pouvons lui associer, du fait de la continuité de f au point z , un réel $\eta > 0$ tel que

$$(2) \quad |\zeta - z| < \eta \implies |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Ainsi, pourvu que nous ayons choisi un cercle γ dont le rayon, ρ , est inférieur à η , l'inégalité (2) est vérifiée en tout point de γ et, (n° 292, 2°), nous avons

$$|I_2| < \frac{1}{2\pi} ML, \quad \text{avec } M = \frac{\varepsilon}{\rho}, \quad L = 2\pi\rho.$$

Finalement :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |I - f(z)| < \varepsilon$$

ce qui exige $I = f(z)$ et se traduit par la formule (1).

2° Dérivée d'une fonction holomorphe. — L'existence de $f'(z)$ est acquise d'après la définition même d'une fonction holomorphe; nous allons trouver une expression de $f'(z)$, qui généralisera la formule (1).

Soit $u \neq 0$ tel que $z + u$ est un point de Δ . La formule (1) donne

$$f(z + u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - (z + u)} d\zeta$$

en sorte que

$$f(z + u) - f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - (z + u)} - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta$$

et

$$\frac{f(z + u) - f(z)}{u} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - u)} d\zeta.$$

Nous allons démontrer que, lorsque u tend vers 0, le second membre a pour limite l'intégrale

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Formons, pour cela, la différence

$$\delta(u) = \frac{f(z+u) - f(z)}{u} - l,$$

qui s'écrit

$$(3) \quad \delta(u) = \frac{u}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - u)} d\zeta.$$

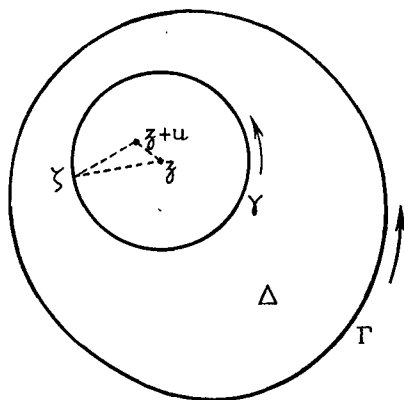


FIG. 104.

Choisissons ρ assez petit pour que le cercle γ de rayon ρ , ayant pour centre z soit tout entier dans Δ et limitons-nous à u tel que $|u| < \frac{\rho}{2}$; le point $z+u$ est ainsi intérieur à γ (fig. 104); la fonction sous le signe somme, au second membre de (3), est holomorphe sur $\mathcal{D} - \{z, z+u\}$; son intégrale sur Γ^+ est égale à son intégrale sur γ^+ .

Soit M un majorant sur le compact γ de la fonction continue $|f|$; en tout point ζ de γ ,

$$|\zeta - z| = \rho; \quad |\zeta - z - u| > \frac{\rho}{2},$$

par suite (n° 292, 2°)

$$|\delta(u)| < \frac{|u|}{2\pi} \cdot \frac{2M}{\rho^3} \times 2\pi\rho \quad \text{ou} \quad \frac{2M}{\rho^2} |u|.$$

On en déduit que $\delta(u)$ a pour limite 0 quand u tend vers 0, et que l est la dérivée de f au point z :

$$(4) \quad f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

REMARQUE. — La formule (4) généralise le résultat obtenu au n° 143 à propos de la dérivation sous le signe somme.

3° Dérivées successives d'une fonction holomorphe. — L'étude du 2° peut se généraliser par récurrence; on peut montrer ainsi l'existence des dérivées successives de la fonction holomorphe et en obtenir une expression. Bornons-nous à énoncer :

THÉORÈME. — Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe

$\mathfrak{D}$ et soit Γ un circuit simple de $\mathfrak{D}$. En tout point z de l'intérieur Δ de Γ , la fonction f admet quel que soit n une dérivée n -ième :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

APPLICATION. — Si la fonction : $x + iy \rightarrow X(x, y) + iY(x, y)$ est holomorphe sur $\mathfrak{D}$, les fonctions : $(x, y) \rightarrow X(x, y)$ et $(x, y) \rightarrow Y(x, y)$ admettent sur $\mathfrak{D}$ des dérivées partielles continues, à un ordre quelconque et, d'après les relations de Cauchy-Riemann,

$$X''_{xx} = Y''_{yx} \quad \text{et} \quad X''_{yy} = -Y''_{xy}.$$

D'autre part (144, 2°) : $Y''_{yx} = Y''_{xy}$. D'où :

$$X''_{xx} + X''_{yy} = 0 \quad \text{et de même,} \quad Y''_{xx} + Y''_{yy} = 0.$$

La partie réelle (resp. imaginaire) d'une fonction holomorphe ne peut donc être choisie arbitrairement; elle doit nécessairement avoir un *laplacien* nul (IV, 194); en d'autres termes, elle doit vérifier l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0.$$

Cette équation est dite *équation de Laplace*; ses solutions sont appelées *fonctions harmoniques*. Quand $X + iY$ est holomorphe, on dit que les fonctions harmoniques X et Y sont *conjuguées*. Le lecteur montrera que toute fonction harmonique X (resp. Y) ayant des dérivées secondes continues sur un domaine $\mathfrak{D}$ est la partie réelle (resp. imaginaire) d'une fonction holomorphe sur $\mathfrak{D}$ dont la partie imaginaire Y (resp. réelle X) est définie, à une constante additive près, par

$$dY = -\frac{\partial X}{\partial y} dx + \frac{\partial X}{\partial x} dy \quad \left[\text{resp. } dX = \frac{\partial Y}{\partial y} dx - \frac{\partial Y}{\partial x} dy \right].$$

295. Série de Taylor. — 1° **Rappel des propriétés des séries entières à coefficients et variable complexes.** — THÉORÈME I. — Une série entière est uniformément convergente sur tout disque fermé de centre 0, de rayon strictement inférieur au rayon de convergence (n° 214, 1°).

THÉORÈME II. — Les séries entières obtenues en dérivant ou en intégrant terme à terme une série entière donnée ont le même rayon de convergence que celle-ci (n° 215).

THÉORÈME III. — La somme d'une série entière est une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle de convergence.

Il s'agit en effet d'une fonction dérivable (216, 3°) qui, par ailleurs, est uniforme.

2° Développement d'une fonction en série entière. — PROBLÈME. — Étant donnée une fonction complexe de la variable complexe, $f(z)$, existe-t-il une série entière, de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme coïncide avec $f(z)$ sur un voisinage convenablement choisi de 0?

a) D'après le théorème III du 1°, il est nécessaire, pour qu'il en soit ainsi,

que f soit holomorphe au point 0, c'est-à-dire sur un voisinage de ce point (ce qui entraîne l'existence de dérivées de tous ordres, pour f , au point 0); d'autre part une solution éventuelle ne peut être (216, 2^o et 217) que la série de Mac-Laurin

$$f(0) + \frac{z}{1!} f'(0) + \dots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

b) Inversement soit f une fonction holomorphe sur un voisinage simplement connexe $\mathfrak{D}$ du point 0. Soit Γ un cercle de centre 0 dont le rayon ρ est assez petit pour que Γ soit dans $\mathfrak{D}$. Pour tout point fixe z intérieur à Γ , ce qui se traduit par $|z| < \rho$ (fig. 105), nous avons, d'après l'Intégrale de Cauchy,

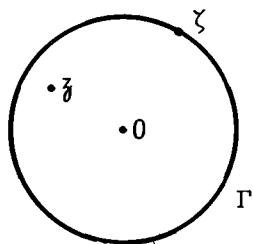


FIG. 105.

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Or nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \dots + \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} + \dots$$

La série géométrique que nous venons d'introduire est convergente puisque, pour $\zeta \in \Gamma$, le module de la raison, $\frac{|z|}{\rho}$, est inférieur à 1.

La fonction

$$\zeta \longrightarrow \frac{f(\zeta)}{2i\pi(\zeta - z)}, \quad (z \text{ donné}),$$

est donc, sur Γ , la somme de la série de fonctions dont le terme général est

$$\zeta \longrightarrow u_n(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{2i\pi\zeta^{n+1}} z^n, \quad (z \text{ donné}; n = 0, 1, 2, \dots).$$

Or, M désignant la borne supérieure sur Γ de la fonction continue $|f|$, nous avons en tout point ζ de Γ

$$|u_n(\zeta)| < v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{M}{2\pi\rho} \left| \frac{z}{\rho} \right|^n.$$

La série (v_n) , à termes réels positifs, est convergente (progression géométrique de raison inférieure à 1). La suite de fonctions $\{u_n(\zeta)\}$ est donc normalement convergente sur Γ (208, 4^o) et par suite uniformément convergente, ce qui permet (n^o 292, 4^o) de calculer l'Intégrale de Cauchy par intégration terme à terme, soit

$$f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Dans l'expression ainsi obtenue pour a_n , on reconnaît (n^o 294, 3^o) : $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

Ainsi la série de Mac-Laurin de la fonction f converge et admet pour somme

$f(z)$ en tout point z intérieur au plus grand cercle de centre 0 qui est contenu dans $\mathfrak{D}$. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — Étant donné une fonction f d'une variable z , holomorphe au point 0, il existe une série entière et une seule $(a_n z^n)$ telle que, pour $|z|$ assez petit,

$$f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n z^n; \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

le rayon de convergence de cette série entière est au moins égal au rayon du plus grand cercle de centre 0 à l'intérieur duquel la fonction f est supposée holomorphe.

3° Généralisation. — Le résultat du 2° s'étend, par changement d'origine, à une fonction f holomorphe sur un voisinage simplement connexe $\mathfrak{D}$ d'un point quelconque z_0 . Il existe une, et une seule, série entière $(a_n Z^n)$ de rayon de convergence non nul telle que

$$(1) \quad f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{pour} \quad |z - z_0| \text{ assez petit.}$$

Le coefficient a_n est donné par

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

Γ désignant un cercle de centre z_0 , contenu dans $\mathfrak{D}$. On pourrait d'ailleurs remplacer Γ par un circuit simple de $\mathfrak{D}$, entourant le point z_0 .

D'après le n° 294, 3°, on peut donc énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — Étant donné une fonction f holomorphe au point z_0 , on peut écrire, pour $|z - z_0|$ assez petit,

$$(2) \quad f(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Le second membre de la formule (2) est appelé développement en série de Taylor de la fonction f au point z_0 .

4° *Fonction analytique d'une variable réelle ou complexe. — DÉFINITION I. — On dit qu'une fonction f , réelle ou complexe, d'une variable z , réelle ou complexe, définie sur un voisinage du point z_0 , est développable en série entière au point z_0 , s'il existe une série entière $(a_n Z^n)$, de rayon de convergence non nul, telle que, sur un voisinage convenablement choisi de z_0 , on puisse écrire

$$(3) \quad f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

DÉFINITION II. — On dit qu'une fonction f , réelle ou complexe, d'une variable z , réelle ou complexe, définie sur un ouvert $\mathfrak{D}$ est analytique sur $\mathfrak{D}$, si elle est développable en série entière en tout point z_0 de $\mathfrak{D}$.

L'étude faite au 2° et 3° permet d'énoncer :

THÉORÈME. — Une fonction complexe d'une variable complexe, définie sur un ouvert $\mathfrak{D}$, est analytique sur $\mathfrak{D}$ si, et seulement si, elle est holomorphe sur $\mathfrak{D}$.

REMARQUE. — Contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une fonction d'une variable complexe :

a) une fonction d'une variable réelle peut avoir une dérivée première sans avoir de dérivées successives;

b) une fonction d'une variable réelle peut avoir une infinité de dérivées successives en un point sans être analytique. Considérons par exemple la fonction f déterminée par

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable en tout point x_0 (dans le cas de $x_0 = 0$, on vérifie, par récurrence, que les dérivées successives sont toutes égales à 0). Cette fonction n'est pas analytique car les coefficients de la série de Taylor au point 0 sont tous nuls, et si la fonction était analytique elle prendrait la valeur 0 sur un voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas.

5° Zéros d'une fonction holomorphe. — a) DÉFINITION. — La fonction f étant holomorphe au point z_0 , on dit que z_0 est un zéro d'ordre p pour f si l'on peut écrire

$$(3) \quad f(z) = (z - z_0)^p g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

g étant holomorphe au point z_0 .

D'après la continuité de g , il résulte de (3) qu'il existe un disque ouvert de centre z_0 sur lequel g ne prend pas la valeur 0, et, par suite, sur lequel f n'a pas d'autre zéro que z_0 . Autrement dit, *les zéros d'une fonction holomorphe sont des points isolés.*

b) I. Si la série de Taylor de f , au voisinage de z_0 , commence par un terme en $(z - z_0)^p$, soit

$$f(z) = a_p(z - z_0)^p + a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \dots, \quad a_p \neq 0,$$

on peut écrire

$$f(z) = (z - z_0)^p \cdot g(z) \quad \text{avec} \quad g(z) = a_p + a_{p+1}(z - z_0) + \dots,$$

$g(z)$ somme d'une série entière convergente dans le même disque que la série de Taylor, est une fonction holomorphe, et l'on peut dire que z_0 est un zéro d'ordre p pour $f(z)$.

II. Inversement, si, dans la définition (3), on remplace $g(z)$ par son développement en série de Taylor, on constate que la série de Taylor de $f(z)$ commence par un terme en $(z - z_0)^p$.

c) En résumé

$$\left. \begin{array}{l} z_0 \text{ est zéro d'ordre } p \\ \text{pour } f(z) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{la série de Taylor de } f(z) \\ \text{au voisinage de } z_0 \\ \text{commence par un terme en } (z - z_0)^p. \end{array} \right.$$

d) Il suffit d'utiliser l'expression des coefficients de la série de Taylor en fonction des dérivées successives de la fonction f pour obtenir

$$\left. \begin{array}{l} z_0 \text{ est zéro d'ordre } p \\ \text{pour } f(z) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots \\ \dots f^{(p-1)}(z_0) = 0, f^{(p)}(z_0) \neq 0. \end{array} \right.$$

6° Inégalité de Cauchy. — Reprenons f , holomorphe sur un voisinage de 0 et 0 son développement en série entière : $f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n z^n$, au point 0 . On a vu au 2° que, l' désignant un cercle de centre 0 et de rayon assez petit, on a

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

$M(\rho)$ désignant la borne supérieure sur Γ de la fonction continue $|f|$:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho \quad \text{ou} \quad |a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}.$$

Cette formule est appelée *inégalité de Cauchy*.

7° Fonction entière. — DÉFINITION. — On appelle fonction entière une fonction holomorphe sur le plan complexe tout entier.

D'après le 2°, une fonction est entière si, et seulement si elle coïncide sur tout le plan complexe avec la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est infini.

Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle, les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions entières.

THÉORÈME DE LIOUVILLE. — Une fonction entière bornée sur tout le plan complexe est une constante.

Soit M un majorant de $|f|$, valable pour tout le plan complexe. Dans l'inégalité de Cauchy du 6°, on a

$$\forall \rho, \quad M(\rho) \leq M \quad \text{et} \quad |a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}.$$

On en déduit, en faisant tendre ρ vers l'infini que, pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$. D'où $f(z) = a_0$.

APPLICATION : Théorème de d'Alembert. — Un polynôme à une indéterminée, sur le corps des complexes, de degré au moins égal à 1, admet au moins un zéro complexe.

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un polynôme $P(z)$, de degré $n \geq 1$ tel que $P(z)$ ne prend jamais la valeur zéro et considérons la fonction $f(z) = \frac{1}{P(z)}$.

En tout point z_0 , elle est définie, continue, et admet la dérivée $f'(z_0) = -\frac{P'(z_0)}{[P(z_0)]^2}$; comme elle est uniforme, il s'agit d'une fonction holomorphe dans tout le plan.

D'après le n° 157, 4°, $|f(z)|$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini : ayant choisi un nombre positif ε , nous pouvons donc lui associer un cercle Γ de centre 0 à l'extérieur duquel $|f(z)|$ ne prend que des valeurs inférieures à ε ; comme, d'autre part, la fonction continue $|f|$ est bornée sur le disque fermé Γ (286, 4°), nous pouvons affirmer que la fonction $f(z)$ est holomorphe et bornée sur tout le plan. Par suite $f(z)$ est une constante et $P(z)$ est de degré 0, ce qui constitue une contradiction sur le degré. Le théorème en résulte.

296. Série de Laurent. — 1° On considère deux cercles γ et Γ de centre O , de rayons r et R ($r < R$); on appelle $\mathfrak{D}$ le domaine formé par les points z du plan complexe tels que (fig. 106)

$$r \leq |z| \leq R.$$

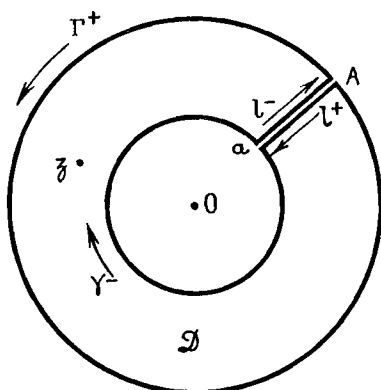


FIG. 106.

On dit que $\mathfrak{D}$ est une couronne entourant le point 0.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine contenant $\mathfrak{D}$, et z un point fixe tel que $r < |z| < R$.

Soit l^+ un segment orienté de $\mathfrak{D}$ dont le support est un rayon commun à γ et à Γ ; l'origine A est sur Γ , l'extrémité a est sur γ ; on fait en sorte que ce segment ne contienne pas le point z . Le circuit orienté constitué par Γ^+ , l^+ , γ^- et l^- peut être considéré comme la frontière d'un domaine simplement connexe sur lequel f est holomorphe. Comme z est un point intérieur à ce domaine, d'après l'intégrale

de Cauchy, $f(z)$ n'est autre que la somme, $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, des intégrales sur Γ^+ , l^+ , γ^- , l^- de la fonction

$$\zeta \longrightarrow \frac{f(\zeta)}{2i\pi(\zeta - z)}, \quad (z \text{ fixe}).$$

f étant holomorphe, donc uniforme, on a : $I_2 + I_4 = 0$.

En opérant comme au n° 295, 2° b, on calcule

$$(1) \quad I_1 = \sum_0^{+\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Pour calculer I_3 , qui s'écrit

$$I_3 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^-} \frac{-f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

utilisons la série géométrique

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \dots + \frac{\zeta^{m-1}}{z^m} + \dots$$

qui est convergente puisque, pour $\zeta \in \gamma$, le module de la raison, $\left| \frac{r}{z} \right|$, est inférieur à 1.

La fonction

$$\zeta \longrightarrow \frac{-f(\zeta)}{2i\pi(\zeta - z)}, \quad (z \text{ donné}),$$

est donc, sur γ , la somme de la série de fonctions dont le terme général est

$$\zeta \longrightarrow u_m(\zeta) = \frac{\zeta^{m-1} f(\zeta)}{2i\pi} \frac{1}{z^m}, \quad (z \text{ donné}; m = 1, 2, \dots).$$

Or, M désignant la borne supérieure sur le compact γ de la fonction continue $|f|$, nous avons en tout point ζ de γ

$$|u_m(\zeta)| < v_m \quad \text{avec} \quad v_m = \frac{M}{2\pi r} \left| \frac{r}{z} \right|^m.$$

La série (v_m) , à termes positifs, est convergente (progression géométrique de raison inférieure à 1). La suite de fonctions $\{u_m(\zeta)\}$ est donc normalement convergente sur γ , et par suite uniformément convergente (208, 4°); on en déduit

$$(2) \quad I_s = \sum_1^{+\infty} \frac{b_m}{z^m} \quad \text{avec} \quad b_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} \zeta^{m-1} f(\zeta) d\zeta.$$

D'après le n° 293, 3°, les intégrales qui figurent dans les formules (1) et (2) peuvent être calculées en remplaçant Γ , ou γ , par n'importe quel circuit simple C de la couronne $\mathfrak{D}$, entourant le point 0. En remplaçant m par $-n$ dans (2) on constate que, finalement,

$$(3) \quad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

2° Le résultat précédent s'étend, par translation, au cas d'une fonction holomorphe sur une couronne $\mathfrak{D}$ limitée par deux cercles centrés au point z_0 ; en désignant par C n'importe quel circuit simple de $\mathfrak{D}$, entourant le point z_0 , on a

$$(4) \quad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — Étant donné une fonction f holomorphe sur une couronne circulaire de centre z_0 , on peut écrire, pour tout point z de cette couronne :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Le second membre de cette formule est appelé développement en série de Laurent de la fonction f autour du point z_0 .

Nous retrouverons plus loin, sous le nom de *résidu* de la fonction f au point z_0 , le coefficient, a_{-1} , de $\frac{1}{z - z_0}$ dans le développement (4).

297. — Points singuliers isolés. — 1° Rappelons qu'une fonction f a été dite holomorphe au point z_0 quand il existe un disque de centre z_0 sur lequel la fonction est holomorphe (c'est-à-dire uniforme et dérivable).

2° Supposons que la fonction f ne soit pas holomorphe au point z_0 , mais que, $\mathfrak{D}$ désignant un voisinage simplement connexe de z_0 , elle soit holomorphe sur $\mathfrak{D} - \{z_0\}$. On dit alors que z_0 est un point singulier isolé de f .

La fonction f est alors développable en série de Laurent autour du point z_0 ; on peut écrire :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dans toute couronne $0 < r \leq |z - z_0| \leq R$, sous la seule réserve que R soit assez petit pour que le cercle de centre z_0 et de rayon R soit contenu dans $\mathfrak{D}$.

Trois cas sont alors possibles :

I. $a_n = 0$ pour tout n négatif. Il suffit alors de prolonger la fonction f au domaine $\mathfrak{D}$ par la convention : $f(z_0) = a_0$ pour obtenir une fonction holomorphe sur $\mathfrak{D}$.

II. Il existe un entier positif, p tel que $a_{-p} \neq 0$ et $a_n = 0$ pour $n < -p$. On dit alors que z_0 est pôle d'ordre p de f .

III. On a $a_n \neq 0$ pour une infinité d'indices n négatifs. On dit alors que z_0 est point singulier essentiel de f .

3° **Pôles.** — Supposons que z_0 soit pôle d'ordre p de f (définition II); on peut alors écrire, sur $\mathfrak{D} - \{z_0\}$ le développement (1) :

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_m(z - z_0)^m + \dots$$

et par suite la fonction φ définie sur $\mathfrak{D} - \{z_0\}$ par

$$(2) \quad \varphi(z) = (z - z_0)^p f(z)$$

admet un développement de la forme (3)

$$\varphi(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z - z_0) + \dots + a_0(z - z_0)^p + \dots + a_m(z - z_0)^{m+p} + \dots$$

$$a_{-p} \neq 0$$

ce qui signifie que φ (prolongée par continuité au point z_0 par la convention : $\varphi(z_0) = a_{-p}$) est holomorphe en z_0 et a une valeur non nulle en ce point.

Inversement si φ est holomorphe en z_0 , et a une valeur non nulle en ce point, la fonction f définie par (2) admet z_0 pour pôle d'ordre p .

Or φ est holomorphe en z_0 (avec $\varphi(z_0) \neq 0$), si et seulement si $\psi = \frac{1}{\varphi}$ est lui aussi holomorphe en z_0 (avec $\psi(z_0) \neq 0$), c'est-à-dire si et seulement si, pour $|z - z_0|$ assez petit

$$\psi(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots \quad (c_0 \neq 0)$$

et enfin si, et seulement si,

$$\frac{1}{f(z)} = c_0(z - z_0)^p + c_1(z - z_0)^{p+1} + \dots + c_n(z - z_0)^{n+p} + \dots, \quad (c_0 \neq 0).$$

En utilisant la définition donnée au n° 295, 5°, a), nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — Soit $\mathfrak{D}$ un voisinage de z_0 et soit f une fonction holomorphe sur $\mathfrak{D} - \{z_0\}$; z_0 est pôle d'ordre p de f si, et seulement si, la fonction $\frac{1}{f}$ (prolongée par continuité au point z_0) admet z_0 pour zéro d'ordre p .

298. Calcul de certaines intégrales simples par la méthode des résidus. — 1° **DÉFINITION.** — Soit z_0 un point singulier isolé de la fonction f ; $\mathfrak{D}$ étant un voisinage simplement connexe de z_0 , supposons f holomorphe dans $\mathfrak{D} - \{z_0\}$; f est alors susceptible d'un développement en série de Laurent autour de z_0 . Le coefficient a_{-1} de $\frac{1}{z - z_0}$ dans ce développement est appelé résidu de la fonction f au point z_0 .

On le note $\mathcal{R}(z_0)$. D'après l'étude du n° 296

$$\mathcal{R}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} f(\zeta) d\zeta,$$

C^+ désignant un circuit simple de $\mathfrak{D}$, entourant z_0 .

2° THÉORÈME DES RÉSIDUS. — Soit $\mathfrak{D}$ le domaine déduit d'un domaine simplement connexe en supprimant un nombre fini de points $z_1, \dots, z_q$. Désignons par f une fonction holomorphe sur $\mathfrak{D}$ et par Γ un circuit simple de $\mathfrak{D}$ dont l'intérieur contient tous les points z_k ($k = 1, \dots, q$). On a :

$$(1) \quad \int_{\Gamma^+} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^q \mathcal{R}(z_k),$$

$\mathcal{R}(z_k)$ désignant le résidu de la fonction f au point z_k .

Soit γ_k un cercle de centre z_k , de rayon assez petit pour que γ_k soit intérieur à Γ et pour que deux cercles γ_k soient extérieurs. D'après le n° 293, 3°

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^q \int_{\gamma_k^+} f(z) dz.$$

La formule (1) s'en déduit, en utilisant l'expression de $\mathcal{R}(z_k)$ obtenue au 1°.

3° Calcul pratique du résidu de la fonction f au point z_0 . — a) z_0 est pôle simple. C'est que l'on a

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + \dots$$

$$\text{D'où :} \quad a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ (z - z_0) f(z) \right\}$$

En particulier si

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q(z) = (z - z_0) G(z) \\ G(z_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z_0) \neq 0, \end{cases}$$

la formule précédente donne : $a_{-1} = \frac{P(z_0)}{G(z_0)}$.

En observant que

$$Q'(z) = G(z) + (z - z_0)G'(z) \implies Q'(z_0) = G(z_0),$$

on peut encore écrire $a_{-1} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

b) z_0 est pôle multiple d'ordre p . C'est que l'on a

$$(z - z_0)^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{p-1} + a_0(z - z_0)^p + \dots$$

En dérivant $p - 1$ fois les deux membres et en faisant $z = z_0$, on obtient

$$a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \left\{ \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_0)^p f(z)] \right\}_{z = z_0}.$$

On peut aussi utiliser la méthode suivante : si l'on a

$$(z - z_0)^p f(z) = \frac{P(z)}{G(z)}, \quad P(z_0) \neq 0, \quad G(z_0) \neq 0,$$

on en déduit, en posant $z = z_0 + u$,

$$u^p f(z_0 + u) = \frac{P(z_0) + uP'(z_0) + \dots}{G(z_0) + uG'(z_0) + \dots}$$

et on cherche le coefficient du terme en u^{p-1} , au second membre.

c) z_0 est point singulier essentiel. — Il faut alors effectuer le développement en série de Laurent autour de z_0 .

4° Lemmes de Jordan. — a) Si f est continue sur le cercle Γ de centre 0 et de rayon ρ et si $\lim_{z \rightarrow 0} |zf(z)| = 0$, l'intégrale, $I(\rho)$, de f sur Γ (ou sur un arc de Γ d'angle au centre donné) tend vers 0 quand ρ tend vers 0.

Soit $M(\rho)$ la borne supérieure de $|f|$ sur le compact Γ . On a :

$$|I(\rho)| \leq M(\rho) \times 2\pi\rho.$$

L'hypothèse entraînant : $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho \times M(\rho)) = 0$, la proposition en résulte.

b) Si f est continue sur le cercle Γ de centre 0 et de rayon ρ et si

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0,$$

l'intégrale de f sur Γ (ou sur un arc de Γ d'angle au centre donné) tend vers 0 quand ρ tend vers l'infini.

La démonstration est la même.

EXEMPLE I. — Calculer l'intégrale $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx$.

a) Montrons d'abord l'existence de A ; soit $f(t) = \frac{\cos t}{1+t^4}$, f est une fonction paire; R étant positif, soit

$$I = \int_{-R}^{+R} f(t) dt = 2 \int_0^R f(t) dt;$$

$$|I| \leq 2 \int_0^R |f(t)| dt \leq 2 \int_0^R \frac{dt}{1+t^4};$$

la dernière intégrale converge pour $R \rightarrow +\infty$ car $\frac{1}{1+t^4}$ est un infiniment petit d'ordre 4 par rapport à $\frac{1}{t}$ (182).

b) La fonction $g(t) = \frac{\sin t}{1+t^4}$ est impaire et

$$J = \int_{-R}^{+R} g(t) dt = 0; \quad \text{par suite} \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^4} dx = 0.$$

c) Nous pourrions donc calculer $A + iB = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{1+z^4} dz$, c'est-à-dire introduire la fonction

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^4}$$

et l'intégrer sur le circuit indiqué par la figure 107 : segment $[-R, +R]$ de l'axe réel, et demi-cercle Γ , de centre 0, de rayon $R > 1$, situé dans le demi-plan $y \geq 0$. $F(z)$ est holomorphe sur le domaine $\mathcal{D}$ limité par ce circuit, sauf aux deux pôles simples

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{3i\frac{\pi}{4}}$$

qui sont des racines quatrièmes de -1 .

Par suite

$$\int_{-R}^{+R} f(t) dt + \int_{\Gamma^+} F(z) dz = 2i\pi [\mathcal{R}(z_1) + \mathcal{R}(z_2)].$$

Nous pouvons utiliser pour la seconde intégrale le second lemme de Jordan : en effet $|e^{iz}| = e^{-y}$, et sur Γ , $|e^{iz}| \leq 1$, par suite $|zF(z)| \leq \frac{|z|}{|1+z^4|}$ tend vers zéro lorsque $|z|$ devient infini;

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma^+} \frac{e^{iz}}{1+z^4} dz = 0.$$

Comme d'autre part, d'après sa définition même,

$$A = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos t}{1+t^4} dt,$$

on constate que, finalement,

$$A = 2i\pi [\mathcal{R}(z_1) + \mathcal{R}(z_2)].$$

d) Appliquons la formule $\frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}$ du 3°, α :

$$\mathcal{R}(z_1) = \frac{e^{iz_1}}{4z_1^3} = -\frac{1}{4} z_1 e^{iz_1} \quad \text{puis} \quad z_1^4 = -1.$$

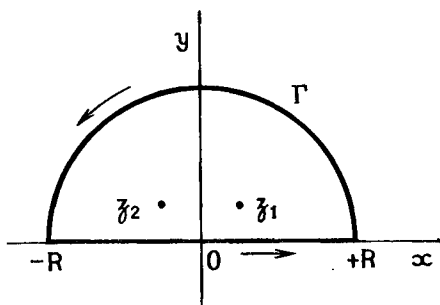


FIG. 107.

$$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}; e^{iz_1} = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}}.$$

$$\mathcal{R}(z_1) = -\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}}$$

$$\mathcal{R}(z_2) = -\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z_1) + \mathcal{R}(z_2) &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[i \left(e^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} \right) + \left(e^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} \right) \right] \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\cos \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \\ &= -\frac{i}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Finalement
$$A = \pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \right).$$

EXEMPLE II. — Calculer l'intégrale $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx.$

Les diverses étapes de l'étude sont celles de l'exemple I, mais ici les pôles z_1 et z_2 de la fonction

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$$

à l'intérieur du domaine $\mathfrak{D}$ sont des pôles doubles.

Nous appliquerons la méthode du 3°, b) : nous formons

$$\varphi(z) = (z - z_1)^2 F(z) = \frac{e^{iz}}{(z + z_1)^2 (z^2 + z_1^2)^2}$$

et nous calculons $\mathcal{R}(z_1) = \varphi'(z_1).$

En utilisant les dérivées logarithmiques

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} &= i - \frac{2}{z + z_1} - \frac{4z}{z^2 + z_1^2}, \\ \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} &= i - \frac{3}{z_1}. \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{R}(z_1) = \frac{e^{iz_1}}{16 z_1^6} \left(i - \frac{3}{z_1} \right).$$

Compte tenu de $z_1^4 = -1$, on en déduit

$$\mathcal{R}(z_1) = \frac{1}{16} e^{iz_1} (iz_1^2 - 3z_1).$$

Le calcul précédent s'applique aussi à z_2 et donne

$$\mathcal{R}(z_2) = \frac{1}{16} e^{iz_2} (iz_2^2 - 3z_2).$$

Finalement

$$A = 2 i \pi [\mathcal{R}(z_1) + \mathcal{R}(z_2)].$$

$$A = \frac{i \pi}{8} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[- \left(1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \left(e^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} \right) - \frac{3}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} \right) \right].$$

$$A = \frac{\pi \sqrt{2}}{8} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[(3 + \sqrt{2}) \sin \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \right].$$

EXEMPLE III. Calculer l'intégrale $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^8}{1+x^{10}} dx$.

L'existence de A est due à ce que, pour x infini, $\frac{x^8}{x^{10}+1}$ est un infiniment petit d'ordre 2 par rapport à $\frac{1}{x}$.

Étudions la fonction $f(z) = \frac{z^8}{z^{10}+1}$ sur le domaine $\mathfrak{D}$ limité (fig. 108) par le segment $[-R, +R]$ de l'axe réel et par le demi-cercle Γ , de centre 0, de rayon $R > 1$, situé dans le demi-plan $y \geq 0$.

$f(z)$ est holomorphe sur $\mathfrak{D}$, sauf en cinq pôles simples, qui sont des racines dixièmes de -1 , à savoir

$$z_k = e^{i\varphi_k} \quad \text{avec} \quad \varphi_k = \frac{\pi}{10}(2k+1), \quad (k=0, 1, \dots, 4).$$

D'où

$$(2) \quad \int_{-R}^{+R} \frac{x^8}{x^{10}+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{z^8}{z^{10}+1} dz = 2 i \pi \sum_{k=0}^4 \mathcal{R}(z_k).$$

Nous constatons que

$$zf(z) = \frac{1}{z+z^9}$$

admet la limite 0 pour z infini.
D'où (second lemme de Jordan) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} \frac{z^8}{z^{10}+1} dz = 0.$$

Comme, par ailleurs, A est, d'après sa définition même

$$A = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x^8}{x^{10}+1} dx$$

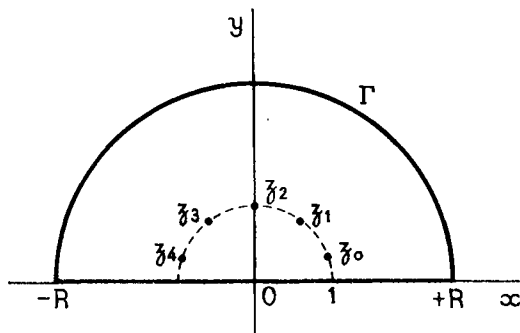


FIG. 108.

on constate, en écrivant que les deux membres de (2) ont même limite pour R infini :

$$A = 2 i \pi \sum_{k=0}^4 \mathcal{R}(z_k).$$

Or (3°, a)

$$\mathcal{R}(z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{z_k^8}{10 z_k^9} = \frac{1}{10 z_k} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{10} e^{-i\varphi_k}.$$

En posant $\omega = e^{-\frac{i\pi}{10}}$, on obtient : $\mathcal{R}(z_k) = \frac{1}{10} \omega^{2k+1}$ et

$$A = \frac{2i\pi}{10}(\omega + \omega^3 + \dots + \omega^9) \quad \text{ou} \quad \frac{i\pi}{5} \frac{\omega^{11} - \omega}{\omega^2 - 1} \quad \text{ou} \quad \frac{i\pi}{5} \frac{2\omega}{\omega^2 - 1},$$

ou $A = \frac{2i\pi}{5} \frac{1}{\omega^{-1} - \omega} \quad \text{ou} \quad A = \frac{2i\pi}{5} \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{10}} - e^{-\frac{i\pi}{10}}}.$

Finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^8}{x^{10} + 1} dx = \frac{\pi}{5} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{10}}.$$

EXEMPLE IV. — Calculer l'intégrale $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx$ (a réel, $0 < a < 1$).

L'existence de A résulte de : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{ax}}{1 + e^x} = 0$.

Étudions la fonction $f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$, qui est holomorphe sur le plan complexe privé des points tels que $e^z = -1$ ou $z = i\pi + 2m\pi$.

Le rectangle dont les sommets sont les points $-R$, R , $R + 2i\pi$, $R - 2i\pi$ contient (fig. 109), un seul point singulier, $z_0 = i\pi$, de la fonction $f(z)$. D'où

$$\int_{-R}^{+R} f(x) dx + i \int_0^{2\pi} f(R + iy) dy + \int_{+R}^{-R} f(x + 2i\pi) dx + i \int_{2\pi}^0 f(-R + iy) dy = 2i\pi \mathcal{R}(z_0)$$

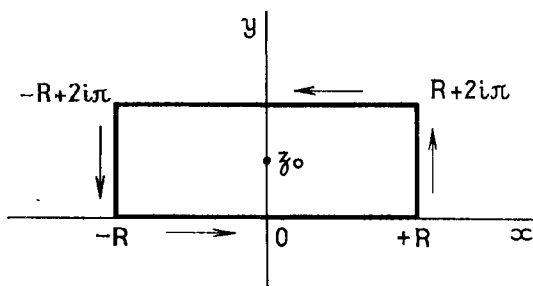


FIG. 109.

La seconde et la quatrième intégrales s'écrivent respectivement

$$e^{aR} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ia y}}{1 + e^R \times e^{iy}} dy; \quad - e^{-aR} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ia y}}{1 + e^{-R} \times e^{iy}} dy.$$

Comme $|e^{ia y}| = 1$, $|e^{iy}| = 1$, les modules de ces intégrales sont respectivement inférieurs à

$$\frac{e^{aR}}{e^R - 1} \times 2\pi, \quad \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \times 2\pi$$

elles ont pour limite 0 lorsque R devient infini.

La somme de la première et de la troisième intégrale est

$$(1 - e^{2ia\pi}) \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

On en déduit, en faisant tendre R vers l'infini

$$(1 - e^{2ia\pi})A = 2i\pi \mathcal{R}(z_0).$$

$z_0 = i\pi$, qui est zéro simple de $1 + e^z$, est pôle simple de $f(z)$ et on a (3° , a) :

$$\mathcal{R}(z_0) = \frac{e^{az_0}}{e^{z_0}} = -e^{ia\pi}.$$

D'où
$$A = 2i\pi \frac{e^{ia\pi}}{e^{2ia\pi} - 1} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

EXEMPLE V. — *Proposons-nous d'établir une formule de récurrence permettant de calculer*

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\text{Log } x)^n}{1 + x^2} dx \quad (n \text{ entier naturel}).$$

Le lecteur constatera que $A_{2p+1} = 0$, en écrivant $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$.

Cela posé, intégrons la fonction $f(z) = \frac{(\text{Log } z)^n}{1 + z^2}$ sur le circuit C indiqué par la figure 110, dans laquelle γ et Γ désignent des cercles de centre 0 et de rayons r et R , tels que $0 < r < 1 < R$. Celle des déterminations de la fonction logarithme népérien qui vérifie

$$\text{Log } z = \text{Log } |z| + i\theta \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \theta = 0 \text{ sur } ab, & \theta = 2\pi \text{ sur } a'b' \end{cases}$$

est holomorphe sur le domaine constitué par C et l'intérieur de C .

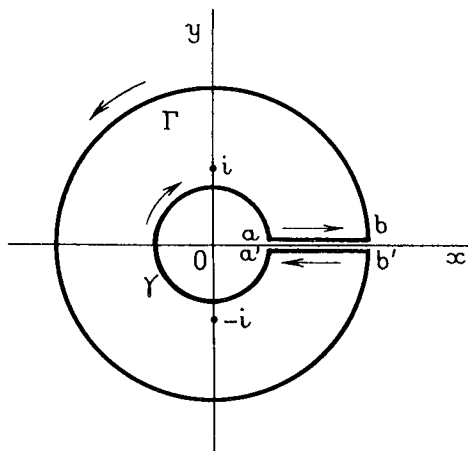


FIG. 110.

Le lecteur vérifiera que, d'après le lemme de Jordan, l'intégrale de f sur γ (resp. Γ) tend vers 0 quand r tend vers 0 (resp. quand R tend vers ∞). Il en déduira

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} [(\text{Log } x)^n - (\text{Log } x + 2i\pi)^n] = 2i\pi [\mathcal{R}(i) + \mathcal{R}(-i)].$$

Les résidus de f aux pôles simples i et $-i$ sont, (3° , a),

$$\mathcal{R}(i) = \frac{1}{2i} \left(i \frac{\pi}{2} \right)^n, \quad \mathcal{R}(-i) = -\frac{1}{2i} \left(3i \frac{\pi}{2} \right)^n.$$

D'où :
$$2i\pi[\mathcal{R}(i) + \mathcal{R}(-i)] = \frac{1-3^n}{4^n} \pi(2i\pi)^n,$$

$$\int_0^{+\infty} [(\operatorname{Log} x + 2i\pi)^n - (\operatorname{Log} x)^n] \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3^n-1}{4^n} \pi(2i\pi)^n,$$

et $A_0 + C_n^1(2i\pi)^{-1}A_1 + \dots + C_n^{n-1}(2i\pi)^{-(n-1)}A_{n-1} = \frac{3^n-1}{4^n} \pi$, avec $A_0 = \frac{\pi}{2}$.

Par exemple, A_1 étant nul, on obtiendra $A_2 = \frac{\pi^3}{8}$.

EXERCICES

1. — Déterminer toutes les fonctions holomorphes

$$x + iy \longrightarrow X(x, y) + iY(x, y)$$

vérifiant l'une des conditions suivantes

a) $\frac{X}{Y}$ ne dépend que de y .

b) X est le produit d'une fonction de x par une fonction de y .

c)
$$X(x, y) - Y(x, y) = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2 \cos x - e^y - e^{-y}}$$

d)
$$Y(x, y) = xy\varphi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

e) X ne dépend que de $x^2 + y^2$.

2. — Retrouver le résultat de la question 1, e) en montrant que les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent, en coordonnées polaires

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial Y}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \theta}.$$

3. — Trajectoires orthogonales des courbes (C_λ) d'équations $|\operatorname{sh}(x + iy)| = \lambda$.

4. — Condition (sur la fonction P) pour que, pour toute constante α , les trajectoires (l'_μ) sous l'angle α des courbes (C_λ) d'équations $P(x, y) = \lambda$ admettent des équations de la forme

$$P(x, y) + Q(x, y) \operatorname{tg} \alpha = \mu.$$

5. — Calculer l'intégrale de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$, sur le cercle de centre 0 de rayon 1, quand n est un entier positif et $|a| < 1 < |b|$.

6. — Calculer l'intégrale de la fonction $f(z) = \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}$ sur le cercle de centre 0, de rayon $r > 1$.

7. — Calculer, par la méthode des résidus, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x^2+1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \quad (n \geq 2, \text{ entier})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6 dx}{(x^2+1)^2(x^2+a^2)^2}, \quad a^2 \neq 1 \quad \left(\text{on trouvera : } \frac{\pi a^2 + 3a + 1}{2(a+1)^3} \right)$$

8. — Calculer
$$A = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx \quad (a \text{ réel positif}).$$

On intégrera $f(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$ sur le circuit formé par un segment de l'axe réel et un demi-cercle.

9. — Calculer
$$A = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos ax \, dx \quad (a \text{ réel positif})$$

On intégrera $f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$ sur le rectangle $y = 0, y = a, x = \pm R$.

10. — Calculer les intégrales de Fresnel.

$$C = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx \quad S = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx.$$

On intégrera $f(z) = e^{-z^2}$ sur le circuit fermé par un quart de cercle de centre 0 et deux segments de droites, respectivement portés par $y = 0$ et $y = x$.

(On trouvera :
$$C = S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.)$$

11. — Calculer
$$A = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x)(1+x^2)} \quad (\alpha \text{ réel, convenablement choisi})$$
 en intégrant

$(z) = \frac{z^\alpha}{(1+z)(1+z^2)}$ sur le circuit utilisé à l'exemple V du n° 298.

(On trouvera
$$A = \frac{\pi}{2 \sin \pi \alpha} \left(\cos \frac{\pi \alpha}{2} + \sin \frac{\pi \alpha}{2} - 1 \right)$$
)

12. — Calculer
$$A = \int_0^\pi \frac{\cos mx}{5 - 4 \cos x} dx, \quad (m \text{ entier positif}).$$

(On trouvera
$$A = \frac{\pi}{3 \cdot 2^m})$$

13. — Calculer
$$A = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2 - \sin x^2}{1+x^4} dx$$

en intégrant $f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$ sur le circuit formé par un quart de cercle de centre 0 et deux segments de droites, respectivement portés par $y = 0$ et $x = 0$.

14. — Calculer

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin x)(1+t^2)}{1-2t^2 \cos 2x + t^4} dt, \quad (x \neq k\pi),$$

et en déduire

$$B = \int_0^1 \frac{(\sin x)(1+t^2)}{1-2t^2 \cos 2x + t^4} dt, \quad (x \neq k\pi).$$

15. — Démontrer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \operatorname{Log} x}{(1+x)^2} dx = \pi$$

en intégrant $f(z) = \frac{\sqrt{z} \operatorname{Log} z}{(1+z)^2}$ sur le circuit qui a été utilisé au n° 298 (ex. V).

16. — Démontrer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(x+1)}{x^{1+\alpha}} dx = \frac{\pi}{\alpha \sin \pi \alpha} \quad (\alpha \text{ réel}, 0 < \alpha < 1)$$
 en intégrant

$f(z) = \frac{\operatorname{Log}(1-z)}{z^{1+\alpha}}$ sur un circuit formé par deux demi-cercles de centre 0, un demi-cercle de centre 1 et trois segments de droites portés par l'axe réel.

17. — Calculer, par la méthode des résidus, les intégrales

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + a^2)^2} \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)(x^2 + a^2)^2} \quad (a^2 \neq 1)$$

(on trouve : $A = \frac{\pi}{2} \frac{a^2 + 3a + 1}{(a + 1)^3}$, $B = \pi \frac{a^3 \sqrt{2}(a^4 - 2a^2 - 1) + 5a^4 + 1}{2a^3(a^4 + 1)^2}$).

18. — Déterminer les pôles de la fonction $f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sh}^2 \frac{\pi z}{2}}$.

Écrire le développement en série de Laurent de $f(z)$, au voisinage de 0. Calculer l'intégrale

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1) \operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{2}},$$

en intégrant $f(z)$ sur le rectangle formé par les droites $x = \pm R$ et $y = \pm 1$.

19. — Calculer $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ en intégrant la fonction $f(z) = \frac{1}{z} e^{iz}$ sur un circuit formé par deux demi-cercles de centre 0 et deux segments de droite portés par l'axe réel.

20. — Calculer l'intégrale de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z - 2)^2 (z^2 + z + 1)}$ sur un cercle de centre 0, de rayon différent de 1 et 2.

21. — Calculer l'intégrale de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z - 1)^2 (z - 2)^3 \sqrt{z + 5}}$ sur le cercle de centre 0, de rayon 4.

22. — Calculer l'intégrale de la fonction $f(z) = (a + bz + cz^2 + dz^3) \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right)$ sur un cercle de rayon compris entre 1 et 2.

INDEX ALPHABÉTIQUE

(Les chiffres renvoient aux pages)

A

abaque.	572
Abel (lemme d' —)	430
absolument convergente (intégrale —)	367, 369
— (série —).	395
accroissements finis (théorème des —)	136
accumulation (point d' —)	17, 589
adhérence	19, 588
adhérence (point d' —).	36, 595
adjacentes (suites —)	45
adjacents (ensembles —).	19
aire	165
Alembert (règle de d' —).	391
alternée (série —)	403
analytique (fonction —)	631
application (cf. fonction).	
arc paramétré.	607
— de Jordan	609
argument	196

B

Banach (espace de —)	256
Bernoulli (équation de —)	498
Bolzano-Weierstrass (propriété de —)	594
— (théorème de —)	18, 594
Borel-Lebesgue (propriété de —).	593
— (théorème de —)	603
borne inférieure, — supérieure	16
borné (ensemble —)	16

bornée (fonction —).	66
— (suite —).	31
boule fermée, — ouverte	254

C

Cantor-Dedekind (axiome de —).	57
caractéristique (équation —)	518
Cauchy (intégrale de —)	626
— (règle de —)	389
— (suite de —)	36, 256
Cauchy-Riemann (conditions de —).	617
champ.	64, 252
chemin.	614
circuit	614
circulaires (fonctions —)	91, 581
circulaires réciproques (fonctions —)	108
Clairaut (équation de —).	501
classe C^k (fonction de —).	121
coefficients de Fourier	461
compact (ensemble —).	593
complet (espace métrique —).	256
complexe (fonction — d'une variable réelle)	294
— (fonction — d'une variable complexe)	297, 606
concave (fonction —)	233
connexe (ensemble —)	599
connexe (domaine simplement —).	614
constantes (variation des —)	494, 515
contact (élément de —)	478
continue (fonction —)	89, 258
continuité uniforme	91, 601

continûment différentiable (appli- cation —)	310
convergence (disque de —, rayon de —)	432
convergente (intégrale —)	363
— (série —)	374
— (suite —)	31
— (intégrale absolument —)	367, 369
— (série absolument —)	395
— (série normalement —)	429
— (série uniformément —)	418, 427
convexe (fonction —)	232
— (partie —)	253
coupure	1
courbes intégrales	472
croissante (fonction —)	97
— (suite —)	30

D

Darboux (sommes de —)	149
— (théorème de —)	153
décroissante (fonction —)	97
— (suite —)	30
dense	589
dérivation sous le signe somme	269
dérivé (ensemble —)	589
dérivée	117, 614
— (application —)	307
— partielle	263
— — dans une direction	304
dérivées successives	120, 132, 270
dérivée logarithmique	124
développement en série	442
— — de Fourier	462
— — de Laurent	633
— — de Taylor	629
développement limité	206
diamètre (— d'un ensemble)	594
dichotomie	92
différence tabulaire	543
différentiable (application —)	267, 305
différentielle (application —)	305
différentielle (forme —)	313
différentielle (équation —) cf. équation	
discontinuité de première espèce	90
disque	252
— de convergence	432
distance	249
divergente (intégrale —)	363
— (série —)	374
— (suite —)	31

droite (dérivée à —)	118
— (limite à —)	71

E

élément de contact	478
emboîtés (segments —)	46
ensemble R^p	249
entière (série —)	429
équation différentielle	472
— — à variables séparables	480
— — de Bernoulli	498
— — de Clairaut	501
— — d'Euler	529
— — de Lagrange	500
— — de Riccati	499
— — homogène	486
— — homogène en y, y', y''	511
— — linéaire du 1 ^{er} ordre	491
— — linéaire du 2 ^e ordre	511
Équations (systèmes d' — différen- tielles)	524
équation fonctionnelle	176
escalier (fonction en —)	159, 423
espace métrique	250, 588
étagée (fonction —)	423
euclidienne (distance —, norme —)	250
Euler (équation différentielle d'—)	529
— (théorème d'—)	281
exponentielle (fonction —)	179
extremum	226, 287

F

facteur intégrant	324
fermé (ensemble —)	589
— (intervalle —)	15
fonction bornée	613
— complexe	293, 616
— composée	96, 125, 262
— continue	89, 261
— convexe	232
— croissante	97
— décroissante	97
— dérivable	119
— dérivée	120
— différentiable	267, 305
— discontinue	89
— en escalier	159, 423

— étagée	423
— exponentielle	179
— holomorphe.	619
— homogène	279
— impaire	65
— implicite	316
— logarithmique.	174
— monotone	97
— multiforme.	618
— numérique	605
— paire	65
— périodique	66
— puissance.	105
— réciproque	101, 127
— uniforme.	618
— (variation d'une —)	242
fonctions circulaires	91, 581
— circulaires réciproques	108
— hyperboliques.	195
— hyperboliques réciproques	201
— (série de —)	426
— (suite de —)	417
fonctionnelle (équation —)	176
forme différentielle.	313
Fourier (coefficients de —)	461
— (série de —)	462
frontière d'un ensemble	589

G

gauche (dérivée à —)	118
— (limite à —)	71
géométrique (série —)	378
graphe.	65

H

harmonique (série —)	377
— (série — alternée)	404
holomorphe.	619
homéomorphisme	600
homogène (équation différentielle).	486
— (fonction —)	279
homographique (récurrence —)	52
Hôpital (règle de l' —)	139
hyperboliques (fonctions —)	195
— (fonctions — réciproques).	201

I

impaire (fonction —)	65
implicite (fonction)	282, 316
indéterminée (forme —)	85, 223
inégalité de Schwarz.	165
— triangulaire.	249
inférieure (borne —)	16
— (limite —)	19, 36
infinie (limite —)	35
infiniment grand	82
— (— principal).	84
infiniment petit.	79
— (— principal).	80
intégrabilité (critère d'—)	151
— (— d'une fonction étagée)	426
intégrables (fonctions —)	152
intégrale.	148
— absolument convergente	367, 369
— de Cauchy	626
— (généralisation de l'—)	363
Intégrales simples (calcul des —)	358
intégrand (facteur).	324
intégration par parties.	331
intérieur	588
interpolation linéaire.	541
intervalle de convergence.	432
— fermé	15
— ouvert.	15
itération (méthode d'—)	558
isoclines (courbes —)	478

J

jacobien	309
jacobienne (matrice —)	307
Jordan (arc de —)	609

L

Lagrange (équation de —)	500
Landau (notation de —)	77
Laurent (série de —)	633
Leibniz (formule de).	133
limite à droite, à gauche	71
limite d'une fonction.	64
limite d'une suite.	31
limite inférieure, — supérieure	19, 36

linéaire (équation différentielle —)	491, 511
— (interpolation —)	541
— (récurrence —)	52
logarithme d'un nombre complexe.	458
logarithmique (fonction —)	174

M

Mac-Laurin (formule de —)	142
majorant.	16
majoré (ensemble —)	16
maximum	226, 287
méthode d'itération	558
— de Newton	552
— des parties proportionnelles.	552
— des substitutions	551
— des trapèzes	568
métrique (espace —)	250, 588
minimum	226, 287
minorant.	16
minoré (ensemble —)	16
module (— d'une subdivision).	148
monotone (fonction —)	97
— (suite —)	30
moyenne (formule de la —)	163
— (valeur —)	163
multiforme (fonction —)	618
multiple (zéro —)	235

N

népérien (logarithme —)	174
Newton (méthode de —)	552
nombre réel.	4
normale (convergence —)	429
norme.	252
normes équivalentes.	254
— — sur R^p .	606
numérique (calcul —)	533
— (droite —)	16
— (fonction —)	605
— (série —)	374
— (suite —)	30

O

ordre de multiplicité d'un zéro	235
— d'un infiniment grand	83
— — petit.	79

oscillation (— d'une fonction).	66
ouvert (ensemble —).	589
— (intervalle —).	15

P

paire (fonction —)	65
paramétré (arc —)	607
partie principale.	80, 84
parties (intégration par —)	331
— proportionnelles.	552
partielle (dérivée —)	263
pavé.	251
périodique (fonction —)	66
point adhérent	588
— d'accumulation	17, 589
— d'adhérence (ou — limite).	36, 593
— de discontinuité.	90
primitives	170
— (calcul des —)	326
principale (partie —)	80, 84
principal (infiniment grand —)	80
— (infiniment petit —)	84
puissance (fonction —)	105
puissances et racines.	20

Q

quadrature.	326
-------------	-----

R

racine d'une équation	235
racines (puissances et —)	20
radicaux arithmétiques.	21
rayon de convergence	432
recurrentes (suites —)	50
réel (nombre —)	4
résidu	637
reste d'une série.	376
Riccati (équation de —)	499
Riemann (intégrale de —)	149
— (série de —)	382
Rolle (théorème de —)	134

S

Schwarz (inégalité de —)	165
segment	15
séparable (équation différentielle —)	480

série absolument convergente.	395
— alternée	403
— à termes positifs.	380
— convergente.	374
— divergente	374
— entière.	429
— de fonctions	426
— de Fourier	462
— de Laurent.	633
— de Mac-Laurin	442
— de Riemann	382
— de Taylor.	629
— géométrique	378
— harmonique	377
— harmonique alternée	404
— normalement convergente	429
— numérique.	374
— semi-convergente	402
— trigonométrique.	459
somme d'une série.	374
sommes de Darboux.	149
sous-tangente, sous-normale.	229
substitutions (méthode des —)	551
suite bornée	31
— convergente.	31
— croissante	30
— de Cauchy	36, 256
— décroissante	30
— de fonctions	417
— divergente	32
— double.	30
— monotone	30
— numérique	30
suites adjacentes	45
— récurrentes.	50
supérieure (borne —).	16
— (limite —)	19, 36
superposition des solutions	494
système d'équations différentielles.	524

T

tabulaire (différence —)	543
Taylor (formule de —).	140
— (série de —)	629
topologie.	16, 588
transcendante (fonction —).	65
trapèzes (méthode des —)	568
trigonométriques (séries —).	459

U

uniforme (continuité —)	91, 601
— (convergence —)	418, 427
— (fonction —)	618

V

valeur moyenne.	163
valeurs intermédiaires (théorème des —)	95, 605
variation d'une fonction	242
voisinage.	15, 254

W

wronskien	512
---------------------	-----

Z

zéro d'une fonction	235
-------------------------------	-----

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. — <i>Les nombres réels</i>	1
I. Coupure dans l'ensemble Q des nombres rationnels.	1
II. Le corps R des nombres réels.	4
III. Propriétés générales des ensembles de nombres réels	15
IV. Puissances et racines. Exposants généralisés	20
<i>Exercices</i>	29
CHAPITRE II. — <i>Suites numériques</i>	30
I. Convergence d'une suite	30
II. Opérations sur les suites et sur les limites	36
III. Suites remarquables.	42
IV. Suites adjacentes. Le nombre e	45
V. Suites récurrentes.	50
VI. Interprétation géométrique des nombres réels.	54
<i>Exercices</i>	61
CHAPITRE III. — <i>Fonctions réelles d'une variable réelle. A) Limites</i>	64
I. Généralités.	64
II. Notion de limite.	67
III. Opérations sur les limites	75
IV. Infinitement petits. Infinitement grands.	77
V. Premières notions sur les formes indéterminées	85
CHAPITRE IV. — <i>Fonctions réelles d'une variable réelle. B) Continuité. Croissance</i>	89
I. Fonctions continues	89
II. Fonctions composées	96
III. Fonctions monotones	97
IV. Fonctions réciproques (ou inverses)	101
V. La Fonction puissance m , m rationnel	105
VI. Fonctions circulaires réciproques	108
<i>Exercices</i>	116
CHAPITRE V. — <i>Fonctions réelles d'une variable réelle. C) Dérivées</i>	117
I. Notion de dérivée.	117
II. Calcul des dérivées	121
III. Dérivées successives.	132
IV. Théorème de Rolle	134
V. Formule de Taylor	140
VI. Application du calcul des dérivés à l'étude de la variation des fonctions	143
<i>Exercices</i>	145

CHAPITRE VI. — <i>L'intégrale simple</i>	148
I. Définition de l'intégrale simple	148
II. Premières propriétés de l'intégrale simple.	157
III. Intégrale fonction d'une extrémité du segment d'intégration	169
<i>Exercices.</i>	172
CHAPITRE VII. — <i>Fonction logarithme et exponentielle</i>	174
I. La fonction logarithme népérien.	174
II. La fonction exponentielle de base e	179
III. Les fonctions logarithme et exponentielle de base quelconque.	182
IV. Fonction puissance	184
V. Croissance comparée des fonctions logarithme, exponentielle, puissance.	187
<i>Exercices.</i>	193
CHAPITRE VIII. — <i>Fonctions hyperboliques</i>	195
I. Fonctions hyperboliques directes	195
II. Fonctions hyperboliques réciproques.	201
<i>Exercices.</i>	205
CHAPITRE IX. — <i>Développement limités et applications</i>	206
<i>Exercices.</i>	224
CHAPITRE X. — <i>Pratique de l'étude d'une fonction</i>	226
I. Étude locale d'une fonction.	226
II. Fonctions convexes, concaves.	230
III. Séparation des zéros. Signe d'une fonction	235
IV. Pratique de l'étude d'une fonction.	242
<i>Exercices.</i>	247
CHAPITRE XI. — <i>Fonctions réelles de plusieurs variables réelles</i>	249
I. Ensemble de points dans $\mathbb{R}^p$	249
II. Fonction de plusieurs variables	257
III. Dérivés partielles	263
IV. Formule des accroissements finis. Formule de Taylor	275
V. Fonctions homogènes	279
VI. Fonctions implicites.	282
VII. Extremum	287
<i>Exercices.</i>	290
CHAPITRE XII. — <i>Fonctions complexes</i>	293
<i>Exercices.</i>	298
CHAPITRE XIII. — <i>Différentielles</i>	300
I. Différentielles des fonctions numériques	300
II. Applications différentiables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$	303
III. Applications des différentielles	313
<i>Exercices.</i>	324
CHAPITRE XIV. — <i>Recherche des fonctions primitives</i>	326
<i>Exercices.</i>	355
CHAPITRE XV. — <i>Calcul pratique des intégrales simples</i>	358
I. Méthodes de calcul	358
II. Extensions de la notion d'intégrale simple	363
<i>Exercices</i>	372

CHAPITRE XVI. — <i>Séries numériques</i>	374
I. Généralités sur les séries	374
II. Séries à termes positifs : généralités	380
III. Séries à termes positifs : étude pratique	387
IV. Séries absolument convergentes	395
V. Séries à termes réels non absolument convergentes	402
VI. Étude pratique d'une série. Exemples et compléments	406
<i>Exercices.</i>	411
CHAPITRE XVII. — <i>Séries entières</i>	417
I. Suites et séries de fonctions. Séries entières	417
II. Séries entières. Convergence	429
III. Application de l'étude des séries de fonctions aux séries entières	436
IV. Développement d'une fonction en série entière	442
V. Sommation de certaines séries entières	452
VI. Fonctions élémentaires d'une variable complexe	453
VII. Séries trigonométriques	459
<i>Exercices.</i>	465
CHAPITRE XVIII. — <i>Équations différentielles du premier ordre</i>	472
I. Généralités sur les équations différentielles	472
II. Généralités sur les équations différentielles du premier ordre	475
III. Équation à variables séparables	480
IV. Équations différentielles homogènes	486
V. Équations différentielles linéaires	491
VI. Équations à isoclines rectilignes	500
VII. Étude de quelques problèmes généraux liés à une équation différentielle. du premier ordre	503
<i>Exercices.</i>	507
CHAPITRE XIX. — <i>Équations différentielles du second ordre</i>	510
I. Équations du second ordre se ramenant au premier ordre	510
II. Équations différentielles linéaires du second ordre	511
III. Étude de quelques problèmes généraux liés à une équation différentielle	526
<i>Exercices.</i>	529
CHAPITRE XX. — <i>Calcul numérique</i>	533
I. Erreurs	533
II. Usage des tables de valeurs numériques	539
III. Calcul approché des zéros d'une fonction	551
IV. Calcul de la somme d'une série convergente avec une approximation donnée	562
V. Calcul approché d'une intégrale simple	567
VI. Notions sur les abaques	572
<i>Exercices.</i>	577
CHAPITRE XXI. — <i>Introduction axiomatique des fonctions circulaires</i>	581
APPENDICE I. — <i>Éléments de topologie d'un espace métrique</i>	588
APPENDICE II. — <i>Fonctions complexes d'une variable complexe</i>	613
INDEX ALPHABÉTIQUE	647

MASSON ET Cie ÉDITEURS
120, boul. Saint-Germain, PARIS VI^e
Dépôt légal 1^{er} trimestre 1970

Imprimé en France

Imprimerie Hérissay-Évreux
N^o d'impression : 12800

MC